



Zimsko kolo 2020./2021.

MATEMATIKA

1. Zbroj je triju različitih prirodnih brojeva $a < b < c$ jednak 2 880, a njihov je najveći zajednički djelitelj 240. Koliko postoji trojki (a, b, c) koje zadovoljavaju dano svojstvo?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
5	6	7	8	

Rješenje:

\\ Zapišimo dane podatke:

\\ $a + b + c = 2\ 880$

\\ $D(a, b, c) = 240 \Rightarrow a = 240x, b = 240y, c = 240z$ i $D(x, y, z) = 1$

\\ $240x + 240y + 240z = 2\ 880 \quad | : 240$

\\ $x + y + z = 12$

\\ Ispišimo sve mogućnosti za tri različita broja čiji je zbroj 12 i najveći zajednički djelitelj 1:

\\ $1 + 2 + 9 = 12$

\\ $1 + 3 + 8 = 12$

\\ $1 + 4 + 7 = 12$

\\ $1 + 5 + 6 = 12$

\\ $2 + 3 + 7 = 12$

\\ $3 + 4 + 5 = 12$

\\ Primijetimo da $2 + 4 + 6$ nije rješenje jer je $D(2, 4, 6) = 2$.

\\ Postoji 6 trojki koje zadovoljavaju dano svojstvo.

\\ Točan je odgovor **B.**

2. Baka je ubrala grožđe, smokve i marelice te ih stavila sušiti. Postotak vode u svježim namirnicama je: grožđe 83 % , smokve 72 % i marelice 63 % dok je postotak vode u sušenim namirnicama: grožđe 13 % , smokve 12 % i marelice 11 %. Koliko je voća ubrala baka ako je nakon sušenja imala 1.75 kg suhog grožđa, 2.02 kg suhих smokava i 2.85 kg suhих marelica?

A. između 20 kg i 21 kg	B. između 21 kg i 22 kg	C. između 22 kg i 23 kg	D. više od 23 kg	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------	---

Rješenje:

Prilikom sušenja voća voda isparava dok količina suhe tvari ostaje nepromijenjena.

Zapišimo zadane podatke u preglednim tablicama:

SVJEŽE VOĆE	grožđe	smokve	marelice
kg svježeg voća	g	s	m
% vode u svježem voću	83	72	63
% krute tvari u svježem voću	17	28	37

SUHO VOĆE	grožđe	smokve	marelice
kg suhog voća	1.75	2.02	2.85
% vode u suhom voću	13	12	11
% krute tvari u suhom voću	87	88	89

Izjednačimo količinu krute tvari prije i nakon sušenja:

$$\text{grožđe} \quad g \cdot \frac{17}{100} = 1.75 \cdot \frac{87}{100} \Rightarrow g = \frac{1.75 \cdot 87}{17} = \frac{609}{68}$$

$$\text{smokve} \quad s \cdot \frac{28}{100} = 2.02 \cdot \frac{88}{100} \Rightarrow s = \frac{2.02 \cdot 88}{28} = \frac{1111}{175}$$

$$\text{marelice} \quad m \cdot \frac{37}{100} = 2.85 \cdot \frac{89}{100} \Rightarrow m = \frac{2.85 \cdot 89}{37} = \frac{5073}{740}$$

Ukupna masa sušenog voća je $g + s + m = 22.1598591$ kg.

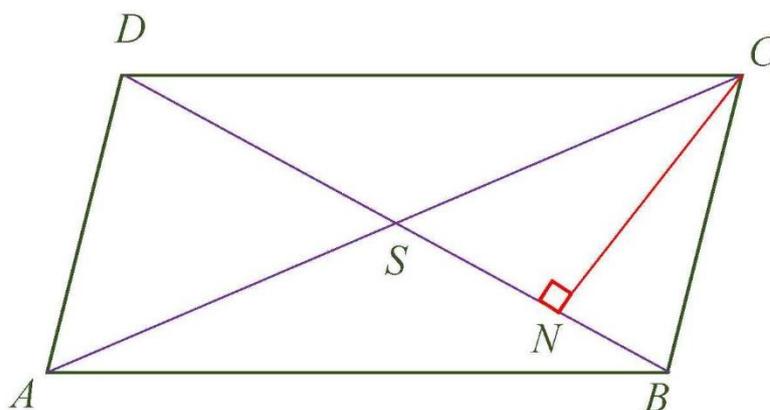
Točan je odgovor **C**.

3. U paralelogramu $ABCD$ osnovica \overline{AB} duga je 10 cm. Ako je površina trokuta BCS 100 cm^2 , pri čemu je točka S sjecište dijagonala paralelograma, kolika je udaljenost točke S od stranice \overline{CD} ?

<p>A.</p> <p>20 cm</p>	<p>B.</p> <p>10 cm</p>	<p>C.</p> <p>$10\sqrt{3}$ cm</p>	<p>D.</p> <p>nije moguće odrediti</p>	<p>E.</p> <p>ne želimo odgovoriti na pitanje</p>
-------------------------------	-------------------------------	--	--	---

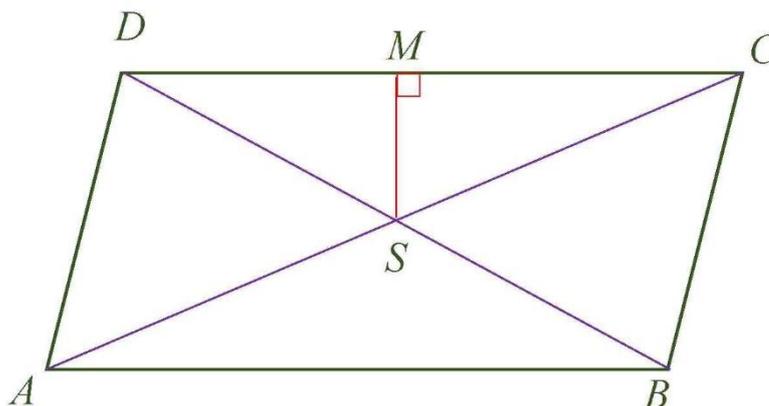
Rješenje:

Skicirajmo paralelogram $ABCD$:



Trokuti BCS i SCD imaju jednake površine jer je $|BS|=|SD|$ (jednako duge osnovice) i \overline{CN} im je visina.

Dakle, **dijagonale dijele paralelogram na četiri trokuta jednakih površina!**

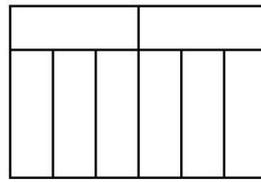
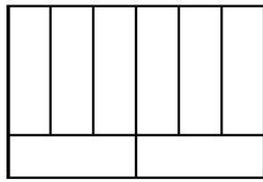


Tražena udaljenost točke S od stranice \overline{CD} duljina je dužine \overline{SM} , što je visina trokuta CDS na osnovicu \overline{CD} dugu 10 cm. Iz površine trokuta CDS izračunajmo visinu:

$$P_{CDS} = \frac{|CD| \cdot |MS|}{2} \Rightarrow |MS| = \frac{2P_{CDS}}{|CD|} = \frac{200}{10} = 20 \text{ cm}$$

Točan je odgovor **A.**

4. Na koliko različitih načina keramičar može popločati pod na terasi duljine 6 m i širine 4 m s 8 jednakih ploča duljine 3 m i širine 1 m? (Napomena: na slici su prikazana dva različita popločavanja.)

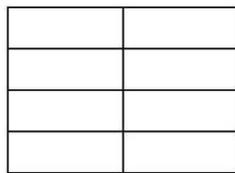


A. više od 12	B. 12	C. 11	D. manje od 11	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------------------	-----------------	-----------------	--------------------------	---

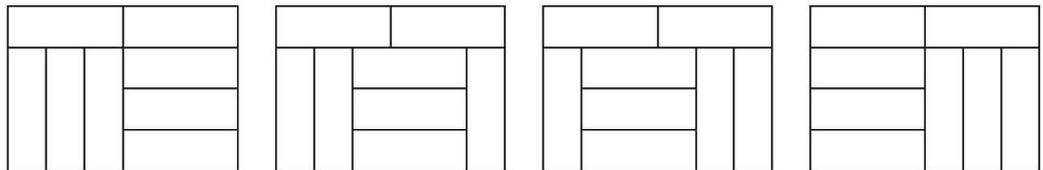
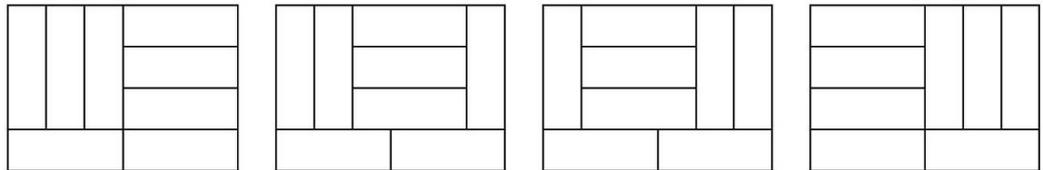
Rješenje:

Skicirajmo sve mogućnosti nekim redoslijedom, primjerice promatrajući broj vodoravnih pločica:

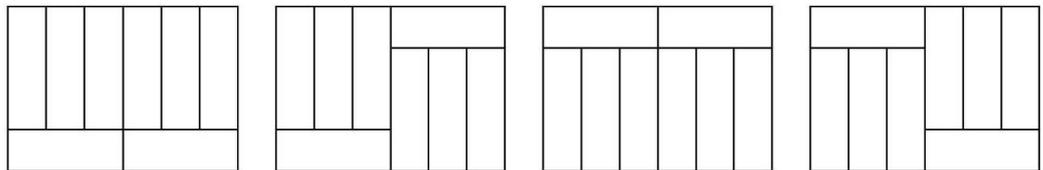
8 vodoravnih



5 vodoravnih



2 vodoravne



Postoji 13 različitih načina.

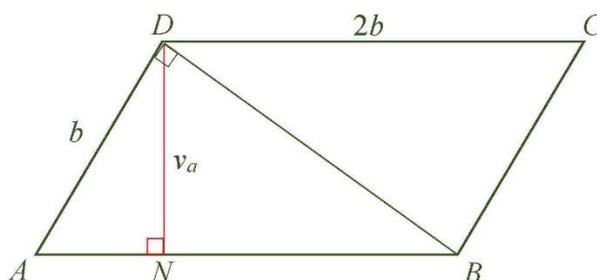
Točan je odgovor **A.**

5. U paralelogramu $ABCD$ površine $400\sqrt{3}$ cm² stranica \overline{AB} dvostruko je dulja od stranice \overline{BC} , a dijagonala \overline{BD} okomita je na \overline{AD} . Nad dijagonalom \overline{AC} konstruirana je kružnica kojoj je \overline{AC} dijametar. Koliki postotak površine kruga omeđenog tom kružnicom zauzima paralelogram $ABCD$?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
31,5 %	35,1 %	41,5 %	43,1 %	

Rješenje:

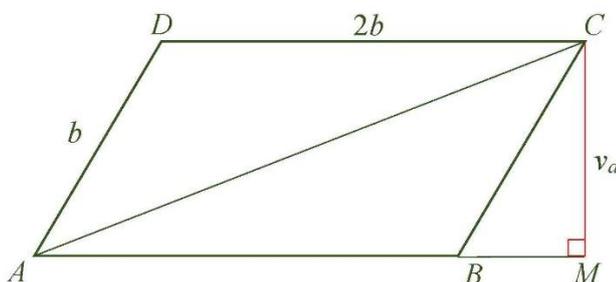
Skicirajmo paralelogram $ABCD$:



U pravokutnom trokutu ABC hipotenuza \overline{AB} je dvostruko dulja od katete \overline{AD} , pa su njegovi kutovi $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. To znači da i trokut AVD ima kutove $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ iz čega zaključujemo da je $v_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Površina paralelograma $ABCD$ je $400\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow 400\sqrt{3} = av_a = 2b \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = b^2\sqrt{3} \Rightarrow b = 20$ cm.

Izračunajmo polumjer kružnice kojoj je \overline{AC} dijametar.



$$|AC|^2 = |AM|^2 + |MC|^2 = \left(2b + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2800 \Rightarrow |AC| = 20\sqrt{7} \text{ cm} \Rightarrow r = \frac{|AC|}{2} = 10\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$\frac{P_o}{P_{ABCD}} = \frac{r^2\pi}{400\sqrt{3}} = \frac{700\pi}{400\sqrt{3}} = \frac{7\pi}{4\sqrt{3}} \Rightarrow 31,5 \%$$

Točan je odgovor **A.**