Luckova ljetna škola matematike u Lucijanki 30. 8. - 4. 9. 2020.

Autori predavanja bivši su učenici:
Leon Jurić (PMF)
Luka Milačić (PMF)

te učenici:
Jakov Ljubičič (4.G)
Lovre Mahečić (3.G)
Matej Vojvodić (3.G)

pod mentorstvom prof. Maje Zelčić!
Također veliko hvala Tomislavu Novaku (PMF) i prof. Ljiljani Centrih-Lovrić na lekturi!

Sadržaj:

30. 8. 2020. - Ponedjeljak

Faktorizacija i uvod u teleskopiranje
Leon Jurić

Osnovne faktorizacije

Ovdje je pregledno dano nekoliko najčešćih faktorizacija:
$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ - razlika kvadrata
$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$ - kvadrat binoma.
$x^n - y^n = (x-y)(x^{(n-1)} + x^{(n-2)}y + ... + y^{(n-1)})$ - razlika n-tih potencija.
$x^{(2n+1)} - y^{(2n+1) = (x-y)(x^{2n} - x^{(2n-1)}y + x^{(2n-2)}y^2 - ... - xy^{(2n-2)})}$ + zbroj neparnih potencija
$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)$ - kub binoma.

Također nam je važna faktorizacija polinoma drugog stupnja. Neka je zadana neka općenita jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$. Tada možemo jednadžbu raspisati kao $(x+n)(x+m)$ gdje su n i m neki brojevi koji zadovoljavaju $n + m = a$, $nm = b$.

Primjer 1: Faktoriziraj $x^2 - 7x + 10$.

Rješenje: Vjerojatno je najbolji pristup faktorizirati 10. Vidjet ćemo da ima faktore 2 i 5 koji zbrojeni daju 7, ali mi želimo da je zbroj faktora -7. Zato ćemo im samo okrenuti predznak, tj. $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.

Važni su nam i polinomi! Polinom je funkcija oblika:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Pri čemu vrijedi $n \in N_0$, a ako je $n > 0$, tada $a_n \neq 0$. n zovemo i stupnjem polinoma. Svaki polinom možemo zapisati preko njegovih nultočki,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

gdje se neke mogu pojavljivati i više puta, a neke mogu biti kompleksne. Također vrijedi da je x_0 nultočka polinoma ako i samo ako je $(x - x_0)$ faktor polinoma. Polinom n tog stupnja ima točno n nultočki! Zato vrijedi da su dva polinoma jednaka ako se poklapaju u barem n točaka.

Primjer 2: Faktoriziraj $x^3 - 7x + 6$.

Rješenje: Najprije možemo pogoditi da je $x = 1$ nultočka polinoma jer je $1 - 7 + 6 = 0$. Tada nam ostaje $(x-1)(x^2 + x - 6)$. Sada drugu zagradu možemo riješiti trikom navedenim gore: $(x-1)(x+3)(x-2) = x^3 - 7x + 6$.

Polinomi P i Q jednaki su ako i samo ako su istog stupnja i imaju sve koeficijente jednake, tj.

$$P = Q \Leftrightarrow P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_0, \;\; Q(y) = b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} ... + b_0$$

$$\text{t.d. } a_i = b_i \; \forall \, i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Ovu činjenicu koristit ćemo kasnije pri raspisu zagrada kod teleskopiranja.

Zadatci - faktorizacija

Zadatak 1. Faktoriziraj: $x^2 + 2x - 24$.

Rješenje: $(x+6)(x-4)$

Zadatak 2. Faktoriziraj: $4x^2 - 16x - 84$.

Rješenje: $4(x+3)(x-7)$

Zadatak 3. Faktoriziraj: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Rješenje: $(x+1)(x+2)(x+3)$

Zadatak 4. Dokaži da za $x, y \in R$ vrijedi: $4x^4 + 3y^2 - 12y - 8x^2 + 20 \geq 4$.

Rješenje: Grupirajmo gore napisani zadatak: $4(x^2-1)^2 + 3(y-2)^2 + 4 \geq 4$. Ovo očito vrijedi jer su svi kvadrati ≥ 0.

Zadatak 5. Nađi najmanju moguću vrijednost izraza $4x^2 + 12y + 4y^2 + 38 - 24x$.

Rješenje: Gornji izraz je moguće grupirati u $(4x^2 - 24x + 36) + (4y^2 + 12y + 9) - 7$, pa faktorizirati u $4(x-3)^2 + (2y+3)^2 - 7$. Kako su kvadrati ≥ 0, najmanja vrijednost izraza je -7, a postiže se za $x = 3, y = -1.5$.

Zadatak 6. Faktoriziraj: $x^4 + x^2 + 1$.

Rješenje: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$

Zadatak 7. Faktoriziraj: $x^4 + 4y^4$. (Sophie Germain faktorizacija)

Rješenje: Dopunimo do kvadrata: $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

Zadatak 8. Faktoriziraj: $7x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

Rješenje: $7x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - x^3 = (2x+1)^3 - x^3 =$
$= (x+1)((2x+1)^2 + x(2x+1) + x^2)$.

Zadatak 9. Nađi sve $n \in N$ za koje je $n^4 + 4^n$ prost broj. (1978 Kurschak Competition)

Hint: Prisjeti se Sophie Germain faktorizacije!

Rješenje: Ako je n paran, tada možemo sa sigurnošću tvrditi da su oba pribrojnika parna pa zato i zbroj mora biti paran. Tada sigurno nismo dobili prost broj.

Ako je $n > 1$ i neparan, možemo ga zapisati kao $2k+1$, a kada uvrstimo dobijemo $(2k+1)^4 + 4^{(2k+1)} = (2k+1)^4 + 4 \cdot 4^{2k} = (2k+1)^4 + 4 \cdot 2^{4k} = (2k+1)^4 + 4 \cdot (2^k)^4$. Primijenimo Sophie Germain faktorizaciju: oba faktora su > 1. Ali prost broj ne smije imati faktore!

Preostaje riješiti trivijalan slučaj $n = 1$ kada je vrijednost izraza 5, što je uistinu prost broj! Stoga je $n = 1$ jedino rješenje!

Uvod u teleskopiranje

Glavna je ideja teleskopiranja prikazati razlomak s više faktora u nazivniku, kao više razlomaka koji imaju u nazivniku samo po jedan od tih faktora! (ovu činjenicu nećemo nepotrebno dokazivati već uzeti kao danu)

Npr. Ako nazivnik ima dva faktora a, b, tada je moguće zapisati $\frac{1}{ab} = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}$, gdje su A, B neki koeficijenti koje možemo izračunati iz zadatka. Najčešće su ovi koeficijenti simetrični pa dolazi do velikih poništavanja, i najčešće ostanemo sa samo nekoliko razlomaka koje možemo ručno zbrojiti!

Primjer 3:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100} = ?$$

Rješenje: Najprije možemo pogoditi faktorizaciju

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Sada, kada primjenimo ovu faktorizaciju na gore zadanu sumu dobivamo

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Pokratit će se svi razlomci s nazivnicima između 2 i 99, a konačno rješenje je $\frac{1}{1} - \frac{1}{100} = 0.99$

Ako bismo umjesto pogađanja faktorizacije pokušali naći koeficijente, možemo ih naći iz dviju sigurnih točaka (opet se pozivamo na činjenicu da je naša faktorizacija polinom drugog stupnja, pa je dovoljno da se polinomi poklapaju u dvije točke).

Rješenje 2:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{A}{1} + \frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} \quad /(\cdot 2)$$

Izjednačimo po A:

$$\frac{1}{2} - \frac{B}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2B}{3}$$

Iz jednadžbe slijedi $B = -1$, a ponovnim vraćanjem u neku od početnih jednadžbi dobivamo $A = 1$. Nakon što smo dobili koeficijente, zadatak nastavljamo kao i da smo ih pogodili!

Zadatci - teleskopiranje

Zadatak 10.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} ... + \frac{1}{9700} = ?$$

Rješenje: Najprije primjetimo da je opći član $\frac{1}{k \cdot (k+3)}$. Njega možemo raspisati kao $\frac{1}{3}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3})$, što odmah rješava naš zadatak: odgovor je $\frac{1}{3} - \frac{1}{300} = 0.33$

Zadatak 11. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{n(n+x)} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

Rješenje: Najlakše je dokaz izvesti direktnom provjerom:

$$\frac{1}{x}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}) = \frac{1}{x}(\frac{(n+x)-n}{n(n+x)}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{n(n+x)} = \frac{1}{n(n+x)}$$

Zadatak 12.

$$\sum_{n=1}^{2020} \frac{1}{n^2+3n+2} = ?$$

Rješenje: $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$. Sada je zadatak sličan primjeru. Rješenje je $\frac{505}{1011}$.

Zadatak 13.

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} + ... + \frac{1}{2018\cdot 2019\cdot 2020} = ?$$

Rješenje: Iz triju točaka gradimo sustav s tri nepoznanice. Sustav glasi:

$$\frac{1}{6} = \frac{A}{1} + \frac{B}{2} + \frac{C}{3}$$
$$\frac{1}{24} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4}$$
$$\frac{1}{60} = \frac{A}{3} + \frac{B}{4} + \frac{C}{5}$$

.
Rješavanjem sustava dobivamo $A = 0.5, B = -1, C = 0.5$. Pokratit će se svi brojevi koji u nazivniku imaju broj između 3 i 2018. Preostaju nam razlomci:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2020}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2039189}{8156760}$$

Zadatak 14.

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{24\sqrt{25}+25\sqrt{24}}$$

Hint: Kako je trenutni član neuredan, najprije ćemo racionalizirati

.

Rješenje:

$$\frac{1}{(a+1)\sqrt{a}+a\sqrt{a+1}} \times \frac{(a+1)\sqrt{a}-a\sqrt{a+1}}{(a+1)\sqrt{a}-a\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\sqrt{a}-a\sqrt{a+1}}{a(a+1)} = \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{\sqrt{a+1}}{a+1}$$

. Kada raspišemo sve, pokratit će se sve osim prvog i zadnjeg, pa ostajemo s $\frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{25}}{25} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Zaključivanje u teoriji brojeva
Matej Vojvodić

Teorijski uvod

U svakom od sljedećih zadataka, ako nije drukčije navedeno, možete pretpostaviti da su a, b, c, d i n prirodni brojevi (iako bi se gotovo sve ove izjave mogle izvesti i za cijele broje, različite od nule), dok su p i q strogo prosti brojevi.

Oznaka $lcm(a, b)$ oznaka je za najmanji zajednički višekratnik (lowest common multiple), dok je $gcd(a, b)$ oznaka za najveći zajednički djelitelj (greatest common divisor). Također, oznaka $a \mid b$ označava da a dijeli b, tj. $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$. Npr. $5 \mid 10$ i $37 \mid 111$, ali $3 \nmid 5$ i $111 \nmid 37$.

Imajte na umu logiku sudova!

Ponekad zbog specifičnosti hrvatskog jezika dolazi do zabune (najčešće se *"ili"* smatra *"isključivim ili"*, tj. zabuna je da mora vrijediti točno jedna izjava, no zapravo je moguće da vrijede obje, i rečenica je još uvijek istinita). Npr. "*Nebo je plavo ili je Zemlja kugla*" istinita je rečenica.
Zato pažljivo pratite ovdje izrečenu logiku sudova.

Rečenice poput "a **i** b" zovu se konjunkcija. Na njih odgovaramo s DA ili istina samo ako su obje rečenice (a i b) istina.

Rečenice poput "a **ili** b" zovu se disjunkcija. Na njih odgovaramo s DA ili istina samo ako je barem jedna od rečenica (a i b) istina, ali moguće je i da su obje istina!

Rečenice poput "**ako** a **onda** b" zovemo implikacija. **Gotovo su sve dolje navedene tvrdnje implikacije!** Na njih odgovaramo sa DA ili istina ako je i a točno i b točno ili ako je a netočno. Zato imajte na umu da je npr. "*Ako je nebo zeleno, onda je Zemlja ravna*" istinita rečenica (jer je rečenica a laž).

Jedan od načina da dokažete implikaciju zove se obrat po kontrapoziciji. Formalno, on glasi da je logički sud "**ako vrijedi** a**, onda vrijedi** b" jednako logičkom sudu "**ako ne vrijedi** b**, onda ne vrijedi** a". (Njime možemo dokazati i drugi zadatak) Npr. obrat bi gore navedene rečenice glasio: *"Ako Zemlja nije ravna, onda nebo nije zeleno"* što je još uvijek istinita rečenica.

Još je jedna vrlo korisna činjenica osnovni teorem aritmetike: svaki prirodni broj se može (jedinstveno) rastaviti na proste faktore:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ...$$

Ova činjenica bit će vam korisna u težim zadatcima kada je lakše promatrati sve proste brojeve koji dijele neki broj odvojeno nego promatrati taj broj kakav je.

Na sve dolje navedene tvrdnje trebate odgovoriti s DA ili NE. Ukoliko su istinite za **sve moguće izbore brojeva**, trebate odgovoriti s DA i dati dokaz. Inače, trebate odgovoriti s NE i dati neki kontraprimjer (svi kontraprimjeri razumno su mali).

Zadatci

Lagani

Zadatak 1. Ako $a \mid b$, onda $b \mid a$.

DA \ NE

Rješenje: NE! $5 \mid 10$, ali $10 \nmid 5$.

Zadatak 2. Ako $p \mid n$, onda $p = n$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Možemo uzeti primjer $p = 5$, $n = 10$ u kojem vrijedi $5 \mid 10$, ali ne vrijedi $5 = 10$.

Zadatak 3. Ako $p \mid q$, onda $p = q$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Po definiciji, svaki prosti broj q ima samo dva djelitelja: 1 i q, a kako je p prost, ne može biti 1. Zato p mora biti q.

Zadatak 4. Ako $a \mid b$ i $b \mid a$, onda $a = b$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Pretpostavimo suprotno: $a \neq b$. Tada možemo izabrati manji i veći broj, a znamo sigurno da veći broj nije djelitelj manjeg. Koristimo obrat po kontrapoziciji: pretpostavili smo da je b laž, i dobili smo da je i a laž. Zato gore navedena izjava vrijedi.

Zadatak 5. Ako $a \mid b$ i $a \mid c$, onda $a \mid b + c$.

DA \ NE

Rješenje: DA! $b = ak_1$ i $c = ak_2 \implies b + c = ak_1 + ak_2 = \underline{a}(k_1 + k_2)$.

Zadatak 6. Ako $a \mid c$ i $b \mid c$, onda $a + b \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Primjer je $a = 5$, $b = 2$ i $c = 10$, kada su prve dvije izjave istina, ali zadnja je laž. ($5 \mid 10$ i $2 \mid 10$, ali $7 \nmid 10$)

Zadatak 7. Ako $a \mid c$ i $b \mid c$, onda $ab \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Primjer je $a = 5$, $b = 5$ i $c = 10$, kada su prve dvije izjave istina, ali zadnja je laž. ($5|10$ i $5|10$, ali $25 \nmid 10$)

Zadatak 8. Ako $a \mid b$ i $a \mid c$, onda $a \mid bc$.

DA \ NE

Rješenje: DA! $b = ak_1$, $c = ak_2 \Rightarrow bc = (ak_1)(ak_2) = \underline{a}(ak_1k_2)$.

Zadatak 9. Ako $a \mid b$ i $b \mid c$, onda $a \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: DA! $b = ak_1$, $c = bk_2 \implies c = (ak_1)k_2 = \underline{a}(k_1k_2)$.

Zadatak 10. Ako $a \mid c$ i $b \mid c$, onda $a \mid b$ ili $b \mid a$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Primjer je $a = 2$, $b = 5$ i $c = 10$, kada su prve dvije izjave istina, ali obje zadnje su laž. ($2 \mid 10$ i $5 \mid 10$ ali $2 \nmid 5$ i $5 \nmid 2$)

Zadatak 11. Ako $a \mid b$ i $c \mid d$, onda $a + c \mid b + d$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Primjer je $a = 2$, $b = 6$, $c = 7$ i $c = 14$, kada su prve dvije izjave istina, ali zadnja je laž. ($2 \mid 6$ i $7 \mid 14$ ali $9 \nmid 20$).

Zadatak 12. Ako $a \mid b$ i $c \mid d$, onda $ac \mid bd$.

DA \ NE

Rješenje: DA! $b = ak_1$, $d = ck_2 \implies bd = (ak_1)(ck_2) = \underline{ac}(k_1k_2)$.

Zadatak 13. Ako $a \mid b + c$, onda $a \mid b$ ili $a \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Primjer je $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, kada je prva izjava istina, ali obje zadnje su laž. ($2 \mid 8$, ali $2 \nmid 3$ ni $2 \nmid 5$).

Zadatak 14. Ako $a \mid bc$, onda $a \mid b$ ili $a \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Primjer je $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$, kada je prva izjava istina, ali obje zadnje su laž. ($6 \mid 72$, ali $6 \nmid 8$ ni $6 \nmid 9$).

Zadatak 15. Ako $ab = cd$ i a i b su neparni, onda su i c i d neparni..

DA \ NE

Rješenje: DA! Pretpostavimo da je barem jedan od c i d paran. Zato je i njihov umnožak paran, ali znamo da je umnožak lijeve strane neparan. (Dolazimo do kontradikcije pa smo dokazali uz pomoć obrata po kontrapoziciji)

Zadatak 16. Ako $ab = cd$ i a i b su parni, onda su i c i d parni.

DA \ NE

Rješenje: NE! $2 \times 2 = 1 \times 4$. a i b su oboje parni, no c i d nisu.

Umjereni

Zadatak 17. Ako $a \mid bc$ i $gcd(b,c) = 1$, onda $a \mid b$ ili $a \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Uzmimo primjer $a = 10$, $b = 25$ i $c = 16$. Vrijedi $10 \mid 400$, ali $10 \nmid 25$ ni $10 \nmid 16$.

Zadatak 18. Ako $gcd(a,b) \mid c$, onda $a \mid c$ ili $b \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Uzmimo na primjer $a = 7$, $b = 8$ i $c = 9$. $gcd(7,8) = 1$ pa zaista vrijedi $1 \mid 9$, no $7 \nmid 9$ i $8 \nmid 9$.

Zadatak 19. Ako $a \mid c$ i $b \mid c$, onda $gcd(a,b) \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Uvedimo oznaku $d = gcd(a,b)$. Znamo $a \mid c$ i $d \mid a$, pa zato očito vrijedi $d \mid c$. (zadatak smo dokazali i ranije) Dokaz smo mogli dobiti i preko $b \mid c$ i $d \mid b \Rightarrow d \mid c$.

Zadatak 20. Ako $lcm(a,b) \mid c$, onda $a \mid c$ i $b \mid c$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Uvedimo oznaku $d = lcm(a,b)$. Znamo $a \mid d$ i $d \mid c$, pa zato očito vrijedi $a \mid c$. (zadatak smo dokazali i ranije) Analogno dobivamo $b \mid c$.

Zadatak 21. Ako $b \mid pa$, onda $p \mid b$ ili $b \mid a$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Ako vrijedi $b \mid a$, gotovi smo. Zato pretpostavimo $b \nmid a$, onda b sadrži barem neki djelitelj koji nije sadržan u a. Ali kako znamo da $b \mid pa$, tada je taj djelitelj upravo p pa zato vrijedi druga tvrdnja: $p \mid b$.

Zadatak 22. Odredi vrijedi li $ab = gcd(a,b) \times lcm(a,b)$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Možemo raspisati $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ...$ i $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ...$ gdje su p svi prosti brojevi koji dijele a ili b, a α i β broj su njihovog pojavljivanja u faktorizaciji (gdje dopuštamo da su nule ukoliko ga nemaju u faktorizaciji). Sada vrijedi $gcd(a,b) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{min(\alpha_2,\beta_2)} ...$ i $lcm(a,b) = p_1^{max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{max(\alpha_2,\beta_2)} ...$. Sada je lako pokazati da si strane odgovaraju. Možemo uzeti bilo koji p_i i vrijedi da je $ab = p_i^{\alpha_i + \beta_i} \times ...$, i vrijedi da je $lcm(a,b) \times gcd(a,b) = p_i^{max(\alpha_i,\beta_i) + min(\alpha_i,\beta_i)} \times ...$. Činjenicu $max(\alpha_i, \beta_i) + min(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i + \beta_i$ je trivijalno pokazati. Sada znamo da obje strane svaki prosti broj dijeli jednaki broj puta, a kako svaka strana ima konačno mnogo prostih djelitelja, možemo zaključiti da su strane jednake.

Teški

Zadatak 23. Ako $p \mid a^n$, onda $p \mid a$ i $p^n \mid a^n$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Garantirano je da se a može zapisati kao umnožak nekih prostih brojeva (na neke potencije) kao $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ...$ Sada lako možemo pokazati da vrijedi $a^n = p_1^{\alpha_1 n} p_2^{\alpha_2 n} ....$ Kako znamo da p dijeli taj broj, BSOMP $p = p_1 \Rightarrow \alpha_1 \times n \geq 1$. No, kako oba broja moraju biti nenegativna, lako je pokazati da su oba prirodna. Zato $\alpha_1 \geq 1$, tj. $p \mid a$.
Iz $p \mid a$ lako možemo dobiti $a = pk \Rightarrow a^n = \underline{p^n} k^n$.

Zadatak 24. Ako $a^n \mid b^n$, onda $a \mid b$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Promatrat ćemo svaki prosti broj p koji dijeli a^n ili b^n. Znamo da je $a^n = p^{xn} \times ...$ i $b^n = p^{yn} \times ...$ (ovako možemo raspisati zbog prethodnog zadatka), pri čemu je $x \leq y$ (što vrijedi iz pretpostavke zadatka da $a^n \mid b^n$). Sada je lako pokazati da vrijedi $a = p^x \times ...$, $b = p^y \times ....$ Ovo možemo sada napraviti za svaki prosti broj koji dijeli a, a kako svaki cijeli broj ima konačno mnogo prostih djelitelja, možemo tvrditi da $a|b$.
Ukratko: Ponavljamo zaključak prethodnog zadatka za sve proste djelitelje a.

Zadatak 25. Ako je $ab = cd$ i $a < b$ i $c < d$, onda $a = c$ i $b = d$.

DA \ NE

Rješenje: NE! Uzmimo primjer $a = 8$, $b = 9$, $c = 6$ i $d = 12$.

Zadatak 26. Ako $ab = cd$ i $gcd(a, d) = 1$ i $gcd(b, c) = 1$, onda $a = c$ i $b = d$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Promatrajmo jednadžbu modulo a. Vrijedi $0 \equiv cd \pmod a \Rightarrow 0 \equiv c \pmod a$ (smijemo dijeliti s d zbog $gcd(a, d) = 1$). Slično dobivamo $a \equiv 0 \pmod c$. Sada dobivamo jedan zadatak s početka: $a \mid c$ i $c \mid a \Rightarrow a = c$. Slično možemo zaključiti $b = d$ ukoliko jednadžbe promatramo modulo b i d.

Zadatak 27. Ako $b \mid a$ i $c \mid a$, onda $lcm(b, c) \mid a$.

DA \ NE

Rješenje: DA! Zbog prve dvije izjave znamo da je a neki zajednički višekratnik brojeva b i c. Sada je potrebno pokazati da je on djeljiv s $lcm(b, c)$ što nije toliko očito koliko bi čovjek pomislio... Dokaz ćemo izvesti uz pomoć obrata po kontrapoziciji.

Pretpostavimo suprotno, da a nije djeljiv s $lcm(b, c)$, tj. da ostaje neki ostatak y prilikom dijeljenja. Vrijedi $a = x \times lcm(b, c) + y$ gdje je y neki prirodan broj između 1 i $lcm(b, c) - 1$. Dalje jednadžbu možemo razmjestiti kao $y = a - x \times lcm(b, c)$. Kako je desna strana sigurna djeljiva s b (jer je i a djeljiv s b i jer je $lcm(b, c)$ po definiciji djeljiv s b), onda i y mora biti djeljiv s b.

Slično zaključujemo da y mora biti djeljiv i s c. No dolazimo do kontradikcije jer je $y < lcm(b, c)$. Zato smo uspješno dokazali da svaki zajednički višekratnik dva broja mora biti djeljiv s najmanjim zajedničkim višekratnikom ta dva broja, što je dovoljno da se pokaže ono zadano u zadatku.

2. 9. 2020. - Srijeda

Tetivni četverokut i angle chasing
Jakov Ljubičić

Motivacija

Kao iskusan natjecatelj skupio sam već mnogo različitih "trikova" i navika koje smatram da bi svi početnici trebali poznavati. Ovdje se nalazi kratki pregled navika i fraza koje bi trebali slijediti u svakom geometrijskom zadatku kako bi ga što brže riješili, ali i što brže i ljepše zapisali rješenje.

1. **Uzmite vremena!** – Kada rješavate radije pokušajte riješiti zadatak koliko god trajalo nego odustati nakon 15 minuta i pogledati rješenje.

2. **Upoznajte standardne ideje i teoreme!** - Ako znate rješenje zadatka ili općenito znate za postojanje nekog teorema, znatno je lakše ubrzati proces rješavanja sličnog zadatka na natjecanju nego riješiti zadatak koji nikada niste u potpunosti riješili samostalno.

3. **Nemojte preskakati zadatke koji vam ne odgovaraju!**- Na natjecanju često nemate širok odabir zadataka i privilegiju da birate što želite riješiti, pa se trebate naučiti rješavati što god se pojavi pred vama.

4. **Nacrtaj dobru skicu!** - Ako ne uspijete riješiti zadatak u 5 minuta, nacrtajte preciznu skicu. Jedan je od najboljih izvora za učenje crtatanja dobre i uredne skice:
`https://web.evanchen.cc/handouts/Constructions/Constructions.pdf`

5. **Nemojte zaboraviti na jednostavnije tehnike!** - U zadatcima se i dalje mogu pojaviti sličnosti, sukladnost, Pitagora, metoda izjednačavanja površine... Nemojte zaboraviti na njih. Kada naučite još teže stvari, nemojte zaboraviti na angle chasing.

6. **Rješavanje unatraške** - Ponekad je teško vidjeti kako su povezani zadani uvjeti i ono što treba dokazati, pa je ponekad korisno gledati što još mora vrijediti ako vrijedi tvrdnja zadatka. Ponekad je lakše doći iz rješenja u početne uvjete, ali pazite da koristite ekvivalencije!

7. **Analogno** - Ako trebate pokazati istu stvar više puta ne morate svaki put pisati isti dokaz. Samo dokažete prvi put, a za drugi napišete analogno to što želite dokazati. *Pazite da se činjenica za koju tvrdite da se dokazuje analogno stvarno može dokazati na sličan način, inače bi mogli bespotrebno gubiti bodove!*

8. **Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti (BSOMP)** - Iako ovu kraticu nećete često naći u geometriji, zgodno je pretpostaviti nešto što nam omogućava da dođemo do kontradikcije ili općenito olakšava rješavanje. *Pazite da stvarno smijete pretpostaviti to što želite pretpostaviti, i da ne zanemarujete slučajeve u kojima ne vrijedi to što pretpostavljate!*

Česte ideje

Iako je cilj ovog predavanja da vas nauči gledati kutove, treba razmišljati i o ostalim čestim idejama.

1. **Fantomiranje** – Umjesto dokazivanja da se tri pravca sijeku u jednoj točki možete definirati sjecište prva dva i dokazati da ono leži na trećem što je znatno lakše.

2. **Proxy točke** - Umjesto direktnog dokazivanja da A, B, C leže na pravcu često trebamo naći točku X t.d. A, B, X i B, X, C leže na pravcu i slične varijante su također moguće. Dakle ako u zadatku trebate dokazati da nešto leži na pravcu ili kružnici, nacrtajte taj pravac ili kružnicu i možda pronađete neku proxy točku.

3. **Polovišta** - Polovišta su vrlo nezgodna za interpretiranje kutovima pa se ona često rješavaju tako da reflektiramo točke oko njih ili ekvivalentno crtamo paralelograme pri čemu je dužina s polovištem jedna od dijagonala.

4. **Jednake dužine** - Iako bi $|AX| = |AY|$ mogli interpretirati kutovima, često možemo dobiti korisne točke ako nacrtamo kružnicu sa središtem A radijusa $|AX|$.

Uvod u angle chasing

Angle chasing može se suziti na dvije vrlo jednostavne ideje koje trebate imati uvijek na umu kada pokušavate riješiti bilo koju geometriju gledajući kutove. Prvi teorem je o odnosu kutova na kružnici, a drugi nam dopušta da gledajući četverokute "docrtamo" kružnicu na skicu (tj. opišemo kružnicu četverokutu).

Teorem 1. (Poučak o središnjem i obodnom kutu) - Zadan je trokut ABC, kojem je središte opisane kružnice O. Vrijedi $2 \times \angle ABC = \angle AOC$.

Iz ovog teorema je važno da upamtite dvije stvari: središnji kut je dvostruko veći nego obodni kut nad bilo kojom tetivom, i svaki kut nad istom tetivom je jednak. Iz ovoga možemo pokazati i da kada imamo neku kružnicu k i tetive AB i CD vrijedi $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ako i samo ako su obodni kutovi nad AB i CD jednaki.

Teorem 2. (Tetivni četverokuti) Četverokutu $ABCD$ može se opisati kružnica (takve četverokute zovemo i tetivnim) ako i samo ako $\angle ACB = \angle ADB$ ili $\angle ABC = 180 - \angle ADC$ (i ciklične varijante).

Iz ovog je teorema važno da upamtite što trebate "tražiti" da bi pokazali da je četverokut tetivan. Uvjet $\angle ACB = \angle ADB$ zapravo znači da možemo izabrati tetivu AB (i tada su C i D su s iste strane tetive), i točke C i D leže na kružnici (jer su svi obodni kutovi s iste strane tetive međusobno jednaki). Uvjet $\angle ABC = 180 - \angle ADC$ zapravo znači da možemo izabrati tetivu AC (i tada su točke B i D s različitih strana), i točke B i D leže na kružnici (jer se obodni kutovi sa suprotnih strana tetive nadopunjavaju do 180^o).

Zadatci

Lagani

Zadatak 1. Zadan je četverokut $ABCD$. Povučen je bilo koji pravac p paralelan s CD i po potrebi su dužine AD i BC produže tako da se sijeku s pravcem p. Neka su E i F sjecišta pravca p s BC i AD. Dokaži da je četverokut $ABEF$ tetivan ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan. (Reimov teorem)

Zadatak 2. Zadan je četverokut $XYZW$ takav da mu se dijagonale sijeku pod pravim kutom. Poznati su kutovi $\angle WZX = 30^o$, $\angle XWY = 40^o$ i $\angle WYZ = 50^o$.
a) Koliko iznosi kut $\angle WZY$?
b) Koliko iznosi kut $\angle WXY$?

Zadatak 3. Zadan je trokut ABC, ortocentar H i nožišta D, E, F na BC, CA, AB redom.
a) Dokaži da su četverokuti $AEHF$, $BDHF$ i $CDHE$ tetivni.
b) Dokaži da su četverokuti $AEDB$, $BFEC$ i $CDFA$ tetivni.

Zadatak 4. Zadan je trokut ABC i neka je p pravac kroz A koji je ujedno i tangenta na kružnicu opisanu ABC. Dokaži da kut između t i AB jednak $\angle ACB$. (Kut između tetive i tangente)

Zadatak 5. Neka je D nožište visine iz vrha A trokuta ABC te neka su E i F nožišta iz D na stranice AC odnosno AB. Dokaži da je četverokut $BCEF$ tetivan. (MNM - Tetivni četverokuti)

Zadatak 6. Zadan je trokut ABC čiji je ortocentar H. Pravci AH, BH, CH redom sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC u D, E, F. Dokaži da je H središte upisane kružnice trokuta DEF.

Zadatak 7. Dokaži da se za svaki trokut ABC za koji vrijedi $|AB| \neq |AC|$ simetrala kuta $\angle BAC$ i simetrala $\overline{BC}$ sijeku na opisanoj kružnici ABC.

Zadatak 8. Zadan je trokut ABC i D, E, F na BC, CA, AB redom. Dokaži da se opisane kružnice trokuta AEF, BDF, CDE sijeku u jednoj točki. (Miquelova točka)

Umjereni

Zadatak 9. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a D polovište luka BC opisane kružnice trokuta ABC koji ne sadrži A. Dokaži da je D središte opisane kružnice trokuta BIC. Također dokaži da središte A-pripisane kružnice leži na opisanoj kružnici BIC.
(Lema o trozubcu)

Zadatak 10. Zadan je trokut ABC čiji je ortocentar H. (Refleksije ortocentra)
a) Dokaži da točka osno-simetrična točki H preko stranice BC leži na opisanoj kružnici ABC.
b) Dokaži da točka centralno-simetrična H preko polovišta BC leži na opisanoj kružnici ABC.

Zadatak 11. Zadan je trokut ABC čiji je ortocentar H. Dokaži da polovišta stranica AB, BC, CA, nožišta svih visina trokuta ABC i polovišta AH, BH, CH leže na istoj kružnici.
(Feuerbachova kružnica)

Zadatak 12. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut u kojem vrijedi $|DA| < |AB| = |BC| < |CD|$. E i F su redom točke na CD i AB tako da je BE okomito na AC i EF paralelno s BC. Dokaži da $|FB| = |FD|$.

Zadatak 13. Zadan je trokut ABC. Upisana kružnica tom trokutu dira stranice AC, AB u E, F. Neka je X presjek simetrale $\angle ABC$ i EF. (Right angle on incircle chord)

a) Dokaži da je $\angle BXC = 90^o$.

b) Ako su M, N polovišta BC, AC, dokaži da su M, N, X kolinearne.

Zadatak 14. Zadan je trokut ABC i neka točka P na njemu opisanoj kružnici. Dokaži da su nožišta iz P na stranice AB, BC, CA kolinearna. (Simpsonov pravac)

Zadatak 15. Zadan je trokut ABC i redom D, E, F na BC, CA, AB tako da su četverokuti $ABDE$ i $ACDF$ tetivni. Ako je P presjek AD i opisane kružnice ABC, onda je Q simetrična P preko BC. Dokaži da $AEQF$ tetivan. (USA EGMO TST 2020.)

Zadatak 16. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut u kojem je BD promjer njemu opisane kružnice i $|\angle CDA| < |\angle ABC|$. Zadane su Q, R na BC, CD redom. RQ siječe AB, AD u P, S redom, tako da $PQ = RS$. Neka su M, N polovišta BD, QR redom. Dokaži da je $AMNC$ tetivan. (EGMO 2017)

Zadatak 17. Zadan je trokut ABC čiji je ortocentar H i točka P na BC. Neka je p pravac kroz P okomit na BC. Neka su E, F redom sjecišta od visina iz B, C sa p. Ako je X ortocentar trokuta HEF dokaži da su točke A, X i P kolinerane. (autorski)

Teški

Zadatak 18. Zadan je trokut ABC sa središtem upisane kružnice I. Kružnica kroz B tangentna na AI u I siječe AB u P, a kružnica kroz C tangentna na AI u I siječe AC u Q. Dokaži da je PQ tangenta na upisanu kružnicu trokuta ABC. (EGMO 2019)

Zadatak 19. Uzmimo trokut ABC i M na BC. Neka su O_b, O_c središta opisanih kružnica trokuta ABM i ACM redom, i ω kružnica kroz A i M čije se središte nalazi na BC. MO_b, MO_c sijeku ω u K, L redom. Dokaži da se BK i CL sijeku na ω. (BAMO 2020)

Zadatak 20. Zadan je trokut ABC, njegov ortocentar H i pravac kroz ortocentar p. Dokaži da se sve tri refleksije p preko stranica ABC sijeku u jednoj točki, i to na opisanoj kružnici ABC. (Anti - Steiner point)

Zadatak 21. Zadan je jednakokračan ABC s osnovicom BC. Točka D je odabrana na AC i K na kraćem luku CD (luk se nalazi na opisanoj kružnici trokuta BCD). CK siječe pravac paralelan s BC kroz A u točki T. Ako je M polovište DT, onda dokaži da $\angle AKT = \angle CAM$. (ARMO 2019)

Zadatak 22. Zadan je ABC i točka P unutar njega tako da $\angle ABP = \angle PAC$. Ako je Q točka takva da je $BPCQ$ je paralelogram, onda dokaži da $\angle BAP = \angle QAC$.
(Parallelogram isogonality lemma)

Hintovi

1. Što vrijedi za kutove uz presjek usporednih pravaca?

2. a) iskoristi činjenicu da se diagonale sjeku pod pravim kutom da izračunaš sve kutove!
   b) Razmisli zašto je četverokut tetivan.

3. Što ćeš s pravim kutovima ?

4. Uzevši u obzir poznata svojstva tangenti, koju točku ima smisla uvesti u priču?

5. Što je tetivno? Chaseaj sve kutove na slici.

6. Chaseaj. Ako si baš zapeo, riješi zadatke 9. i 10. pa se vrati.

7. Fantomiraj, drugim riječima pokušaj redefinirati presjeke u zadatku tako da je zadatak lakše dokazati. Prisjeti se da su kutovi nad lukovima iste duljine jednaki (i obratno).

8. Ponovo pokušaj fantomirati tako da zadatak bude jednostavnije dokazati.

9. Prvi dio je samo chase. Za drugi dio uoči da je središte pripisane kružnice presjek simetrala vanjskih kutova u B i C.

10. Uoči da je reflektirani trokut sukladan početnom pa samo trebaš naći kut $\angle BHC$.

11. Nećeš dokazivati da svih 9 točaka leži na kružnici odjednom. Fiksiraj 3 točke, uzmi četvrtu i dokaži da je taj četverokut tetivan. Analogno vrijedi da sve točke istog tipa kao četvrta leže na kružnici s prve tri. Odaberi nove 3 točke koje ćeš fiksirati i ponovi postupak dodavajući točke koje nisi koristio.

12. Ovaj zadatak ima više pristupa, ali u svakom trebaš chaseati i možda Reimov teorem pomogne u jednom trenutku.

13. a) Pokušaj naći P, Q (nisu nasumične već skrivene u konfiguraciji) tako da je $QCXP$ tetivan i $\angle QXC = 90^o$.
    b) Nije težak, prisjeti se da je srednjica paralelna s pripadajućom stranicom.

14. Sjeti se zadatka 3. Ako imaš prave kutove, vjerojatno imaš i tetivne četverokute.

15. Nacrtaj dobru skicu. Što se čini kolinearno?

16. Sjeti se da je polovište hipotenuze središte opisane kružnice.

17. Koji su trokuti slični? Pazi, ovaj zadatak nije u potpunosti chase, u jednom ćeš trenutku trebati neke omjere.

18. Što bi I trebao biti trokutu APQ ? Prisjeti se nekoliko lema s predavanja koje si već dokazao, one će ti sigurno pomoći.

19. Ovaj zadatak ima malo više posla nego ostali. Prvo pokušaj shvatiti (sa skice) koja je točka presjek koji se traži u zadatku i nazovi tu točku X.
    Sada ti preostaje dokazati da je B, K, X kolinearno (analogno za drugi pravac). Ali to nije sve, u zadatku još ima chaseanja i skriveni tetivni četverokut.

20. Umjesto dokazivanja kako su pravci konkurentni i to na kružnici, pokušaj iskoristiti višak informacija kako bi mogao pametnije fantomirati.

21. Kako rješavamo random polovišta ?

22. Jedina bolja stvar od jednog paralelograma je nekoliko njih.

Rješenja

Rješenje 1: Kako su p i CD paralelni, onda vrijedi $\angle EFA = \angle CDA$ i $\angle FEB = \angle DCB$. Zato vrijedi $\angle DAB + \angle BCD = \angle FAB + \angle BEF$. Pozivamo se na Teorem 2. i znamo da je četverokut tetivan ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih kutova 180^o. Ako je suma kutova stvarno 180^o, onda su oba četverokuta tetivna, a inače nije ni jedan.

Rješenje 2: a) $\angle XZY = 90^o - \angle ZYW = 40^o \Rightarrow \angle WZY = 30^o + 40^o = 70^o$
b) $\angle XWY = \angle XZY = 40^o \Rightarrow$ XYZW je tetivan $\Rightarrow \angle WXY = 180^o - \angle WZY = 110^o$

*Rješenje 3: a)*kutovi $\angle AEB = \angle AEH$ i $\angle AFC = \angle AFH$ su po definiciji (jer su E i F nožišta) pravi kutovi. Pozivamo se na Teorem 2. (drugi uvjet): zbroj nasuprotnih kutova $\angle AEH$ i $\angle AFH$ je 180^o, pa je $AEHF$ tetivan. Analogno se pokaže i za druga dva četverokuta.

b) kutovi $\angle AEB$ i $\angle ADB$ su po definiciji (jer su E i D nožišta) pravi kutovi. Pozivamo se na Teorem 2. (prvi uvjet): kutovi $\angle AEB$ i $\angle ADB$ su jednaki, pa je $AEDB$ tetivan. Analogno se pokaže i za druga dva četverokuta.

Rješenje 4: Neka je O središte opisane kružnice. Promatramo trokut AOB, koji je jednakokračan zbog $AO = BO$. $\angle AOB = 2\angle ACB$ zbog Teorem 1. Vrijedi $\angle AOB + 2\angle OAB = 180^o \Rightarrow \angle ACB + \angle OAB = 90^o$. Kako znamo da je p tangenta, onda je kut između p i OA pravi, pa iz prethodnog zaključka slijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje 5: Neka je $\angle DBA = \beta$. Promatrajući trokut ADB dobivamo $\angle DAB = 90^o - \beta$. Primijetimo da je četverokut $AEDF$ tetivan, pa je zato $\angle DAB = \angle DAF = \angle FED = 90^o - \beta$. Po konstrukciji, $\angle DEC = 90^o$, pa slijedi $FEC = (90^o - \beta) + 90^o = 180^o - \beta$. Sada znamo da u četverokutu $BCEF$ tetivan jer mu je zbroj nasuprotnih kutova $\angle FEC + \angle CBF = (180^o - \beta) + \beta = 180^o$.

Rješenje 6: Vrijedi $\angle ADF = \angle ACF = 90^o - \alpha$ (jer je trokut koji čine A, C i nožište iz C pravokutan). Analogno se pokaže $\angle ADE = 90^o - \alpha$. Analogno se pokaže i da su ostale visine simetrale preostalih kutova. Sada iz definicije središta upisane kružnice vidimo da je H točka koja leži na svim simetralama kutova trokuta DEF.

Rješenje 7: Najprije pretpostavimo da je S sjecište opisane kružnice ABC i simetrale kuta $\angle BAC$, i želimo pokazati da simetrala BC prolazi kroz S. Da bi S ležala na simetrali, mora biti jednako udaljena od B i C, tj. $\angle SBC = \angle SCB$. To očito vrijedi jer gledamo obodne kutove $\angle BAS = \angle BCS$ i $\angle CAS = \angle CBS$, a kutovi $\angle BAS$ i $\angle CAS$ su jednaki jer je AS simetrala kuta BAC.

Rješenje 8: Rastavimo na tri slučaja: kada je Miquelova točka unutar, na ili izvan trokuta.
1. slučaj: točka unutar trokuta - definirajmo presjek kružica BDF i CDE kao neku točku M. Vrijedi $\angle DMF = 180^o - \beta$ i $\angle DME = 180^o - \gamma$. To znači da je $\angle EMF = 360^o - (\angle DME + \angle DMF) = 180^o - \alpha$, što znači da je i $AEFM$ tetivno, tj. M leži i na kružnici AEF.
2. slučaj: točka na trokutu - BSOMP $M = D$. Definirajmo središta opisanih kružnica BFD i CDE kao S_1 i S_2, redom. Vrijedi $\angle FBD = \beta \Rightarrow \angle FS_1D = 2\beta \Rightarrow \angle S_1DF = 90^o - \beta$. Analogno pokazujemo $\angle S_2DE = 90^o - \gamma$. Kada promatramo dužinu S_1S_2, vidimo da mora vrijediti $\angle FDE = 180^o - (\angle S_1DF + \angle S_2DE) = 180^o - \alpha$, pa D mora biti na kružnici opisanoj AEF.

3. slučaj: točka izvan trokuta - BSOMP da se M nalazi sa suprotne strane BC od A. Neka je M presjek kružnica opisanih CDE i BDF. Tada vrijedi $\angle EMD = \angle DCE = \gamma$ (obodni nad ED) i $\angle FMD = \angle DBF = \beta$ (obodni nad FD), pa vrijedi $\angle EMF = \gamma + \beta = 180^o - \alpha$, tj. M leži na opisanoj AEF.

Rješenje 9: Fiksirajmo radijus kružnice kao $|ID|$. $\angle BID = \angle IBA + \angle BAI = \beta/2 + \alpha/2$, $\angle IBD = \angle IBC + \angle CBD = \beta/2 + \alpha/2$, pa je $\angle BID = \angle IBD$ tj. $|ID| = |BD|$, analogno za $|ID| = |DC|$.

Neka je I_a središte pripisane kružnice. $\angle AI_aC = 180^o - \angle I_aAC - \angle I_aCA = 180^o - \alpha/2 - (\gamma + (180^o - \gamma)/2) = 90^o - \gamma/2 - \alpha/2$, $\angle DCI_a = \angle BCI_a - \angle BCD = (180^o - \gamma)/2 - \alpha/2 = 90^o - \gamma/2 - \alpha/2 = \beta/2$, pa kut $\angle AI_aC = \angle DCI_a$ tj. $|DC| = |DI_a|$ što dokazuje da je na kružnici.

Rješenje 10: a) Neka je D nožište visine iz A, i H' kao presjek AH i kružnice ABC. Vrijedi $\angle HCB = 90^o - \angle ABC = 90^o - \beta$, $\angle BHC' = \angle BAH' = 90^o - \angle ABC = 90^o - \beta$, pa je DCH' sukladan DHC po KSK (zajednička stranica $\overline{DC}$, $\angle HCD = \angle DCH'$ i $\angle CDH' = \angle CDH = 90^o$, pa je $|HD| = |DH'|$ tj. H' je preslika H preko BC.

b) Neka je E nožište visine iz B, i M polovište $\overline{BC}$ te neka je H_1 preslika H preko M. Po SKS je trokut MBH sukladan trokutu MH_1C pa $\angle BHM = \angle MH_1C$ tj. BH je usporedno s H_1C, pa je MHC sukladan MBH_1 po SKS, pa $MHC = HH_1B$ tj. HC je usporedno s BH_1, pa je $HCBH_1$ paralelogram $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BHC = 180^o - \angle EHC = 180^o - \alpha \Rightarrow \angle BH_1C + \angle BAC = 180^o \Rightarrow H_1$ se nalazi na opisanoj kružnici ABC.

Rješenje 11: Neka su D, E, F redom nožišta visina iz A, B, C, A_1, B_1, C_1 redom polovišta BC, CA, AB, i A_2, B_2, C_2 redom polovišta AH, BH, CH. Dokažimo da D, E, F, A_1 leže na istoj kružnici. $\angle A_1EB = \angle A_1BE = 90^o - \gamma$, $\angle FEB = \angle FAD = 90^o - \beta$, $\angle BDF = 90^o - \angle FDA = 90^o - \angle FBE = 90^o - (90^o - \alpha) = \alpha$, $\angle FEA_1 = 90^o - \gamma + 90 - \beta = 180 - \beta - \gamma = \alpha = \angle BDF \Rightarrow$ D, E, F, A_1 je na istoj kružnici. Analogno pokazujemo i za B_1 i C_1. Sada ćemo dokazati da D, E, F, A_2 leže na istoj kružnici. $\angle A_2EH = \angle A_2HE = \gamma$, $\angle HED = \angle HCD = 90^o - \beta$, $\angle BFD = \angle BHD = \angle AHE = 90^o - \angle HAE = 90^o - (90 - \gamma) = \gamma$, $\angle AFH = \angle FAH = 90^o - \beta$, $\angle HFD = 180 - \angle BFD - \angle AFH = 180 - (\gamma + 90^o - \beta)$, $\angle HFD + \angle HED = 180^o - (\gamma + 90^o - \beta) + (\gamma + 90^o - \beta) = 180^o \Rightarrow D, E, F, A_2$ je na istoj kružnici. Analogno pokažemo za B_2 i C_2. Iz prethodno dokazanog slijedi da su sve točke na istoj kružici.
Alternativno rješenje: Pogledaj prošli zadatak. Što se dogodi ako primijenimo homotetiju iz H s faktorom $1/2$. (A ide u polovište AH, točka koja je bila simetrična preko polovišta ide u polovište, a točka koja je bila simetrična preko stranice ide u nožište)

Rješenje 12: Najprije primijetimo da kako je $|AB| = |BC|$, onda je visina iz B na AC ujedno i simetrala AC. Kako E leži na simetrali, vrijedi $\angle EAC = \angle ACE$. Kako je $ABCD$ tetivan, vrijedi $\angle ABD = \angle ACD$. Iz zadatka 1. slijedi da je i $AFED$ tetivan, pa vrijedi $\angle FAE = \angle FDE$. No, kako je $ABCD$ tetivan vrijedi $\angle CAB = \angle CDB$, pa mora vrijediti i $\angle EAC = \angle FDB$. Konačno, zapisujemo produženu jednakost svega što znamo: $\angle FDB = \angle EAC = \angle ECA = \angle DBA$, a uvjet $\angle FDB = \angle DBF$ dovoljan je za dokazati jednakokračnost FBD, tj. $|FB| = |FD|$.

Rješenje 13: a) Neka je I centar upisane kružnice. Prvo pokušamo dobiti direktno $BXC = 90^o$, no nakon chaseanja svih kutova na slici vidimo da jedini kut vezan uz X koji možemo dobiti je $\angle FXB = \gamma/2$. To se dobiva iz slijedećeg chasea: $\angle FXB = 180^{o\smile}(\angle XBF + \angle BFX) = 180^{o\smile}(180^{o\smile}\angle EFA + \beta/2) = \angle EFA^{\smile}\beta/2 = 90^o - \alpha/2 - \beta/2 = \gamma/2$.

Ideja je naći proxy točke P na FX i Q na BX takve da $\angle PCQ = \gamma/2$ i $\angle CPQ = 90^o$. Ako uspijemo naći takve točke, onda smo gotovi jer je tada $XPQC$ tetivan pa $90^o = \angle PXC = \angle BXC$. Nakon promatranja vidimo da E, I zadovoljavaju te uvjete.

b) Ovaj dio je lakši. Uočimo da x leži na kružnici sa središtem M i radijusa $|BC|/2$. Kako je MN srednjica, želimo dokazati da je MX paralelno sa AB. To je lagano jer $\angle BMX = 2\angle BCX = 2 \cdot (90^o - \beta/2) = 180^o - \beta$!

Rješenje 14: http://proofsfromthebook.com/2013/07/13/simpson-line-theorem-proof/

Rješenje 15: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1994650p13913753

Rješenje 16: https://www.egmo.org/egmos/egmo6/solutions.pdf

Rješenje 17: Neka su Q, R, S nožišta visina iza A, B, C redom, te neka je T nožište iz H na p. $\angle HEF = \angle BEP = 90^o - \angle PBE = 90^o - \angle CBR = 90^o - (90^o - \gamma) = \gamma$. Analogno $HFE = \beta$ iz čega zaključujemo da su ABC i HFE slični. Kako su ti trokuti slični ortocentar im dijeli visinu u jednakom omjeru pa $|AH| : |AQ| = |HX| : |XT|$. Očito je da je $QPTH$ pravokutnik, pa $HQ = TP$ odakle slijedi $AH : TP = HX : XT$. Iz navedenog omjera i $\angle AHX = \angle PTX = 90^o$ zaključujemo da su trokuti AHX i PTX slični, pa $\angle AXH = \angle PXT$ odakle su A, X, P kolinearni.

Rješenje 18: https://www.egmo.org/egmos/egmo8/solutions-day2.pdf

Rješenje 19: http://www.bamo.org/attachments/bamo2020examsol.pdf

Rješenje 20: https://artofproblemsolving.com/community/c1646h1025320s3_antisteiner_point

Rješenje 21: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1831604p12264958

Rješenje 22: https://artofproblemsolving.com/community/c3103h1226690_parallelogram_isogonality_lemma

Nadam se da ste uživali u predavanju i usput naučili nešto novo! No ne treba stati sada!
Ostali korisni izvori za samostalno vježbanje:

1. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Evan Chen)
2. https://web.evanchen.cc/olympiad.html
3. https://mnm.hr/online-predavanja
4. https://sites.google.com/site/imocanada/
5. https://artofproblemsolving.com/community

Teorija igara
Luka Milačić

Teorijski uvod

Teorija igara pojam je u matematici u kojemu promatramo neku vrstu matematičke igre u kojoj sudjeluje dvoje ili više ljudi i postoje pobjednik (ili pobjednici) i gubitnik (ili gubitnici). U zadatcima promatramo igru za koju znamo dopuštene poteze igrača i koji je uvjet da netko postane pobjednik ILI gubitnik. Ovakvi Zadatci najčešće završavaju pitanjem: "Ako igrač A igra prvi, tko će između njega i igrača B pobijediti, odnosno izgubiti?" Ponekad nam zadatak može biti postavljen i kao: "Za koje brojeve n igrač A dobiva?" pri čemu moramo odrediti sve brojeve n za koje igrač A uvijek može pobijediti (n je najčešće neki parametar iz zadatka, na primjer veličina ploče).

Korisne ideje

1. Jako je korisno naći neke vrste *invarijanti*, tj. nečega što ostaje konstantno tijekom igre.
2. Također je korisno gledati u kojim pozicijama igrač dobiva, odnosno gubi. Ponekad nam točne pozicije nisu ni bitne kao ni strategija kojom bismo došli u njih, već nam je dovoljna činjenica da svaka pozicija u konačnoj igri mora biti ili pobjednička ili gubitnička. (Pametnim razmišljanjem i kontradikcijama možemo pokazati da pozicija npr. nije gubitnička, pa onda mora biti pobjednička!)
3. Može biti korisno i vraćajući se unatraške analizirati zadanu situaciju - krenuti iz završne pozicije koja je očito pobjednička ili gubitnička, a zatim pokazati da jedan od igrača mora doći u nju.

Zadatci

Zadatak 1. Na stolu je 21 šibica. Leon i Jakov igraju igru tako da svaki može uzeti 1,2 ili 3 šibice s hrpe po odabiru. Onaj koji uzme zadnju šibicu gubitnik je. Ako Leon kreće prvi, tko će pobijediti?

Rješenje: Ako Leon uzme k šibica, Jakov uvijek može uzeti $4-k$ šibica. Jakov ponavlja tu strategiju 5 krugova, i u tih pet krugova bit će uzeto $5 \times (k+(4-k)) = 5 \times 4 = 20$, pa će na kraju ostati samo 1 šibica, i Leon je na potezu, što znači da će Leon izgubiti.

Zadatak 2. Vid i Tin igraju igru u kojoj im je cilj doći do zbroja 100. Igra se igra tako da svatko od njih naizmjenično kaže broj od 1 do 9 te se taj broj pridoda zbroju. Na primjer, neka je Tin prvi. Ako Tin kaže 7, onda je na redu Vid koji može reći 5. Tim potezom zbroj postaje 12. Tada je ponovo Tin na potezu, i ako onda kaže 3, zbroj postaje 15. Pobjednik je igrač čijim potezom zbroj postane 100. Ako je Tin prvi, odredi tko pobjeđuje.

Rješenje: Vid uvijek pobjeđuje jer on uvijek na bilo koji k koji Tin kaže može reći $10 - k$, tj. dopuniti taj broj do 10. Tako znamo da nakon Vidovog poteza zbroj se povećao za ukupno 10, i konačno, nakon 10 krugova, Vid će reći broj kojim se dobiva zbroj 100.

Komentar: Prošla dva zadatka riješili smo tako da smo primijetili da drugi igrač može na neki način negirati potez prvog igrača, tj. svojim potezom održavati sumu koja je višekratnik nekog broja. Koristili smo se prvom korisnom idejom: naći neku invarijantu - ovdje je invarijanta bila da nakon poteza drugog igrača uvijek ostaje višekratnik nekog broja.

Zadatak 3. Dva vrsna šahista, Zoran i Luka, igraju dvopotezni šah u kojem su sva pravila ista pravilima uobičajenog šaha, s jednom iznimkom: svaki igrač koji je na potezu može odigrati 2 poteza umjesto jednog. Zoran je bijeli i započinje igru. Koji igrač **ne** može izgubiti?

Rješenje: Pretpostavimo da Luka može uvijek pobijediti, tj. da Zoran uvijek gubi. Ako Zoran uvijek gubi, tada kažemo da je početna pozicija gubitnička (tj. sve su figure na svojim mjestima i igrač je na potezu). Prvi igrač tada gubi i ako kao svoja prva dva poteza pomakne skakača na slobodno polje, te ga potom vrati natrag na početno polje. Sada je drugi igrač na redu, a kako je raspored figura isti kao i na početku, on je osuđen na poraz. (jer se nalazi u poziciji za koju smo tvrdili da je gubitnička)

No, tada istovremeno drugi igrač uvijek pobjeđuje (jer smo to pretpostavili) i uvijek gubi (jer smo to upravo dokazali), što očito ne može vrijediti. Dakle, drugi igrač nema pobjedničku strategiju, tj. prvi igrač može osigurati remi ili pobjedu, bez obzira na to kako će drugi igrač igrati. Uočite da ovime nismo ništa rekli o samoj strategiji za prvog igrača, već smo samo dokazali njezino postojanje, što je dovoljno da odgovorimo na pitanje iz zadatka.

Zadatak 4. Dva igrača, Matej i Jakov, igraju igru s čokoladom oblika pravokutnika koja se sastoji od $m \times n$ manjih kvadratića. Igrači naizmjence biraju jednu od preostalih kockica te odlome (i pojedu) sve kockice koje se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu dolje u odnosu na odabranu, kao i sve one koje su time ostale odvojene od ostatka čokolade (pri čemu gornja lijeva kockica čokolade ostaje nepojedena). Gubi onaj igrač koji pojede zadnju kockicu (tj. onu u gornjem lijevom kutu), **jer je to nepristojno**. Ako Matej ide prvi, za koje veličine čokolada pobjeđuje Jakov?

Rješenje: Pretpostavimo da Matej uvijek gubi. Tada on gubi i ako odlomi samo kockicu u desnom donjem kutu. Ukoliko dimenzija čokolade nije 1×1, Matej nije izgubio u prvom potezu. No, nakon što drugi igrač odigra svoj potez, komad preostale čokolade mogao je ostati i odmah nakon prvog igrača jer će donja desna kockica biti pojedena bez obzira koju kockicu izabrali. Stoga je drugi igrač u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće jer barem jedan igrač mora pobijediti igru. Dakle, prvi igrač uvijek ima pobjedničku strategiju, osim ako je čokolada sastavljena od jedne kockice. Tada Jakov pobjeđuje!

Komentar: u prethodna dva zadatka koristili smo drugu korisnu ideju: promatrati pobjedničke i gubitničke pozicije. Imajte ovo na umu: pobjednička pozicija pozicija je u kojoj možete dovesti protivnika u gubitničku poziciju. Slično, gubitnička pozicija pozicija je u kojoj koristeći bilo koji potez morate dovesti protivnika u pobjedničku poziciju.

Zadatak 5. Na brodu je 5 pirata (A, B, C, D i E) koji nose titule različitih visina. A je, naravno, kapetan, a E čistač palube. Općenito, gusar koji se zove po ranijem slovu u abecedi ima višu titulu. Na brodu je i 100 zlatnika. Pirat s najvišom titulom odlučuje kako će se zlatnici rasporediti, a potom svi pirati glasaju jesu li za ili protiv predložene podjele zlatnika. Ako je većina (preko 50%) glasova protiv raspodjele, pirat s najvišom titulom (koji je predložio raspored) baca se u more morskim psima. Inače, zlatnici se raspodjeljuju kako je pirat predložio. Svi pirati škrti su i opaki (pa će glasati protiv raspodjele ako znaju da kasnije sigurno mogu dobiti više ili jednako zlatnika), ali i savršeno logični (znaju kako će se svi ostali ponašati). Koliko najviše zlatnika kapetan A može zadržati bez da ga se baci preko palube?

Rješenje: Pogledamo slučaj kada su ostali samo pirati D i E. D sebi može uzeti 100, a E ga neće moći baciti s palube jer broj glasova protiv nije iznad 50%. Znači E ja zadovoljan i sa samo s jednim novčićem. Uvedimo sada u priču C. Ako C da novčić E, to je E povoljnije nego 0 pa zato neće glasati protiv, pa C može ostalih 99 novčića uzeti sebi.

Uvedimo sada B. Ako B da 1 novčića D on će glasati za tu raspodjelu isto kao i B (jer bi D dobio 0 novčića ako se B baci s palube), dakle B će ostati živ sa 99 novčića, a C i E s 0.

Sada je puno jasnije što A može napraviti. A će C i E dati po jedan novčić jer u suprotnom oni neće dobiti ništa kako je B sljedeći po vlasti. Prema tome A može maksimalno očuvati 98 novčića.

Komentar: U ovom zadatku koristili smo treću čestu ideju: gledali smo zadatak unazad. Promatrali smo što bi se dogodilo ako bi nekog kapetana bacili u more, i zatim smo zaključili kako kapetan mora postupiti da to izbjegne.

Slijede još dva zabavna, ali i teška zadatka (gdje drugi sadrži i značajno teži teorem iz teorije igara koji vrijedi proučiti).

Zadatak 6.
Igra "dots and boxes" (tj. na hrvatskom "točke i pravokutnici") igra je u kojoj 2 igrača igraju igru na 3×3 kvadratnom polju u kojem je svaki vrh kvadratne mreže označen točkom. Svaki igrač smije paralelno s osima jednom crtom spojiti dvije susjedne točke koje nisu ranije bile spojene. Igrač koji zatvori kutiju odnosno kvadrat dobiva 1 bod i obavezan dodatan potez. Igra završava kada nema više mogućih poteza i svih 9 bodova je osvojeno (tako da postoji očiti pobjednik). Pitanje je - ako želite pobijediti, želite li ići prvi ili drugi?.

Napomena: Ovaj zadatak nema konkretan dokaz, nego "algoritam" koji možete koristiti za pobjeđivanje vaših prijatelja. - *Rješenje:* `https://youtu.be/KboGyIilP6k`

Zadatak 7. Nim je skup igra koji je na neki način poopćena verzija prvih dviju igara. Igra Nim najčešće se igra s proizvoljnim brojem skupova (npr. redova) i proizvoljnim brojem elemenata (npr. šibica) u svakom skupu (broj elemenata u različitim skupovima može biti različit). Sve takve igre možemo riješiti na isti način kao i sljedeću specifičnu verziju.

Promatrajmo verziju ove igre tako da u 4 retka stavimo redom jednu, tri, pet i sedam šibica. Svaki igrač može iz jednog retka uzeti koliko god šibica želi, no mora uzeti bar jednu šibicu. Pobjeđuje onaj igrač koji ne može više uzeti ni jednu šibicu. Odredi koji igrač može uvijek pobijediti.

Rješenje: Probat ćemo poopćiti odgovor koristeći tzv. Nim sume. Pretpostavimo da imamo n skupova (koje ćemo poredati - 1. skup, 2. skup... n-ti skup), i u svakom skupu (po redu i) po x_i šibica. Pitanje je: tko sad pobjeđuje? Odgovor je malo kompliciraniji nego što se isprva čini. Definirajmo operator $\oplus$. Taj operator zovemo "xor" (isključivo ili) operator i funkcionira ovako:
$0 \oplus 0 = 0$
$1 \oplus 0 = 1$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

Po definiciji, $a \oplus b$ izračunamo tako da primijenimo $\oplus$ zasebno na svaki par bitova iz a i b (koje ćemo izraziti u binarnom zapisu), po otprije navedenim pravilima. (po potrebi možemo binarnom zapisu dodati nule s lijeva, ukoliko nam nedostaje bitova u manjem broju)

Npr. $7 \oplus 9$ bi bilo $0111 \oplus 1001$ što daje 1110 u binarnome, a to je jednako 14.

Nim sumu S definiramo kao $S = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$.

Ako je $S = 0$ onda pobjeđuje drugi igrač, a inače pobjeđuje prvi.

Dokaz ćemo provesti u 2 slučaja, neka je neki igrač u k-tom retku uzeo nekoliko čačkalica tako da ih je sada u i-tom retku y_i čačkalica. Neka je $T = y_1 \oplus y_2 \oplus ... \oplus y_k ... \oplus y_n$. (Primijetimo da je $x_i = y_i$ za $i \neq k$)

$$T = 0 \oplus T$$

$$T = S \oplus S \oplus T$$

$$T = S \oplus (y_1 \oplus x_1) \oplus ... \oplus (y_k \oplus x_k) \oplus ... \oplus (y_n \oplus x_n)$$

$$T = S \oplus x_k \oplus y_k$$

1. Ako je $S = 0$, T ne može biti 0 jer su x_k i y_k različiti brojevi.

2. Ako $S \neq 0$, onda izaberemo bilo koji x_k koji sadrži jedinicu na istom mjestu gdje S ima najljeviju jedinicu. Takav x_k mora postojati, jer inače bi u tom stupcu zbrajanja bile sve 0, pa to ne bi bila najljevija jedinica (jer je xor bilo kojeg broja nula još uvijek nula). Neka je $y_k = S \oplus x_k$. Sada je očito da je $T = S \oplus x_k \oplus S \oplus y_k = 0$.

Još samo treba dokazati da je $y_k < x_k$ a budući da je operacija $\oplus$ sa S spušta x_k vrijednost za barem 2^d gdje je d indeks najljevije jedinice os S. To znamo jer su sve znamenke u binarnom lijevo od te jedinice 0 pa one ne mijenjaju znamenke od x_k, a ostale znamenke nas ne zanimaju jer (kao i u svim bazama) broj s manje znamenaka je manji od broja s više.

I sada je sve dokazano: igrač koji mora maknuti šibice kada je $S = 0$ sigurno neće postići $T = 0$, a igrač koji mora maknuti šibice kada $S \neq 0$ sigurno može postići $T = 0$.

4. 9. 2020. - Petak

Ljetne igre
Lovre Mahečić i Matej Vojvodić

Pravila

Cilj Ljetnih igra je skupiti što više bodova. Bodovi se iz svih kola sa zadatcima i svih kola Blotta zbrajaju. Pobjednikom će biti proglašen igrač s najvećim brojem bodova. Maksimalan broj bodova je $50 + 55 + 60 = 165$ bodova za zadatke, zbrojeno s $4 \times 30 = 120$ za Blotto, tj. ukupno 285 bodova. Natjecanje se sastoji od 4 kola Blotta i 3 kola sa zadatcima. Tijek natjecanja:
Blotto 1 $\Rightarrow$ Zadatci 1 $\Rightarrow$ Blotto 2 $\Rightarrow$ Zadatci 2 $\Rightarrow$ Blotto 3 $\Rightarrow$ Zadatci 3 $\Rightarrow$ Blotto 4.

Blotto

Igra se prije svakog kola i na kraju, tako da se ukupno odigra 4 kola. Svako kolo na raspolaganju ima 5 kula i 100 vojnika, ali neka kola mogu imati i neke specijalne jedinice čije ćemo ponašanje opisati u tekstu. Vaš zadatak je rasporediti vojnike na kule. Svaka kula nosi određen broj bodova. Cilj igre osvojiti je što je moguće više bodova.

Bodovanje: vaš raspored vojnika na kulama usporedit će se sa svim ostalim rasporedima koje su sudionici igre predali. Pri usporedbi rasporeda 2 tima, za svaku kulu usporedit će se tko ima više vojnika. Onaj tim koji ima više vojnika na toj kuli dobiva bodove koje nosi ta kula, a u slučaju jednakog broja vojnika, igrači bodove na toj kuli dijele po pola. Dakle, rezultat će ovisiti o tome kako su drugi igrači rasporedili svoje vojnike.

Rezultat svakog tima za pojedino kolo izražava se kao ukupan zbroj bodova osvojenih pri napadanju svih ostalih timova, podijeljen s brojem svih ostalih timova, i zaokružen na najbliži polu-cijeli broj (npr. 1.37 se zaokružuje na 1.5, a 2.9 na 3). Drugim riječima, prikazuje se prosječan broj bodova koje je igrač osvojio po jednom dvoboju. Ukoliko tim nije predao raspored, dodijeljuje mu se 5 bodova i zanemaren je pri napadanju.

Rješenje: Zanimljivo je primijetiti da je Blotto nebalansirana igra, tj. nema Nashovu ravnotežu. Za svaku konfiguraciju moguće je naći strogo bolju konfiguraciju (tj. da osvaja strogo više bodova), pa zato nema "optimalne" strategije. Igra se svodi na to koliko dobro možete procijeniti kako drugi misle! Nadam se da ste se zabavili! :)

Zadatci

U svakom kolu zadataka bit će dana 4 zadatka: po jedan iz svakog od osnovnih područja (algebre (A), kombinatorike (C), geometrije(G) i teorije brojeva(N)). Zadatci će biti sortirani po procijenjenoj težini i nosit će određen broj bodova. Potpuno točno rješenje donosi vam sve predviđene bodove, a moguće je ostvariti i parcijalne bodove na rješenju. Svaki član tima može prezentirati rješenje za najviše dva zadatak.

Rješenje: Rješenja se nalaze pored pojedinih zadataka!

Zadatci 1 - 25 minuta

G1: Zadan je tetivni četverokut $ABCD$, kojem se dijagonale sijeku u E.
Dokaži da su trokuti ABE i CDE slični. (10 BODOVA)

Rješenje: Koristimo svojstvo tetivnog četverokuta da vrijedi $\angle ABE = \angle ABD = \angle ACD = \angle ECD$. Analogno se pokaže $\angle BAE = \angle EDC$. Zato su trokuti slični po $K - K$.

N1: Odredi sve peteroznamenkaste brojeve $\overline{6a37b}$ koji su djeljivi brojem 18. (12 BODOVA)

Rješenje: Da bi broj bio djeljiv s 18, mora biti djeljiv s 2 i 9. Da bi broj bio djeljiv s 9, zbroj znamenaka mu mora biti djeljiv s 9. Zato je $a + b = \{2, 11\}$. Kako bi broj bio djeljiv s 2, zadnja znamenka mu mora biti djeljiva s 2. Kombinacijom ovih uvjeta dobivamo $\overline{6a37b} = 60372, 62370, 69372, 67374, 65376, 63378$. Svako pogođeno rješenje nosi 1,5 bod.

C1: Koliko je brojeva manjih od 1000 djeljivo s 2 ili 3 ili 5? (13 BODOVA)

Rješenje: Lako je pokazati da se u prvih n prirodnih brojeva nalazi $\lfloor n/m \rfloor$ brojeva koji su djeljivi s m. Ovdje označavamo $\lfloor x \rfloor$ (čitamo: najveće cijelo od x, eng. floor) kao najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x, tj. to znači da odbacujemo decimalni dio. Naivno rješenje našeg zadatka bilo bi zbrojiti broj brojeva djeljivih s 2, s 3 i s 5 čime bi dobili > 1000 brojeva, što očito nije točno rješenje. Treba još odbaciti sve brojeve koji su djeljivi s 6, 10 ili 15 jer smo njih brojili dva puta - jednom kad smo brojili brojeve koji su djeljivi s jednim faktorom, a drugi put kad smo brojili brojeve djeljive s drugim faktorom. Konačno, još treba vratiti sve brojeve koji su djeljivi s 30 - jer smo ih najprije tri puta pribrojili, i zatim tri puta oduzeli!
Rješenje: $\lfloor 999/2 \rfloor + \lfloor 999/3 \rfloor + \lfloor 999/5 \rfloor - \lfloor 999/6 \rfloor - \lfloor 999/10 \rfloor - \lfloor 999/15 \rfloor + \lfloor 999/30 \rfloor = 733$

A1: Zadani su neki $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, takvi da su određeni zbrojevi svaka dva i dobiveni su brojevi 3, 4, 5, 6, 7 i 8. Odredi sve mogućnosti za a, b, c, d. (15 BODOVA)

Rješenje: BSOMP $a \leq b \leq c \leq d$. Vrijedi $a + b = 3$, $a + c = 4$, $b + d = 7$ i $c + d = 8$. Ako pretpostavimo $b + c = 5$, $a + d = 6$ rješavanjem sustava dobivamo rješenja (1, 2, 3, 5). Ako pak pretpostavimo $a + d = 5$, $b + c = 6$ dobivamo rješenja (0.5, 2.5, 3.5, 4.5). Ukoliko natjecatelj ponudi samo jedno rješenje, osvaja 9 bodova

Zadatci 2 - 30 minuta

C2: Promatrajmo igru Blotta u kojoj svi igrači imaju 100 vojnika koje moraju rasporediti na 5 kula vrijednih 4, 5, 6, 7 i 8 bodova (slična igra kao što ste igrali prvi put). Dokaži da ne postoje dvije konfiguracije takve da su u obje svi vojnici raspoređeni i da jedna osvaja sve bodove, dok druga osvaja 0 bodova. (11 BODOVA)

Rješenje: Ne postoje takve konfiguracije. Pretpostavimo da postoje: tada prvi igrač ima strogo više vojnika od drugog igrača na svakoj kuli, posljedično prvi igrač ima više vojnika od drugog igrača, što je nemoguće jer smo smo pretpostavili da je drugi igrač postavio sve vojnike, pa ih prvi ne može imati strogo više!

N2: Zadani su prirodni brojevi a, b tako da vrijedi $a \times b = 350000$. Također je poznato da ni jedan od brojeva a i b nema ni jednu nulu u dekadskom zapisu. Odredi sve moguće a i b. (13 BODOVA)

Rješenje: Raspis gore opisanog broja je $2^4 \times 5^5 \times 7$. Kako ni a ni b ne smiju sadržavati nule, a množenjem 2 i 5 dobili bismo broj s nulom na kraju, jedine opcije su $a = 2^4, b = 5^5 \times 7$ ili $a = 2^4 \times 7, b = 5^5$. Dobra vijest za nas je da su ti brojevi $(16, 21875)$ i $(112, 3125)$ koji ne sadrže nule, i to su ujedno i jedina rješenja (zamjene a i b)

G2: Težišnica je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice.
Težište je mjesto gdje se sijeku težišnice.
a) Dokaži da težište postoji (tj. sve tri težišnice sijeku sijeku u jednoj točki)
b) Dokaži da težište dijeli sve težišnice u omjeru 1:2.
Bodovanje: Dokaz tvrdnje pod b) uz korištenje tvrdnje pod a), ali bez prethodnog dokazivanja tvrdnje pod a) vrijedi 9 bodova. Oba podzadatka vrijede 14 bodova.

Rješenje: Povucimo bilo koje dvije težišnice. Recimo da smo povukli težišnice iz A i B, i neka su polovišta $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom M i N. MN je srednjica koja odgovara stranici AB, pa vrijedi $|MN| : |AB| = 1 : 2$. Lako možemo dobiti da su ovi trokuti slični po $K - K$ (vršni preko težišta i kutevi uz paralelne pravce AB i MN), pa je koeficijent sličnosti upravo $1 : 2$. Dokaz ponavljamo i iz vrhova A i C. Znamo da težišnica iz C dijeli težišnicu iz A u omjeru 1:2, isto kao i težišnica iz B pa zaključujemo da obje težišnice prolaze kroz istu točku na težišnici iz A - težište.

A2: Odredi minimalnu vrijednost izraza: (16 BODOVA)

$$8x^2 + 24xy + 30y^2 + 36y + 36$$

Rješenje: $= 2(2x+3y)^2 + 3(2y+3)^2 + 9$. Kako imamo dva kvadrata koji su uvijek veći od nule, želimo da su oni jednaki nuli kako bi postigli minimum. To se upravo postiže za $y = -3/2, x = 9/4$, pa je najmanja moguća vrijednost izraza njegova konstanta $+9$.

Zadatci 3 - 30 minuta

A3: Odredi: (12 BODOVA)

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Rješenje: Racionalizirajmo:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\times\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

. Raspisivanjem svih članova uočavamo da se svi članovi pokrate, i ostanu nam $-1+10=9$.

N3: Nađi sve cijele brojeve a tako da je razlomak $\frac{a^2+1}{a-1}$ također cijeli broj. (14 BODOVA)

Rješenje:

$$r=\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{a^2-a+a-1+1+1}{a-1}=a+1+\frac{2}{a-1}$$

Zato mora vrijediti da je $\frac{2}{a-1}$ cijeli broj, pa je zato $a-1=2, a=3, r=5$, $a-1=1, a=2, r=5$, $a-1=-1, a=0, r=-1$, $a-1=-2, a=-1, r=-1$. Svako pogođeno rješenje nosi 2,5 bodova.

G3: Nađi točku T unutar trokutu ABC tako da spojena sa vrhovima trokuta dijeli trokut na tri trokuta iste površine. (tj. $P(\triangle ABT)=P(\triangle BCT)=P(\triangle CAT)$) (16 BODOVA)

Rješenje: Točka T je težište. (pogađanjem ove činjenice natjecatelj dobiva 7 bodova) Koristimo svojstvo da T dijeli težišnice u omjeru 1:2, a možemo po sličnosti dobiti da su trokut koji čine visina, težišnica i segment nasuprotne stranice i trokut koji čine visina spuštena iz T na nasuprotnu stranicu, kraći segment težišnice i segment nasuprotne stranice slični, i to po koeficijentu $1:3$. Kako je visina iz T na stranicu samo trećina visine iz nasuprotnog vrha, lako je pokazati da navedeni trokut stvarno čini trećinu površine. Jedinstvenost ove točke možemo pokazati tako da povučemo pravce usporedne sa svim stranicama koji dijele visinu u omjeru 1:2. Radi se o tri pravca pa može postojati najviše jedna točka T, a kako smo našli tu točku, postoji točno jedna.

Kada bismo dopustili da točka T leži i izvan trokuta, i da nas zanima samo uvjet $P(\triangle ABT)=P(\triangle BCT)=P(\triangle CAT)$, tada je moguće pronaći još tri točke koje zadovoljavaju dani uvjet: zadatak pokušajte dovršiti samostalno za vježbu!

C3: Matej ima kvadratni vrt veličine $(2k+1)\times(2k+1)$ koji želi popločati pločicama oblika 1×2 (i može ih okretati, tj. koristiti pločice 2×1), tako da polja u vrtu koja se nalaze i u parnim redcima i u parnim stupcima ostanu nepokrivena. Za koje k to može postići? (17 BODOVA)

Rješenje: Obojimo vrt šahovski tako da se crno polje nalazi u kutu. Crnih polja ima $2k^2+2k+1$, a bijelih $2k^2+2k$. Sva su polja koja Matej pokušava ostaviti nepokrivenim crna, i ima ih točno k^2. Svaka pločica pokriva točno jedno bijelo i točno jedno crno polje pa konačno dolazimo do jednakosti $2k^2+2k+1-k^2=2k^2+2k$ čijim rješavanjem dobivamo $k^2=1 \Rightarrow k=1$ je jedini k za koji postoji popločavanje. Preostaje samo primjerom pokazati da je $k=1$ rješenje (jer smo prethodno dokazali da ako postoji rješenje, $k=1$ je jedino), što je trivijalno.

Blotto 1 - 5 minuta

Vaš zadatak je rasporediti 100 vojnika na 5 kula. Vrijednosti kula redom su **4 5 6 7 8**. Rješenje predajte na papiriću koji ste dobili. Neka uključuje ime tima, a zatim 5 brojeva (redom koliko ste vojnika stavili na pojedinu kulu). Zbroj zapisanih brojeva može biti najviše 100.

Primjer dvoboja:
Igrač 1: 20 20 20 20 20
Igrač 2: 30 10 15 20 25

Na prvoj kuli pobjeđuje drugi igrač i dobiva 4 boda. Na drugoj kuli pobjeđuje prvi igrač i osvaja 5 bodova. Na trećoj kuli također pobjeđuje prvi igrač i osvaja dodatnih 6 bodova. Na četvrtoj kuli imaju jednak broj vojnika pa svaki igrač dobiva $7/2 = 3.5$ bodova. Na zadnjoj kuli drugi igrač ponovno pobjeđuje i osvaja još 8 bodova. Konačno, prvi igrač osvaja $5+6+3.5 = 14.5$ bodova, a drugi igrač osvaja $4+3.5+8 = 15.5$ bodova.

Blotto 2 - 5 minuta

Vaš zadatak je rasporediti 100 vojnika na 5 kula. Vrijednosti kula redom su **7 8 6 4 5**. Rješenje predajte na papiriću koji ste dobili. Neka uključuje ime tima, a zatim 5 brojeva (redom koliko ste vojnika stavili na pojedinu kulu). **Također, niz brojeva mora biti neopadajući** tj. svaki broj je veći ili jednak prethodnom. Zbroj zapisanih brojeva može biti najviše 100.

Primjer dvoboja:
Igrač 1: 20 20 20 20 20
Igrač 2: 15 20 20 22 23

Na prvoj kuli pobjeđuje prvi igrač i dobiva 8 bodova. Na drugoj kuli oba igrača imaju isti broj vojnika pa dobivaju po $6/2=3$ boda. Na trećoj kuli također imaju isti broj vojnika, pa osvajaju još $5/2 = 2.5$ boda. Na četvrtoj kuli drugi igrač dobiva još 7 bodova. Na zadnjoj kuli drugi igrač ponovno pobjeđuje i osvaja još 4 boda. Konačno, prvi igrač osvaja $8+3+2.5 = 13.5$ bodova, a drugi igrač osvaja $3+2.5+7+4 = 16.5$ bodova.

Blotto 3 - 5 minuta

Vaš zadatak je rasporediti 100 vojnika i 5 topova na 5 kula. Kako bi top radio, potrebno je da se na kuli nalazi vojnik koji će upravljati njime. Svakim topom treba upravljati po jedan vojnik. Kod napadanja, najprije se gleda koji tim ima više topova na kuli - ako timovi imaju različit broj topova, pobjeđuje onaj s više topova. Ukoliko igrači imaju jednak broj topova, primjenjuju se ista pravila kao u prethodnim kolima (gleda se broj vojnika).

Vrijednosti kula redom su **4 5 6 7 8**. Rješenje predajte na papiriću koji ste dobili. Neka uključuje ime tima, zatim 5 brojeva (redom koliko ste vojnika stavili na pojedinu kulu) i još 5 brojeva (redom koliko ste topova stavili na pojedinu kulu). Zbroj prvih 5 zapisanih brojeva može biti najviše 100, a zadnjih 5 zapisanih brojeva može biti najviše 5.

Primjer dvoboja:
Igrač 1: 20 20 20 20 20 1 1 1 1 1
Igrač 2: 30 10 15 20 25 0 2 1 1 1

Na prvoj kuli pobjeđuje prvi igrač (jer ima više topova) i dobiva 4 boda. Na drugoj kuli pobjeđuje drugi igrač (jer ima više topova) i osvaja 5 bodova. Na trećoj kuli također pobjeđuje prvi igrač i osvaja dodatnih 6 bodova. Na četvrtoj kuli igrači imaju jednak broj vojnika i jednak broj topova, pa svaki igrač dobiva $7/2 = 3.5$ bodova. Na zadnjoj kuli drugi igrač ponovno pobjeđuje i osvaja još 8 bodova. Konačno, prvi igrač osvaja $4+6+3.5 = 13.5$ bodova, a drugi igrač osvaja $4+3.5+8 = 16.5$ bodova.

Blotto 4 - 10 minuta

Vaš zadatak je rasporediti 100 vojnika, 10 strijelaca i kralja na 5 kula. Svaki strijelac vrijedi kao dva vojnika kada brani kulu, ali samo kao pola vojnika kada napada kulu. Broj bodova koje ste osvojili jednak je prosjeku bodova koje osvojite kada **napadate** protivnikove kule. Kralj nema ulogu u napadu, ali ako je ubijen (tj. kula je strogo osvojena, odnosno napadač ima strogo više vojnika koji napadaju kulu) u fazi obrane donosi dodatnu nagradu od 3 boda protivniku koji napada kulu.

Vrijednosti kula redom su **4 5 6 7 8**. Rješenje predajte na papiriću koji ste dobili. Neka uključuje ime tima, zatim 5 brojeva (redom koliko ste vojnika stavili na pojedinu kulu), zatim još 5 brojeva (redom koliko ste strijelaca stavili na pojedinu kulu) i na kraju broj kule na koju stavljate kralja. Zbroj prvih 5 zapisanih brojeva može biti najviše 100, a zbroj idućih 5 može biti najviše 10. Zadnji broj neka bude 1 ako stavljate kralja na kulu vrijednu 4 boda, 2 ako stavljate kralja na kulu vrijednu 5 bodova... i konačno 5 ako stavljate kralja na kulu vrijednu 8 bodova.

Primjer dvoboja:
Igrač 1: 20 20 20 20 20 2 2 2 2 2 1
Igrač 2: 30 15 15 20 20 5 0 3 2 0 1

Promatrajmo što se događa kada prvi igrač napada drugog. Na prvoj kuli pobjeđuje drugi igrač. Na drugoj kuli pobjeđuje prvi igrač i osvaja 5 bodova. Na trećoj kuli prvi igrač napada s $20 + 2/2 = 21$ vojnikom, ali drugi igrač brani s $15 + 3\times2 = 21$, stoga igrač dobiva $6/2 = 3$ boda. Slično prvi igrač ima $20 + 2/2 = 21$ vojnika na četvrtoj kuli, dok drugi igrač ima $20 + 2\times2 = 24$, pa zato prvi igrač ne dobiva bodove. Na zadnjoj kuli prvi igrač ima 21 vojnika, a drugi igrač samo 20, pa prvi igrač dobiva 8 bodova. Kako je drugi igrač spasio svog kralja na prvoj kuli, prvi igrač ne dobiva dodatne bodove. Ukupno prvi igrač osvaja 16 bodova.

Kada bi drugi igrač napao prvog, dobio bi $4+0+0+0+0=4+3=7$ bodova.

Hvala na pažnji!

I svaka čast da ste uspjeli doći do kraja ovog... "ne tako kratkog" PDF-a (neki bi ga se usudili nazvati i knjigom). Veliko hvala svima koji su sudjelovali na Ljetnim igrama, ili na bilo kojem drugom danu predavanja!

Preostalo je samo proglasiti najbolje: pobjednike Ljetnih igra!

1. Tux Tax - 141,75 bodova
2. Mit - 128,50 bodova
3. Dorina - 128,00 bodova

Vidimo se ponovo i iduće godine!

Autori

Primijetili ste grešku u tekstu ili želite znati više?
Javite nam se putem e-mail adrese glv.forces@gmail.com