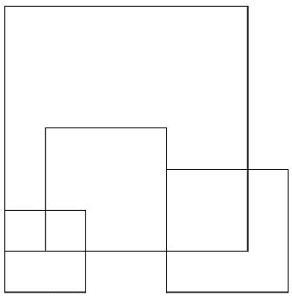
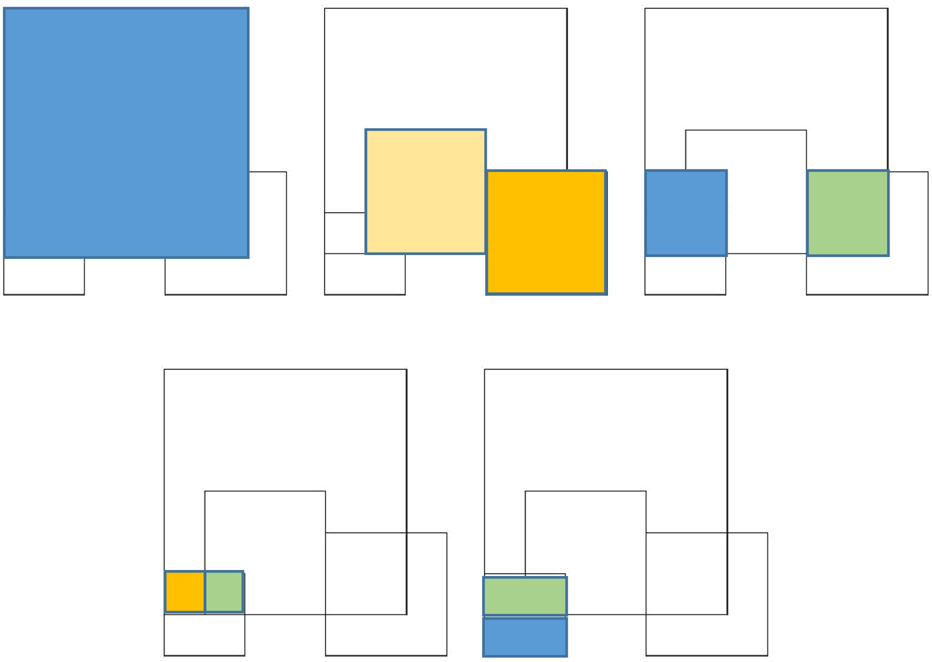
Jesensko kolo 2018./2019.

3.13. Koliko četverokuta je na slici?



A. 6	**B.** 7	**C.** 8	**D.** 9	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Brojat ćemo četverokute po veličini:



Četverokuta je ukupno 1 + 2 + 2 +2 + 2 = 9.

3.11. Sofija je u subotu pročitala lektiru od 45 do 73 stranice knjige. Koliko je stranica knjige Sofija pročitala?

A.	B.	C.	D.	E.
28	39	38	29	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Sofija je prije subote pročitala prvih 44 stranica knjige, a u subotu preostale stranice do 73. Dakle, u subotu je pročitala 73 – 44 = 29 stranica!

PAZI: Ako broj stranica izračunamo kao 73 – 45 = 28, onda smo pogriješili jer nismo brojali 45. stranicu knjige!

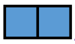
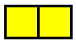
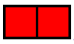
3.16. Alan je bacao igraću kockicu (čije su strane označene s jednom do šest točkica) i zapisivao rezultat bacanja. U pet bacanja zbroj svih točkica je bio 28. Koliko je puta kockica pokazala tri točkice?

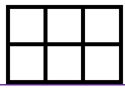
A.	B.	C.	D.	E.
0	1	2	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Ako smo pri bacanju kockica dobili jednu kockicu s tri točkice, tada je zbroj svih preostalih točkica koje smo dobili kada smo još četiri puta bacili kockicu jednak 28 – 3 = 25. Ali, to nije moguće, jer svaka kockica ima najviše 6 točkica pa njihov zbroj ne može prijeći $6 \cdot 4 = 24$.

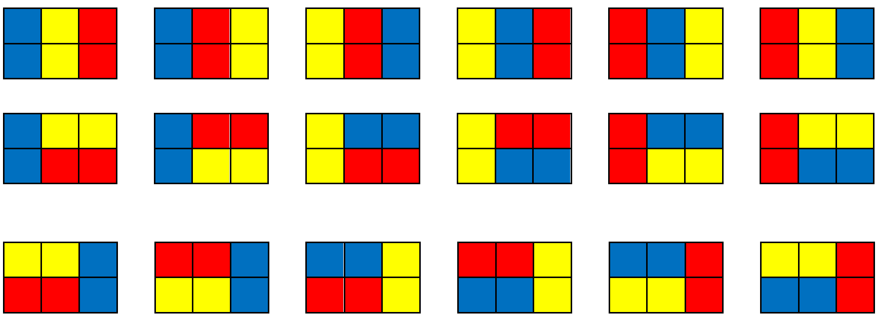
Jedno od mogućih bacanja je: 6 + 6 + 6 + 6 + 4 = 28. Jasno je da nije moguće dobiti niti jednu trojku, pa je odgovor na pitanje u zadatku 0.

3.20. Ana ima tri pločice pravokutnog oblika u različitim bojama: plava , žuta  i crvena . Na koliko različitih načina Ana može složiti te tri pločice da bi njima prekrila ploču koja ima dva retka i tri stupca?



A.	B.	C.	D.	E.
20	18	12	6	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



Postoji 18 načina.

4.7. Domino pločice su male, pravokutne pločice podijeljene na 2 kvadrata na kojima su prazna polja ili polja od jedne do šest točkica. Koliko je ukupno točkica na domino pločicama koje imaju polje s pet točkica?

A.	B.	C.	D.	E.
56	45	35	Manje od 20	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Nacrtat ćemo sve domino pločice koje imaju polje s pet točkica (umjesto točkica pišemo njihov broj):

5	5	5	5	5	5	5
0	1	2	3	4	5	6

Ukupan broj točkica je 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 56.

4.13. Koliko postoji troznamenkastih brojeva kojima se ne mijenja vrijednost, ako im zamijenimo mjesto stotice i jedinice?

A.	B.	C.	D.	E.
90	100	81	9	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Ispišimo pregledno sve troznamenkaste brojeve s danim svojstvom:

101	111	121	131	141	151	161	171	181	191
202	212	222	232	242	252	262	…		
303	313	323	…						
404	…								
505	…								
606	…								
707	…								
808	…								
909	919	929	939	949	959	969	979	989	999

Takvih brojeva je $10 \cdot 9 = 90$.

4.16. Marica ide na tečaj tkanja petkom, ali samo parnim datumima. Tečaj plaća peti dan u mjesecu. Ako je jednog mjeseca Marica bila na tečaju tri puta, koji dan u tjednu je bio kada je morala platiti tečaj?

A.	B.	C.	D.	E.
Ponedjeljak	Srijeda	petak	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Prikazati ćemo u tablici sve datume u mjesecu. Naravno, ne znamo s kojim danom je mjesec započeo i koliko mjesec ima dana.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Samo tri uzastopna dana u tjednu mogu se (ali i ne moraju ako mjesec ima manje od 31 dan) pojaviti pet puta u jednom mjesecu. To su oni dani koji su bili prvoga, drugoga i trećega dana u mjesecu. Marica je bila na tečaju tkanja tri petka, ali samo parnim datumima. Jedina mogućnost za to je da su to datumi 2, 16 i 30 koji se pojavljuju u drugom stupcu (jer prvi i treći stupac nemaju tri parna broja). Dakle, 2. je bio petak, pa je peti dan u mjesecu, kada Marica mora platiti tečaj, ponedjeljak.

4.18. Lukina knjiga ima 123 stranice. Koliko je ukupno znamenaka uporabljeno za označavanje stranica te knjige?

A.	B.	C.	D.	E.
122	276	258	261	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Jednoznamenkaste stranice: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – ukupno 9

Dvoznamenkaste stranice: 10, 11, 12, …99 – ukupno 90 dvoznamenkastih brojeva, dakle 180 znamenaka

Troznamenkaste stranice: 100, 101, 103,…123 – ukupno 24 troznamenkasta broja što su 72 znamenke.

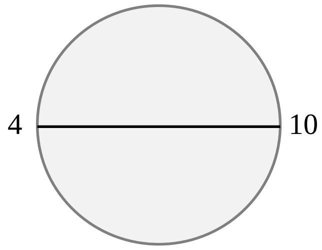
Za označavanje knjige upotrijebljeno je 9 + 180 + 72 = 261 znamenka.

4.19. Za dječji rođendan postavljeno je 5 okruglih stolova i oko svakog stola ravnomjerno stolci numerirani brojevima 1, 2, 3 itd. Ako se stolac s brojem 4 nalazi nasuprot stolca s brojem 10, koliko je ukupno stolaca oko okruglih stolova?

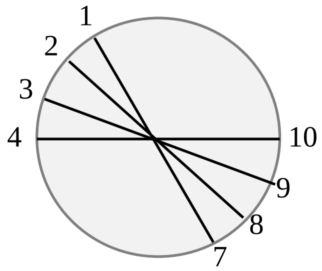
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
60	50	65	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

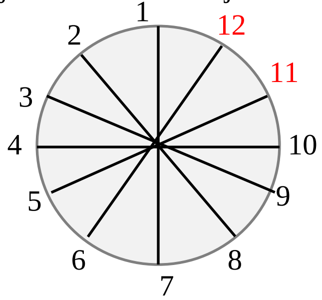
Skicirat ćemo jedan stol:



Nadopunimo sjedalice lijevo od broja 4 i njima nasuprotne:



Preostalo nam je nadopuniti sjedala od 4 do 7 i njima nasuprotne:



Za jednim stolom je 12 stolica, pa je ukupno za svih 5 stolova 60 stolica.

5.13. Koliko prirodnih brojeva manjih od 100 ima točno tri djelitelja??

A.	B.	C.	D.	E.
0	3	4	5	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj 1 ima samo jednog djelitelja (sebe samog).

Prosti brojevi (2, 3, 5, 7,…) imaju točno dva djelitelja (1 i sebe samog).

Brojevi koji se mogu napisati kao umnožak dva različita prosta broja (npr. $6 = 2 \cdot 3$) imat će četiri djelitelja (1, 2, 3 i 6).

Jedina mogućnost da broj ima točno tri djelitelja je da je jednak umnošku dva jednaka prosta broja.

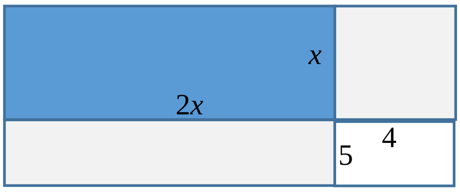
To su brojevi: $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $5 \cdot 5 = 25$ i $7 \cdot 7 = 49$. Takvih je brojeva manjih od 100 četiri.

6.12. Jedna stranica pravokutnika duplo je veća od druge. Ako se dulja stranica pravokutnika produlji za 4 cm, a kraća za 5 cm, dobiveni pravokutnik imati će za 90 cm^2 veću površinu od početnog pravokutnika. Kolika je razlika dulje i kraće stranice dobivenog pravokutnika?

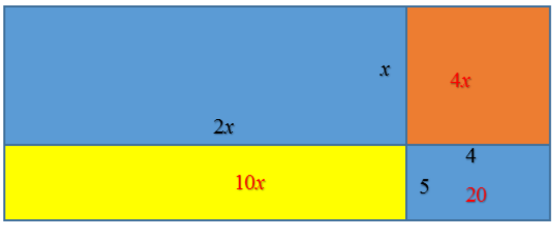
A.	B.	C.	D.	E.
5 cm	4 cm	3.5 cm	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Skicirajmo dani pravokutnik:



Zbrajamo samo nadodanu površinu: $4x + 20 + 10x = 90$. Dobijemo da je $14x = 70$, pa je $x = 5$.



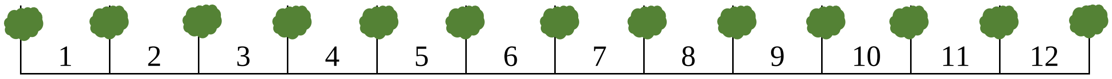
Dakle, stranice pravokutnika su 5 cm i 10 cm, pa je njihova razlika 5 cm.

7.1. Uz puteljak dug 123 metra na jednakim razmacima posađeno je 13 grmova ruža. Kolika je udaljenost (zaokružena na dvije decimale) dva susjedna grma?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
9.45 m	10 m	9.46 m	10.25 m	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Skicirajmo puteljak s grmovima:



Ukoliko na puteljku ima 13 grmova, tada je 12 razmaka! To je zato jer su na oba ruba puteljka posađeni grmovi.

PAZI: uvijek je razmaka za jedan manje nego ravnomjerno preraspodijeljeni predmeta.

Duljinu puteljka dijelimo s 12 i dobivamo da je udaljenost dva susjedna grma 123 : 12 = 10.25.

7.4. Koliko parova (x, y) cijelih brojeva x i y zadovoljavaju jednakost $\frac{6}{x} = \frac{y}{4}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
4	8	16	Ništa od navedenog	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Jednakost možemo zapisati kao $x \cdot y = 24$. Kako su x i y cijeli brojevi, oni su djelitelji broja 24. Napisat ćemo sve mogućnosti:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

PAZI: moramo paziti iz kojeg skupa su tražene nepoznanice!

Napisali smo sva rješenja u skupu prirodnih brojeva, ali ne smijemo zaboraviti da su x i y cijeli brojevi, pa imamo još 8 rješenja:

x	–1	–2	–3	–4	–6	–8	–12	–24
y	–24	–12	–8	–6	–4	–3	–2	–1

Ukupan broj rješenja je 16.

7.6. Koji broj treba dodati i brojniku i nazivniku razlomka $\frac{1}{5}$ da bismo dobili broj $\frac{5}{11}$?

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{7}{3}$	5	7	Ništa od navedenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Označimo traženi broj s x. Broj x dodajemo brojniku (broju 1) i nazivniku (broju 5):

$$\frac{1+x}{5+x}=\frac{5}{11} \quad \Rightarrow \quad 11(1+x)=5(5+x) \quad \Rightarrow \quad 11+11x=25+5x \quad \Rightarrow \quad 6x=14 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{7}{3}$$

7.11. S koliko nula završava umnožak prvih 100 prirodnih brojeva?

A.	B.	C.	D.	E.
10	20	24	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Promatramo umnožak: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 100$.

Primijetimo da broj završava s onoliko nula koliko ima faktora 10 u svom rastavu. S obzirom da je 10 = 5 · 2, broj faktora 10 u promatranom umnošku jednak je broju petica u tom umnošku (faktora 2 imamo dovoljno). Napisat ćemo sve prirodne brojeve koji u svom rastavu imaju faktor 5. To su:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, … 95, 100.

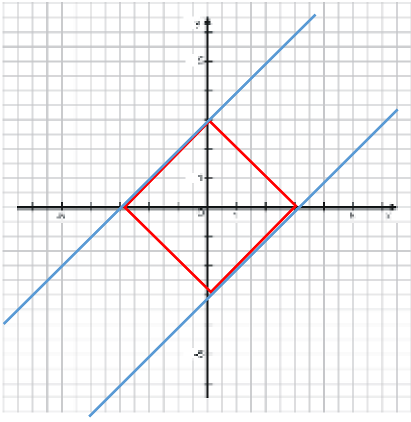
Takvih brojeva je 20. Ali, među napisanim brojevima neki imaju dva faktora 5 u svom rastavu. To su 25, 50, 75 i 100. Stoga je ukupan broj petica u rastavu promatranog umnoška jednak 20 + 4 = 24, pa on završava s 24 nule.

8.11. Izračunaj površinu kvadrata čije stranice pripadaju pravcima $y = x + 3$ i $y = x - 3$.

A.	B.	C.	D.	E.
9	36	18	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Nacrtajmo pravce u koordinatnom sustavu i uočimo jedan od kvadrata čije stranice pripadaju pravcima:



Koordinatne osi dijele kvadrat na četiri pravokutna jednakokračna trokuta duljine kateta 3, pa je površina kvadrata:

$$P = 4 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 18.$$

Na koliko različitih načina možemo ispuniti ploču 3 x 3 prirodnim brojevima tako da zbroj svaka tri retka i stupca bude 5?

A.	B.	C.	D.	E.
Manje od 10	21	12	Ništa od navedenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj 5 moramo prikazati kao zbroj tri prirodna broja. To je moguće napraviti na dva načina:

5 = 1 + 1 +3 ili 5 = 2 + 2 + 1.

1	1	3
1	3	1
3	1	1

ili

2	2	1
2	1	2
1	2	2

Svakoj tablici možemo ispremještati redove na 6 načina, pa je to ukupno 12 tablica. Npr.

1	1	3
1	3	1
3	1	1

1	1	3
3	1	1
1	3	1

1	3	1
1	1	3
3	1	1

1	3	1
3	1	1
1	1	3

3	1	1
1	1	3
1	3	1

3	1	1
1	3	1
1	1	3

Ali, te dvije mogućnosti zbroja 5 možemo kombinirati u jednoj tablici:

1	1	3
2	2	1
2	2	1

ili

1	3	1
2	1	2
2	1	2

ili

3	1	1
1	2	2
1	2	2

Svakoj od te tri tablice još možemo ispremještati redove na 3 načina, pa je to 9 takvih tablica.

Stoga je odgovor na pitanje u zadatku 12 + 9 = 21.