



Metoda dijeljenja

U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbe:

1. $xy + 2x = 7$

Rješenje:

$$xy + 2x = 7 \Rightarrow xy = 7 - 2x \Rightarrow y = \frac{7 - 2x}{x} \Rightarrow y = -2 + \frac{7}{x}$$

x	$\frac{7}{x}$	$y = -2 + \frac{7}{x}$
-7	-1	-3
-1	-7	-9
1	7	5
7	1	-1

$$(x, y) \in \{(-7, -3), (-1, -9), (1, 5), (7, -1)\}$$

2. $xy = x + y$

Rješenje:

$$xy = x + y \Rightarrow xy - y = x \Rightarrow y(x - 1) = x \Rightarrow y = \frac{x}{x - 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x - 1 + 1}{x - 1} \Rightarrow y = \frac{(x - 1) + 1}{x - 1} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{x - 1}$$

$x - 1$	x	$\frac{1}{x - 1}$	$y = 1 + \frac{1}{x - 1}$
1	2	1	2
-1	0	-1	0

$$(x, y) \in \{(2, 2), (0, 0)\}$$

3. $xy + 3y - 5x = 18$

Rješenje:

$$xy + 3y - 5x = 18 \Rightarrow xy + 3y = 5x + 18 \Rightarrow y(x + 3) = 5x + 18 \Rightarrow y = \frac{5x + 18}{x + 3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5x + 15 + 3}{x + 3} \Rightarrow y = \frac{5(x + 3) + 3}{x + 3} \Rightarrow y = 5 + \frac{3}{x + 3}$$

$x + 3$	x	$\frac{3}{x + 3}$	$y = 5 + \frac{3}{x + 3}$
3	0	1	6
1	-2	3	8
-1	-4	-3	2
-3	-6	-1	4

$$(x, y) \in \{(0, 6), (-2, 8), (-1, -2), (-6, 4)\}$$

4. $7(x + y) = xy$

Rješenje:

$$xy = 7(x + y) \Rightarrow xy - 7y = 7x \Rightarrow y(x - 7) = 7x \Rightarrow y = \frac{7x}{x - 7}$$

$$\Rightarrow y = \frac{7x - 49 + 49}{x - 7} \Rightarrow y = \frac{7(x - 7) + 49}{x - 7} \Rightarrow y = 7 + \frac{49}{x - 7}$$

$x - 7$	x	$\frac{49}{x - 7}$	$y = 7 + \frac{49}{x - 7}$
1	8	49	56
-1	6	-49	-42
7	14	7	14
-7	0	-7	0
49	56	1	8
-49	-42	-1	6

$$(x, y) \in \{(8, 56), (6, -42), (14, 14), (0, 0), (56, 8), (-42, 6)\}$$

5. $xy + 3y^2 = 11$

Rješenje:

$$xy = 11 - 3y^2 \Rightarrow x = \frac{-3y^2 + 11}{y} \Rightarrow x = -3y + \frac{11}{y}$$

y	$-3y$	$\frac{11}{y}$	$x = -3y + \frac{11}{y}$
1	-3	11	8
-1	3	-11	-8
11	-33	1	-32
-11	33	-1	32

$$(x, y) \in \{(8, 1), (-8, -1), (-32, 11), (32, -11)\}$$



Metoda posljednje znamenke

Dokaži da jednadžbe nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva.

6. $10x + 20y + 30z = 2016$

Rješenje:

- ∠ Brojevi $10x$, $20y$ i $30z$ su djeljivi s 10 pa im je zadnja znamenka 0. Njihov zbroj također završava na 0.
- ∠ Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 6, to zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

7. $x(x+2) = 2016$

Rješenje:

- ∠ Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke umnoška $x(x+2)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x+2$	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
$x(x+2)$	0	4	8	5	4	5	8	3	0	9

- ∠ Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 6, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

8. $x^2 + 10y = 1234567$

Rješenje:

Pogledajmo zadnje znamenke kvadrata cijelih brojeva:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Dakle, kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da $10y$ završava znamenkom 0, zadnja znamenka od $x^2 + 10y$ može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9.

- ∠ Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 7, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

9. $x^2 - 5y = 8642468$

Rješenje:

Jer je x cijeli broj njegov kvadrat može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6, 9, a $5y$ može završavati znamenkom 0 ili 5.

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke razlike $x^2 - 5y$:

+	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
5	5	6	9	0	1	4

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 8, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

10. $x^2(x^2 - 3) = 2016$

Rješenje:

Jer je x cijeli broj njegov kvadrat može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9.

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke umnoška $x^2(x^2 - 3)$:

x^2	0	1	4	5	6	9
$x^2 - 3$	7	8	1	2	3	6
$x^2(x^2 - 3)$	0	8	4	0	8	4

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 6, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

11. $x^4 + y^4 = 33\dots33$ (100 trojki)

Rješenje:

Jer je x cijeli broj njegov kvadrat može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6, 9, a x^4 može završavati znamenkom 0, 1, 6 ili 5.

Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke zbroja $x^4 + y^4$:

+	0	1	5	6
0	0	1	5	6
1	1	2	6	7
5	5	6	0	1
6	6	7	1	2

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 3, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.



Metoda faktorizacije

12. Koliko ima pravokutnih trokuta čije su sve stranice cjelobrojne, a jedna kateta je 6 cm?

Rješenje:

/// Kateta $a = 6$ cm.

$$\text{Vrijedi: } a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 36 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 36 \Rightarrow (c-b)(c+b) = 36$$

/// Primijetimo da vrijedi:

- /// • stranice cjelobrojne (prirodne)
- /// • hipotenuza veća od katete, tj, $c - b > 0$
- /// • $c - b < c + b$,

/// pa je dovoljno promatrati ove slučajeve:

$c - b$	$c + b$	$2c$	c	b
1	36	37		
2	18	20	10	8
3	12	15		
4	9	13		

/// Postoji samo jedan pravokutan trokut čije su sve stranice cjelobrojne s katetom 6 cm.

Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbe:

13. $x^2 - 7 = 2xy$

Rješenje:

$$x^2 - 7 = 2xy \Rightarrow x^2 - 2xy = 7 \Rightarrow x(x - 2y) = 7$$

x	$x - 2y$	$-2y$	y
1	7	6	-3
-1	-7	-6	3
7	1	-6	-3
-7	-1	6	3

$$(x, y) \in \{(1, -3), (-1, 3), (7, -3), (-7, 3)\}$$

14. $x^2 - y^2 = 2017$

Rješenje:

$$x^2 - y^2 = 2017 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 2017$$

2017 je prost broj, pa promatramo slučajeve:

$x - y$	$x + y$	$2x$	x	y
1	2017	2018	1009	1008
-1	-2017	-2018	-1009	-1008
2017	1	2018	1009	-1008
-2017	-1	-2018	-1009	1008

$$(x, y) \in \{(1009, 1008), (1009, -1008), (-1009, 1008), (-1009, -1008)\}$$

15. $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$

Rješenje:

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4 \Rightarrow 6x^2 - 9xy - 4xy + 6y^2 = 4 \Rightarrow 3x(2x - 3y) - 2y(2x - 3y) = 4$$

$$(2x - 3y)(3x - 2y) = 4$$

$A = 2x - 3y$	$B = 3x - 2y$	$2A = 4x - 6y$	$-3B = -9x + 6y$	$2A - 3B = -5x$	x	$3x$	$3x - B = 2y$	y
1	4	2	-12	-10	2	6	2	1
2	2	4	-6	-2				
4	1	8	-3	5	-1	-3	-4	-2
-1	-4	-2	12	10	-2	-6	-2	-1
-2	-2	-4	6	2				
-4	-1	-8	3	-5	1	3	4	2

$$(x, y) \in \{(2, 1), (-1, -2), (-2, -1), (1, 2)\}$$

16. $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x^2 - 5xy + 6y^2 = 3 &\Rightarrow x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2 = 3 \Rightarrow x(x-3y) - 2y(x-3y) = 3 \\ \Rightarrow x(x-3y) - 2y(x-3y) &= 3 \Rightarrow (x-3y)(x-2y) = 3 \end{aligned}$$

$A =$ $x - 3y$	$B =$ $x - 2y$	$B - A =$ y	$2y$	$B + 2y =$ x
1	3	2	4	7
3	1	-2	-4	-3
-1	-3	-2	-4	-7
-3	-1	2	4	3

$$(x, y) \in \{(7, 2), (-3, -2), (-7, -2), (3, 2)\}$$

Riješi jednačbe u skupu prirodnih brojeva:

17. $xyz + xy = x + xz + 3$

Rješenje:

$$\begin{aligned} xyz + xy = x + xz + 3 &\Rightarrow xy(z+1) = x(z+1) + 3 \Rightarrow xy(z+1) - x(z+1) = 3 \\ x(y-1)(z+1) &= 3 \end{aligned}$$

x	$y - 1$	$z + 1$	y	z
1	1	3	2	2
1	3	1	4	0
3	1	1	2	0

$$(x, y, z) \in \{(1, 2, 2), (1, 4, 0), (3, 2, 0)\}$$



Metoda zbroja kvadrata

18. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

Rješenje:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

> Zbroj kvadrata tri cijela broja je 5 samo ako su to 4, 1 i 0.

x^2	y^2	z^2	x	y	z
0	1	4	0	1	2
			0	1	-2
			0	-1	2
			0	-1	-2
0	4	1	0	2	1
			0	-2	1
			0	2	-1
			0	-2	-1
1	0	4	1	0	2
			1	0	-2
			-1	0	2
			-1	0	-2
1	4	0	1	2	0
			1	-2	0
			-1	2	0
			-1	-2	0
4	0	1	2	0	1
			-2	0	1
			2	0	-1
			-2	0	-1
4	1	0	2	1	0
			-2	1	0
			2	-1	0
			-2	-1	0

> Jednadžba ima 24 rješenja.

Riješi u skupu cijelih brojeva jednačbe:

19. $n^2 - 4n + 3 + m^2 = 0$

Rješenje:

$$n^2 - 4n + 3 + m^2 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 - 1 + m^2 = 0 \Rightarrow (n-2)^2 + m^2 = 1$$

Zbroj kvadrata dva cijela broja je 1 samo ako su ti kvadrati 0 i 1.

$(n-2)^2$	m^2	$n-2$	m	n
0	1	0	1	2
		0	-1	2
1	0	1	0	3
		-1	0	1

$$(m, n) \in \{(1, 2), (-1, 2), (0, 3), (0, 1)\}$$

20. $x^2 + 6x + y^2 + 4y = 0$

Rješenje:

$$x^2 + 6x + y^2 + 4y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

Zbroj kvadrata dva cijela broja je 13 samo ako su ti kvadrati 4 i 9.

$(x+3)^2$	$(y+2)^2$	$x+3$	$y+2$	x	y
4	9	2	3	-1	1
		2	-3	-1	-5
		-2	3	-5	1
		-2	-3	-5	-5
9	4	3	2	0	0
		3	-2	0	-4
		-3	2	-6	0
		-3	-2	-6	-4

$$(x, y) \in \{(-1, 1), (-1, -5), (-5, 1), (-5, -5), (0, 0), (0, -4), (-6, 0), (-6, -4)\}$$

21. $(2x + y)^2 = 5 - (3x + 2y)^2$

Rješenje:

$$(2x + y)^2 + (3x + 2y)^2 = 5$$

Zbroj kvadrata dva cijela broja je 5 samo ako su ti kvadrati 1 i 4.

$(2x + y)^2$	$(3x + 2y)^2$	$A = 2x + y$	$B = 3x + 2y$	$-2A = -4x - 2y$	$-2A + B = -x$	x	$A - 2x = y$
1	4	1	2	-2	0	0	1
		1	-2	-2	-4	4	-7
		-1	2	2	4	-4	7
		-1	-2	2	0	0	-1
4	1	2	1	-4	-3	3	-4
		2	-1	-4	-5	5	-8
		-2	1	4	5	-5	8
		-2	-1	4	3	-3	4

$$(x, y) \in \{(0, 1), (4, -7), (-4, 7), (0, -1), (3, -4), (5, -8), (-5, 8), (-3, 4)\}$$

22. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednačbu $x^2 + y^2 + z^2 = 8x - 2z - 8$.

Rješenje:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8x - 2z - 8 \Rightarrow x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 2z = -8$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = -8 + 17 \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Zbroj kvadrata tri cijela broja je 9 ako su ti kvadrati 0, 0, 9 ili 1, 4, 4.

$(x - 4)^2$	y^2	$(z + 1)^2$	$x - 4$	y	$z + 1$	x	z
0	0	9	0	0	3	4	2
0	9	0	0	3	0	4	-1
9	0	0	3	0	0	7	-1
1	4	4	1	2	2	5	1
4	1	4	2	1	2	6	1
4	4	1	2	2	1	6	0

$$(x, y, z) \in \{(4, 0, 2), (5, 2, 1), (6, 1, 1)\}$$



Primjena diofantskih jednačbi

23. Odredi dvoznamenkasti broj koji je jednak dvostrukom umnošku svojih znamenki.

Rješenje:

$$\overline{xy} = 2xy, \quad x \text{ i } y \text{ znamenke, } x \neq 0$$

$$10x + y = 2xy \Rightarrow 2xy - y = 10x \Rightarrow y(2x - 1) = 10x \Rightarrow y = \frac{10x}{2x - 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{10x - 5 + 5}{2x - 1} \Rightarrow y = \frac{5(2x - 1) + 5}{2x - 1} \Rightarrow y = 5 + \frac{5}{2x - 1}$$

$2x - 1$	$2x$	x	$\frac{5}{2x - 1}$	$y = 5 + \frac{5}{2x - 1}$
1	2	1	5	10
-1	0	0		
5	6	3	1	6
-5	-4	-2		

$$\overline{xy} = 36$$

24. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y čiji je umnožak pet puta veći od njihova zbroja.

Rješenje:

$$xy = 5(x + y) \Rightarrow xy - 5y = 5x \Rightarrow y(x - 5) = 5x \Rightarrow y = \frac{5x}{x - 5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5x - 25 + 25}{x - 5} \Rightarrow y = \frac{5(x - 5) + 25}{x - 5} \Rightarrow y = 5 + \frac{25}{x - 5}$$

$x - 5$	x	$\frac{25}{x - 5}$	$y = 5 + \frac{25}{x - 5}$
1	6	25	30
-1	4	-25	-20
5	10	5	10
-5	0	-5	0
25	30	1	6
-25	-20	-1	4

$$(x, y) \in \{(6, 30), (4, -20), (10, 10), (0, 0), (30, 6), (-20, 4)\}$$

25. Ako zbroju godina dvoje djece dodamo umnožak njihovih godina, dobiva se 34. Koliko godina ima svako dijete?

Rješenje:

.....

$$x + y + xy = 34 \Rightarrow x + xy + y + 1 = 34 + 1 \Rightarrow x(y + 1) + (y + 1) = 35 \Rightarrow (y + 1)(x + 1) = 35$$

$x + 1$	$y + 1$	x	y
1	35	0	34
5	7	4	6
7	5	6	4
35	1	34	0

.....

Djeca imaju 4 i 6 godina.