1. Lucko planira za zimske praznike, koji traju 19 dana, riješiti 100 zadataka iz matematike. Dokaži, da bi ostvario svoj naum, Lucko mora bar jedan dan praznika riješiti najmanje 6 zadataka.

   Rješenje:

   Pretpostavimo suprotno, tj. da će Lucko svaki dan praznika riješiti najviše 5 zadataka. S obzirom da praznici traju 19 dana, to bi značilo da će Lucko riješiti najviše 95 zadataka što je u suprotnosti s njegovim naumom.

2. Nina često ide u London. Ako planira biti u Londonu točno 13 dana u godini, dokažite da će u nekom mjesecu Nina provesti barem dva dana u Londonu.

   Rješenje:

   Pretpostavimo suprotno, tj. da ni u jednom mjesecu Nina ne provede dva ili više dana u Londonu. Jasno je da tako, budući godina ima 12 mjeseci, Nina ne može sakupiti trinaest dana u Londonu.

3. Osnovna škola ima 3 razreda i 100 učenika. Dokažite da u toj školi postoji razred u kojem su barem 34 učenika.

   Rješenje:

   Škola ima 3 razreda i 100 učenika. Jer je $100=3\cdot 33+1$, po Dirichletovom principu slijedi da postoj razred s barem 34 učenika.

4. Dokaži da među $n+1$ prirodnih brojeva moraju postojati dva čija razlika je višekratnik broja n.

   Rješenje:

   Kada neki prirodan broj dijelimo s n, on može dati ostatke 0, 1, … n-1, dakle postoji n mogućnosti. Kako mi imamo $n+1$ prirodan broj, prema Dirichletovom principu, sigurno postoje dva broja s istim ostatkom, a njihova razlika je višekratnik broja n.

5. Sedam točaka je smješteno unutar pravilnog šesterokuta stranice duljine 1. Pokaži da su najmanje dvije točke na udaljenosti najviše 1.

   Rješenje:

   Spojimo dijagonale šesterokuta i podijelimo ga na 6 jednakostraničnih trokuta stranice 1. S obzirom da imamo 7 točaka tada postoji trokut u kojem se nalaze bar dvije točke. Kako je stranica tog trokutića 1 udaljenost tih dviju točaka nije veća od 1.

6. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 2 označeno je 5 točaka. Dokažite da postoje dvije označene točke koje nisu udaljene za više od 1.

Rješenje:

Podijelimo stranice danog trokuta na jedinične dužine i tim točkama povucimo paralele sa stranicama. Ovime smo napravili podjelu trokuta *ABC* na četiri jednakostranična trokuta stranice duljine jedan. Po Dirichletovom principu, u jednom od tih trokutića nalaze se dvije označene točke. Kako su obje unutar trokuta stranice duljine jedan, zaključujemo da ni njihova udaljenost ne može biti veća od jedan, što je trebalo pokazati.

7. Unutar jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine 5 razmješteno je 26 točaka. Dokažite da među njima postoje bar dvije točke čija udaljenost nije veća od 1.

Rješenje:

Podijelimo stranice danog trokuta na jedinične dužine i tim točkama povucimo paralele sa stranicama. Time smo dani trokut podijelili na 25 malih jediničnih trokutića. S obzirom da imamo 26 točaka tada po Dirichletu postoji trokutić u kojem se nalaze bar dvije točke. Kako je stranica tog trokutića 1 udaljenost tih dviju točaka nije veća od 1.

8. Unutar kvadrata stranice 1 dano je 9 točaka. Tada postoje tri točke od danih 9 koje su sadržane u krugu radijusa 2/5.

Rješenje:

Spojimo polovišta stranica i tako podijelimo jedinični kvadrat na četiri mala kvadrata čija je stranica duga 0,5. S obzirom da u polazni kvadrat moramo smjestiti 9 točaka, po Dirichletovom principu će se barem u jednom malom kvadratu nalaziti barem tri točke. Kako je dijagonala malog kvadrata duga $\sqrt{2}/2$, polumjer opisane kružnice tim kvadratima je $\sqrt{2}/4$ što je manje od 2/5. Dakle, postoje tri točke od danih 9 koje su sadržane u krugu radijusa 2/5.

9. Na prozoru oblika kvadrata duljine stranice 1 m nalazi se 51 komarac. Može li Marko metlicom oblika kruga polumjera 1/7 m, jednim udarcem ubiti 3 komarca?

Rješenje:

Podijelimo prozor na 25 kvadratića stranice 0.2. S obzirom da je na prozoru 51 komarac, tada postoji kvadratić na koje se nalaze bar 3 komarca. Opišimo tom kvadratiću kružnicu. Njen polumjer je $\sqrt{2}/10$ što je manje od 1/7. Dakle, Marko može metlicom oblika kruga polumjera 1/7 m jednim udarcem ubiti 3 komarca.

10. U laboratoriju dimenzija 13 m x 13 m x 13 m iz razbijenog terarija pobjeglo je 1995 leptira. Dokažite da postoji prostor oblika kocke stranice 1 u kojem nema niti jednog leptira.

Rješenje:

Podijelimo laboratorij na 13x13x13 malih kockica stranice 1. Kako je 13x13x13=2197, a mi imamo 1995 leptira očito je da postoji kockica u kojoj nema nijednog leptira.

11. Koliko najmanje cjelobrojnih točaka moramo odabrati kako bismo bili sigurni da postoje dvije za koje je polovište dužine koja ih spaja također cjelobrojna točka? (cjelobrojna točka je ona točka čije su obje koordinate cijeli brojevi)

Rješenje:

Polovište dužine koja spaja točke (a, b) i (c, d) ima koordinate $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. Te koordinate su cjelobrojne samo ako su a i c, odnosno b i d iste parnosti. Promatrajući parnost, vidimo da su točke mogu biti oblika (P, P), (P, N), (N, P) i (N, N). Polovište dužine će biti cjelobrojno ako spaja dvije točke istog tipa. Prema tome, ako odaberemo pet točaka, jedan tip će se morati ponoviti pa ćemo moći naći traženu dužinu. Ako odaberemo manje od pet točaka, moglo bi se dogoditi da su sve točke različitog tipa pa tražena dužina ne mora nužno postojati.

12. Dokažite da se u krugu polumjera duljine 9 cm ne može označiti 400 točaka tako da je udaljenost između svake dvije veća od jedan.

Rješenje:

Pretpostavimo suprotno, tj. da možemo označiti 400 točaka tako da su svake dvije udaljene za više od jedan. Tada oko svake točke možemo nacrtati krug radijusa ½ tako da se nikoja dva kruga ne sijeku (površine su im disjunktne). Također, primijetimo da se svi nacrtani krugovi nalaze unutar kruga polumjera 9.5, koncentričnog s originalnom velikim krugom. Sada promotrimo površinu koju prekrivaju mali krugovi: svaki od njih ima radijus ½, pa im je ukupna površina 100π (zbroj njihovih površina, jer se nikoje dvije ne preklapaju). S druge strane, površina najvećeg kruga (koji sadrži sve male) mora biti veća od površine koju oni prekrivaju, ali ona iznosi $9.5^2\pi$, što je manje od 100π. Došli smo do kontradikcije, pa zaključujemo da je pretpostavka kriva, tj. doista je nemoguće rasporediti točke tako da su svake dvije razmaknute za više od jedan.

13. Četiri prijatelja odlučila su jedne nedjelje poći u 5 kina svojega grada, u kojima predstave počinju u 9, 11, 13, 15, 17, 19 i 21 sat. Na svaku predstavu dva prijatelja išla su u jedno kino, druga dvojica u drugo kino. Kasno navečer pokazalo se da je svaki od njih bio u svih 5 kina. Dokažite da u svakom od 5 kina bar na jednoj predstavi toga dana nije bio nitko od prijatelja.

Rješenje:

Pretpostavimo suprotno: u jednom kinu bili su na svih 7 predstava. Kako su prijatelji bili na ukupno 14 predstava, slijedilo bi da su u ostala 4 kina bili ukupno na 7 predstava. Kako imamo 7 predstava a 4 kina, to po Dirichletovom principu slijedi da je bar u jednom kinu bila samo jedna grupa. Netko od prijatelja ne bi bio u tome kinu ni na jednoj predstavi što je kontradikcija sa zadanim. Prema tome, polazna pretpostavka je kriva.

14. Neki ljubitelj prirode zapisao je u svoj dnevnik: „Šuma na kraju sela je golema. Sigurno je broj stabala u njoj veći od broja listova na svakom od njih.“ Ako je ovaj zaključak valjan, možemo li onda tvrditi da je na najmanje dva stabla broj listova isti?

Rješenje:

Neka je n broj stabala. Brojevi listova na stablima mogu biti ili 0, 1, 2…, n-1 (postoji golo stablo) ili 1, 2…, n-1 (nema golih stabala). U prvom slučaju imamo n stabala i n različitih brojeva listova, pa naša tvrdnja ne mora biti istinita. U drugom slučaju imamo n stabala i n-1 različitih brojeva listova, pa je prema Dirichletovom principu naša tvrdnja istinita.

15. Na crtaći list papira u obliku pravokutnika 21cm x 30cm nespretni učenik prolio je tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka 314 cm^2. Dokažite da postoje dvije točke u čistom dijelu pravokutnika koje su simetrične u odnosu na jednu os simetrije pravokutnika.

Rješenje:

Preslikajmo sve mrlje simetrično u odnosu na jednu os simetrije pravokutnika. Površina zamrljanog dijela će se povećati, ali neće biti veća od 628 cm^2. Kako je površina pravokutnika 630 cm^2 (jer je dimenzija 21cm x 30cm), to će još uvijek ostati bar 2 cm^2 čiste površine. Ona je simetrična s obzirom na promatranu os simetrije, pa u njoj postoje dvije točke koje su simetrične u odnosu na tu simetriju.

16. Šesnaest državnika vodilo je važne mirovne pregovore za okruglim stolom, sjedeći na istoj udaljenosti jedan od drugoga. Mjesto svakog državnika bilo je na stolu označeno karticom s njegovim imenom. Nakon jedne duže pauze i burnih kuloarskih rasprava, sudionici pregovora vratili su se u dvoranu i posjedali oko stola ne obazirući se na kartice. Ubrzo se ustanovilo da ni jedan od njih ne sjedi na svom mjestu. Može li se okretanjem stol dovesti u takav položaj da ispred bar dva državnika stoje kartice s njihovim imenima?

Rješenje:

Stol se uvijek može okrenuti za $\frac{k}{16} \cdot 360°$, gdje je k prirodan broj, $1 \leq k \leq 15$, tako da ispred bilo kojeg državnika dođe kartica s njegovim imenom. Kako je broj državnika 16, a broj položaja stola različit od početnog 15, to postoji takav položaj stola kod kojeg ispred bar dva državnika dolaze kartice s njihovim imenima.

17. Dane su točke A, B, C, D, E i F od kojih nikoje tri ne leže na jednom pravcu. Te točke određuju 15 dužina, neke od njih su obojene plavom, a neke crvenom bojom. Dokažite da postoji trokut s vrhovima u skupu $\{A, B, C, D, E, F\}$ čije su sve tri stranice iste boje.

Rješenje:

Promatrajmo 5 dužina kojima je A krajnja točka. Među tim dužinama bar tri su iste boje. Promatrajmo te dužine. Njihovi drugi krajevi spojeni su međusobno dužinama koje su ili sve druge boje, pa je to traženi trokut, ili je bar jedna boje uočene trojke dužina, pa sa dvije od njih opet daje trokut iste boje.

18. Na svakom od n planeta nekog sustava u svemiru nalazi se astronom koji promatra najbliži planet. Udaljenosti među planetima su različite, a broj planeta je neparan. Dokažite da postoji planet koji nitko ne promatra.

Rješenje:

Uočimo najprije dva najbliža planeta. Jasno je da astronomi na tim planetima promatraju jedan drugoga. Ostaju još n-2 planeta i n-2 astronoma. Postoje dvije mogućnosti:

- Ako jedan od tih astronoma promatra jedan od uočenih najbližih planeta, planet koji nitko ne promatra nalazi se među preostalih n-2 planeta. (Jer imamo n-2 planeta i n-3 astronoma)
- Ako ta dva najbliža planeta nitko više ne promatra, tada možemo nastaviti izdvajanje najbližih planeta.

Budući da je n neparan broj, na kraju će ostati jedan planet koji nitko ne promatra.

19. Unutar jediničnog kvadrata smještena je 101 točka. Pokaži da neke tri od njih čine trokut površine ne veće od 0.02.

Rješenje:

Stranice jediničnog kvadrata podijelimo na 5 jednakih dijelova i dobijemo 25 kvadratića stranice 1/5. Svaki kvadratić podijelimo na 2 jednakokračna trokuta i dobijemo ukupno 50 sukladnih trokuta. Površina svakog malog trokutića je 1/50.

Kako je unutar jediničnog trokuta smještena 101 točka, po Dirichletovom principu slijedi da postoji trokutić površine 0.02 u kojem se nalaze bar 3 točke.

20. Soba ima oblik kocke duljine brida 3 m. U njoj zuji 136 muha. Dokažite da se u svakom trenutku barem 6 muha može obuhvatiti sferom polumjera 9 dm.

Rješenje:

Podijelimo danu kocku na 27 jediničnih kockica. Jer je $27 \cdot 5 = 135$, po Dirichletovom principu postoji kockica u kojoj zuji bar 6 muha. Još moramo pokazati da je polumjer sfere opisan kockici manji od 9 dm. Kako je polumjer sfere opisane kockici jednak polovici njene prostorne dijagonale, slijedi:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} m = \sqrt{\frac{3}{4}} m = \sqrt{\frac{81}{108}} m < \sqrt{\frac{81}{100}} m = \frac{9}{10} m = 9\ dm$$

21. U skupini od prvih 100 prirodnih brojeva izabran je 51 različit broj. Dokažite da se među izabranima moraju naći dva čija razlika iznosi 2.

Rješenje:

Razlika dva broja je jednaka 2 ako i samo ako su oni uzastopni brojevi iste parnosti.

Npr. oba parna ($2k$ i $2k+2$) ili oba neparna ($2k+1$ i $2k+3$).

Kako skup prvih 100 prirodnih brojeva sadrži 50 parnih i 50 neparnih brojeva, postoji 25 parnih brojeva koji nisu uzastopni i 25 neparnih brojeva koji nisu uzastopni. Mi izabiremo 51 broj i sigurno ćemo izabrati bar dva uzastopna broja iste parnosti.

22. Na natjecanju u streljaštvu sudjelovalo je 50 strijelaca. Svaki od njih ispalio je točno 12 hitaca. Svih 12 pogodaka u metu imao je samo jedan strijelac. Dokažite da postoji najmanje 5 natjecatelja koji imaju isti broj pogodaka u metu.

Rješenje:

Ukoliko „maknemo“ strijelca koji je imao svih 12 pogodaka, preostalo nam je 49 strijelaca.

Kako je svaki strijelac imao 12 pokušaja, mogao je imati 0 ili 1 ili 2…ili 11 pogodaka tj. 12 mogućnosti za broj pogodaka.

Dakle, imamo 49 strijelaca od kojih je svaki ima 12 mogućnosti za broj pogodaka. Jer je $49=12\cdot 4+1$, po Dirichletovom principu slijedi da postoji 5 strijelaca s istim brojem pogodaka.

23. Na otvorenju nove izložbe poznatog slikara okupilo se društvo od 50 ljubitelja umjetnosti. Dokažite da među prisutnima postoje bar dvije osobe koje imaju isti broj poznanika.

Rješenje:

Pretpostavimo suprotno: među prisutnima ne postoje bar dvije osobe koje imaju isti broj poznanika, tj. svih 50 osoba ima različit broj poznanika.

Jedna osoba može imati 0 ili 1 ili 2 ili… ili 49 poznanika.

S obzirom da svaka osoba ima 50 mogućnosti za broj poznanika, a svih 50 osoba imaju različit broj poznanika, sigurno postoji osoba s 0 poznanika i osoba s 49 poznanika. Osoba s 0 poznanika ne pozna nikoga dok osoba s 49 poznanika pozna sva ljude na primanju. To nas dovodi do kontradikcije što znači da je naša pretpostavka kriva.

24. U nogometnom prvenstvu osnovnih škola nekog grada sudjeluje 16 momčadi. Svaka momčad igra sa svakom momčadi po jednu utakmicu u vrijeme koje najbolje odgovara obima momčadima. Dokažite da se u svakom trenutku mogu naći dvije momčadi koje su odigrale isti broj utakmica.

Rješenje:

Pretpostavimo suprotno: ne postoje dvije momčadi koje su odigrale isti broj utakmica, tj. svih 16 ekipa je odigralo različit broj utakmica.

Jedna ekipa može odigrati 0 ili 1 ili 2 ili… ili 15 utakmica.

S obzirom da svaka ekipa ima 16 mogućnosti za broj utakmica, a svih 16 ekipa imaju različit broj utakmica, sigurno postoji ekipa s 0 utakmica i ekipa s 15 utakmica. Ekipa s 0 utakmica nije odigrala s nikim dok je ekipa s 15 utakmica odigrala sa svima. To nas dovodi do kontradikcije što znači da je naša pretpostavka kriva.

25. Dokažite da postoji prirodan broj koji počinje s 9876543210, a djeljiv je s 1995.

Rješenje:

Broju 9876543210 dopišemo 5 nula i dobijemo broj 987654321000000. Neka je ostatak dobivenog broja prilikom dijeljenja s 1995 jednak m. Pošto svi brojevi pri dijeljenju s 1995 imaju ostatak od 0 do 1994 (maksimalno 4 znamenke), broju 987654321000000 pribrojimo 1995-m. Pri tom zbrajanju neće se narušiti prvih 10 znamenaka jer ostatak može biti najviše 4-znamenkast. I tako smo dobili prirodan broj koji je djeljiv s 1995, a počinje s 9876543210.

Poopćenje:

Ako imamo zadana 2 prirodna broja n i k, $n>k$, uvijek postoji prirodan broj koji počinje kao i n, a djeljiv je s k zato što broju n možemo s desna dopisati onoliko nula koliko znamenki ima k, zatim tom broju pribrojimo k umanjen za ostatak koji taj isti broj daje pri dijeljenju s k pa će taj broj biti djeljiv s k. Neće se narušiti činjenica da novonastali broj počinje s n jer ostatak pri dijeljenju s k može imati najviše jednako znamenki kao i k. Na taj način ćemo uvijek dobiti prirodan broj koji počinje kao i n, a djeljiv je s k.

26. Dokažite da se uvijek može naći proizvoljno mnogo prirodnih brojeva oblika 11…11000..00 koji su djeljivi s nekim unaprijed danim prirodnim brojem.

Rješenje:

Neka je n prirodan broj.

Promatrajmo brojeve 1, 11, … ,11..1 i njihove ostatke pri dijeljenju s n. Mogući ostaci su 0, 1, …, n-1.

Ako je jedan od ostataka jednak 0, tada postoji beskonačno mnogo brojeva koji započinju s tim brojem (jedinicama) i mogu imati proizvoljan broj nula i svi su djeljivi s n.

Ako ne, tada po Dirichletovom principu bar dva broja imaju isti ostatak i njihova razlika (broj 11…100…0) je djeljiva s n. Nađenom broju možemo „zalijepiti“ proizvoljan broj nula i dobit ćemo opet broj djeljiv s n.

27. Dokažite da svaki prost broj veći od 5 ima višekratnik prikaziv samo pomoću jedinica.

Rješenje:

Neka je n prost broj veći od 5.

Promatrajmo brojeve 1, 11, … ,11..1 i njihove ostatke pri dijeljenju s n. Mogući ostaci su 0, 1, …, n-1. Ako je jedan od ostataka jednak 0, tada tvrdnja vrijedi. Ako ne, tada po Dirichletovom principu bar dva broja imaju isti ostatak i njihova razlika (broj 11…100…0) je djeljiva s n. S obzirom da je n prost broj, možemo „odrezati“ nule na kraju broja i dobiti broj koji u svom prikazu ima samo jedinice i djeljiv je s n.

28. Dokaži da za bilo koji prirodan broj n, postoji njegov višekratnik koji sadrži samo znamenke 0 i 7.

Rješenje:

Neka je n prirodan broj.

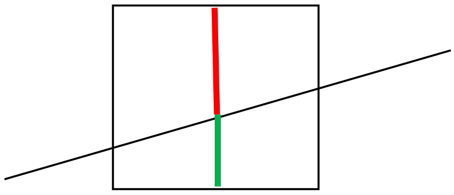
Promatrajmo brojeve 7, 77,…,77…7 i njihove ostatke pri dijeljenju s n. Mogući ostaci su 0, 1, …, n-1.

Ako je jedan od ostataka jednak 0, tada tvrdnja vrijedi. Ako ne, tada po Dirichletovom principu bar dva broja koja imaju isti ostatak i njihova razlika (broj 77…700…0) je djeljiv s n.

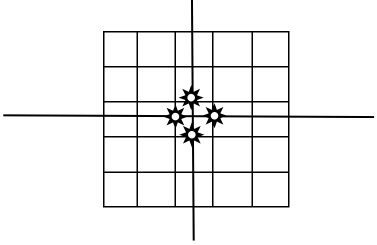
29. Svaki od 9 danih pravaca dijeli kvadrat na dva četverokuta čije se površine odnose kao 2 : 3. Dokažite da najmanje 3 od tih 9 pravaca prolaze kroz jednu točku.

Rješenje:

Pravac dijeli kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose kao 2 : 3. Ti trapezi imaju iste visine (stranica kvadrata) pa jer je površina trapeza $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, dobijemo da se njihove srednjice odnose kao 2 : 3.



Dakle, zadani pravac dijeli u istom omjeru liniju kvadrata koja sadrži srednjice tih trapeza. Postoje ukupno 4 točke koje dijele srednje linije kvadrata u omjeru 2 : 3.



S obzirom da imamo 9 pravaca, to odmah slijedi da najmanje tri pravca prolaze jednom od tih točaka.

30. U šumi oblika pravokutnika sa stranicama duljine 30 km i 20 km živi 720 koala. Istraživač može u jednom danu istražiti krug promjera 3 km. Dokažite da postoji krug u kojem istraživač može pronaći čak 6 koala u jednom danu.

Rješenje:

Stranicu pravokutnika dugu 20 km podijelimo na 10 jednakih dijelova duljine 2 km, a stranicu dugu 30 km na 14 dijelova duljina $\sqrt{5}$ km. Primijetimo da smo s četrnaestom duljinom izašli van šume. Ovakvom podjelom smo dobili 10x14 pravokutnika dimenzija 2x$\sqrt{5}$. Ako se unutar svakog pravokutnika nalazi najviše 5 koala tada je u šumi maksimalno 140x5=700 koala što nije istina. Dakle postoji pravokutnika s bar 6 koala. Opišimo mu kružnicu. Njen promjer je 3 km. Dokazali smo da postoji krug u kojem istraživač može pronaći čak 6 koala u jednom danu.