Zimsko kolo 2019./2020.

MATEMATIKA

1. Neka su a, b, c i d prosti brojevi takvi da je $a > b > c > d$. Ako je:

$$a + b + c + d = 161$$
$$a - b + c - d = 71$$
$$a + b - c - d = 119$$

koliko je $a - b - c + d$?

A.	B.	C.	D.	E.
37	51	71	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje.

Rješenje:

Primijetimo da je zbroj četiri prosta broja neparan broj! To znači da nisu sva četiri broja neparna jer bi njihov zbroj bio paran broj. S obzirom da **jedini prost broj koji je paran je broj 2**, on mora biti jedan od ta četiri broja. Dakle, $d = 2$.

Sada vrijedi:

$$a + b + c = 159$$
$$a - b + c = 73$$
$$a + b - c = 121$$

Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobivamo da je $2b = 86$, pa je $b = 43$. Sada lako izračunamo da je $a = 97$ i $c = 19$.

$a - b - c + d = 97 - 43 - 19 + 2 = 37$. Točan odgovor je **A.**

2. Baka je ubrala 13 kg grožđa, 5 kg smokava i 7 kg marelica te stavila sve sušiti. Postotak vode u svježim namirnicama je: grožđe 83 % , smokve 72 % i marelice 63 % dok je postotak vode u sušenim namirnicama: grožđe 13 %, smokve 12 % i marelice 11 %. Kolika je ukupna masa bakina sušenog voća?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
između 10 kg i 11 kg	između 8 kg i 10 kg	između 6 kg i 8 kg	između 4 kg i 6 kg	Ne želimo odgovoriti na pitanje.

Rješenje:

Prilikom sušenja voća voda isparava dok količina suhe tvari ostaje nepromijenjena.

Zapišimo zadane podatke u preglednim tablicama:

SVJEŽE VOĆE	grožđe	smokve	marelice
kg svježeg voća	13	5	7
% vode u svježem voću	83	72	63
% krute tvari u svježem voću	17	28	37

SUHO VOĆE	grožđe	smokve	marelice
kg suhog voća	g	s	m
% vode u suhom voću	13	12	11
% krute tvari u suhom voću	87	88	89

Izjednačimo količinu krute tvari prije i nakon sušenja:

grožđe $13\cdot\frac{17}{100}=g\cdot\frac{87}{100} \Rightarrow g=\frac{13\cdot 17}{84}$

smokve $5\cdot\frac{28}{100}=s\cdot\frac{88}{100} \Rightarrow s=\frac{5\cdot 28}{88}$

marelice $7\cdot\frac{37}{100}=m\cdot\frac{89}{100} \Rightarrow m=\frac{7\cdot 37}{89}$

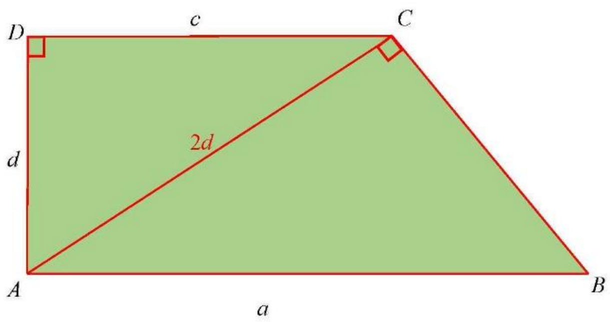
Ukupna masa sušenog voća je $g+s+m=7.04$ kg. Točan odgovor je **C**.

3. U trapezu $ABCD$ kojem je kut s vrhom A pravi, dijagonala $\overline{AC}$ dvostruko je dulja od kraka $\overline{AD}$ i okomita je na krak $\overline{BC}$ tog trapeza. Kako se odnose duljine osnovica tog trapeza?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2 : 1	3 : 2	4 : 3	Nije moguće odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje.

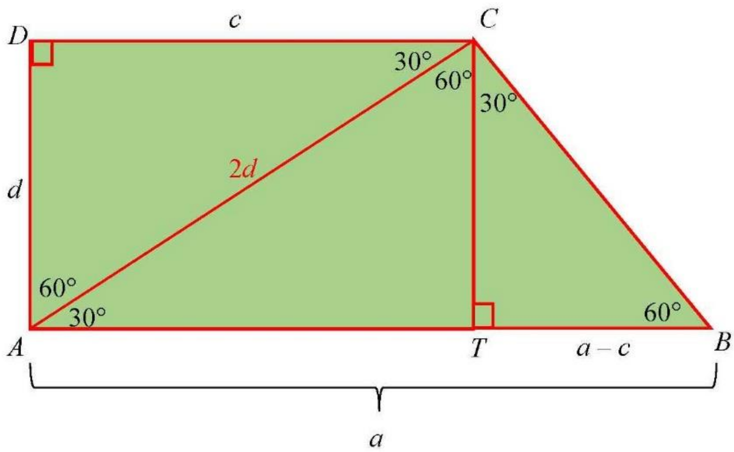
Rješenje:

Skicirajmo dani trapez. Želimo izračunati $\frac{a}{c}$.



Trokut ACD je pravokutan i hipotenuza mu je dvostruko dulja od katete, što znači da je pola jednakostraničnog trokuta duljine stranice $2d$. Dakle, $|\measuredangle CAD| = 60°$ i $|\measuredangle ACD| = 30°$.

Stoga je $|\measuredangle BAC| = 30°$ i $|\measuredangle ABC| = 60°$. Spustimo visinu iz vrha C na osnovicu $\overline{AB}$.



Trokut ABC je pravokutan s kutovima 30°- 60°- 90° i pola je jednakostraničnog trokuta duljine stranice a. Dakle $|BC| = \frac{a}{2}$. Kako je i trokut BCT također pravokutan s kutovima 30°- 60°- 90° i on je pola jednakostraničnog trokuta pa je $|TB| = \frac{|BC|}{2} = \frac{a}{4}$.

S obzirom da je $|TB| = c - a$ izjednačavanjem duljina dobivamo:

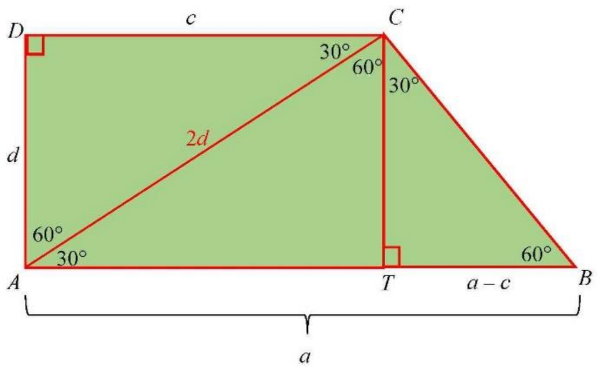
$a - c = \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \quad 4a - 4c = a \quad \Rightarrow \quad 3a = 4c \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{4}{3}$. Točan odgovor je **C**.

4. U trapezu *ABCD* kojem je kut s vrhom *A* pravi, dijagonala $\overline{AC}$ dvostruko je dulja od kraka $\overline{AD}$ i okomita je na krak $\overline{BC}$ tog trapeza. Trokutu *ABC* opisana je kružnica. Koliki je kvocijent površine onog dijela tog kruga koji nije unutar trapeza i onog dijela trapeza koji nije unutar kruga?

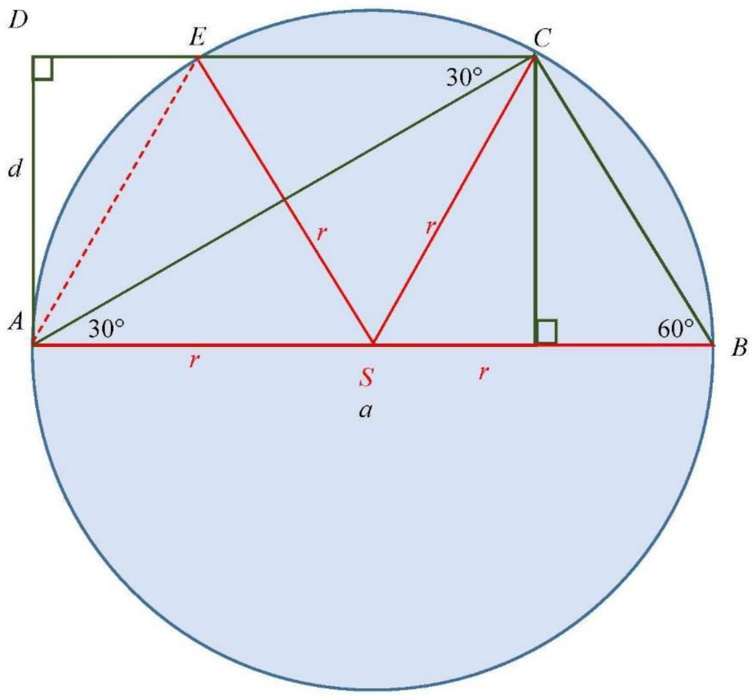
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
13.91	13.19	19.13	Nije moguće odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje.

Rješenje:

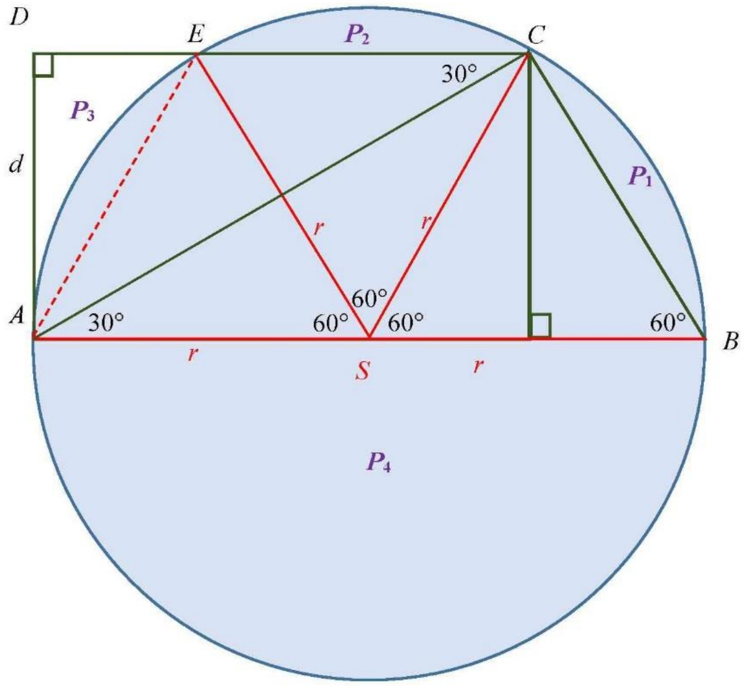
Iskoristimo činjenice iz prethodnog zadatka:



Trokut *ABC* je pravokutan pa je središte njemu opisane kružnice na polovištu hipotenuze i $a = 2r$.



Trokut *BCS* je jednakokračan s kutom 60° uz osnovicu iz čega zaključujemo da je jednakostraničan i da je $|\measuredangle BSC| = 60°$. Iz toga slijedi da je $|\measuredangle SCA| = 30°$, pa je i trokut *CES* jednakokračan s kutom 60° uz osnovicu iz čega zaključujemo da je jednakostraničan i da je $|\measuredangle CSE| = 60°$. Dakle i trokut *ASE* mora biti jednakostraničan. Izračunajmo sada površine naznačene na slici.



$$P_1 = P_2 = P_{kružnog\ isječka} - P_{\Delta SBC} = \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$P_3 = P_{\Delta AED} - P_{kružni\ odsječak} = P_{\Delta AED} - P_{kružni\ isječak} + P_{\Delta ASE} = 3P_{\Delta AED} - P_{kružni\ isječak} = \frac{3\sqrt{3}}{8}r^2 - \frac{1}{6}r^2\pi = r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P_4 = \frac{r^2\pi}{2}$$

Kvocijent površine onog dijela tog kruga koji nije unutar trapeza i onog dijela trapeza koji nije unutar kruga:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_4}{P_3} = \frac{2 \cdot r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{r^2\pi}{2}}{r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\pi}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}} = 13.91$$

Točan odgovor je **A**.