Prvo kolo 2021./2022.

MATEMATIKA

1. Koliko je pozitivnih brojeva u skupu $\left\{\left(-2^{3}\right)^{4n},\left(-2^{4n}\right)^{3},\left(-2^{n}\right)^{12},\left(-2^{3n}\right)^{4},\left(-2^{4}\right)^{3n}\right\}$ za $n\in\mathbf{N}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2	3	4	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$\left(-2^{3}\right)^{4n}=2^{12n}>0$ jer je broj $4n$ paran

$\left(-2^{4n}\right)^{3}=-2^{12n}<0$ jer je broj 3 neparan

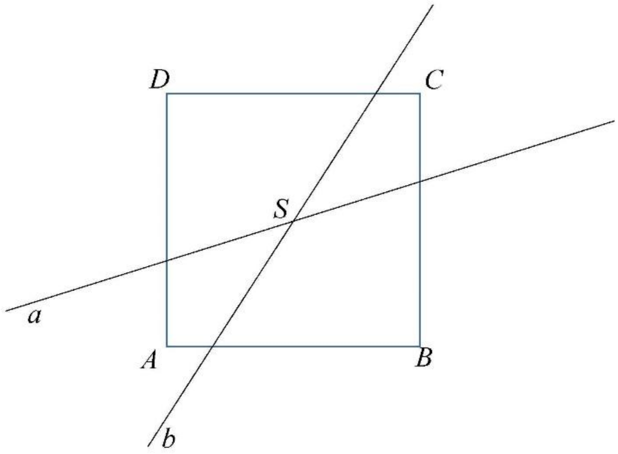
$\left(-2^{n}\right)^{12}=2^{12n}>0$ jer je broj 12 paran

$\left(-2^{3n}\right)^{4}=2^{12n}>0$ jer je broj 4 paran

$\left(-2^{4}\right)^{3n}=?$ jer broj $3n$ može biti paran (ako je n paran) ili neparan (ako je n neparan) pa ne možemo odrediti predznak potencije.

Točan odgovor je **D**.

2. Točka S središte je kvadrata $ABCD$. Pravac a siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki M, a pravac b siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki N. Ako je površina četverokuta $MSND$ tri puta manja od površine kvadrata $ABCD$, kako se odnosi duljina stranice kvadrata $ABCD$ u odnosu na $|MD|+|DN|$?



A. 2 : 3	**B.** 3 : 4	**C.** 4 : 5	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

S obzirom na to da je točka S sjecište dijagonala, njena udaljenost od stranica kvadrata je $\frac{a}{2}$.

Da bismo izračunali površinu četverokuta $MSND$ podijelit ćemo ga na dva trokuta.

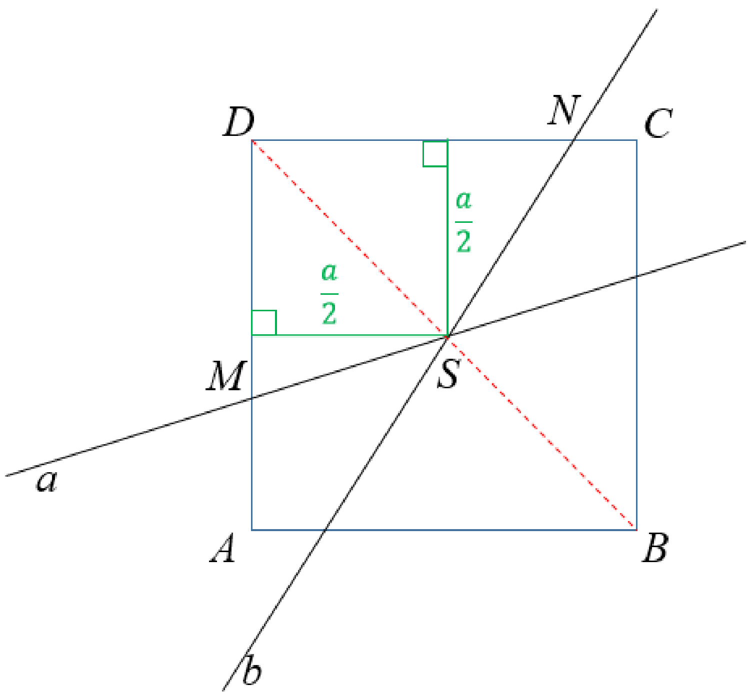
$$P_{MSND} = P_{\triangle MSD} + P_{\triangle NDS} = \frac{|MD|.\frac{a}{2}}{2} + \frac{|ND|.\frac{a}{2}}{2} = \frac{|MD|\cdot a}{4} + \frac{|ND|\cdot a}{4} = \frac{a}{4}\left(|MD|+|ND|\right)$$

Kako je površina četverokuta $MSND$ tri puta manja od površine kvadrata $ABCD$ slijedi:

$$P_{MSND} = \frac{1}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{4}\left(|MD|+|ND|\right) = \frac{1}{3}a^2$$

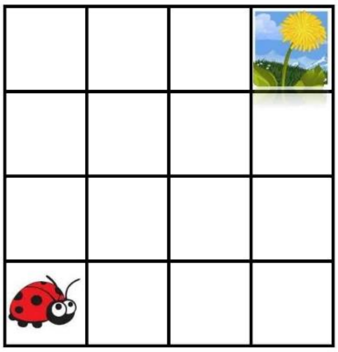
$$\Rightarrow \quad |MD|+|ND| = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{4}{a} = \frac{4}{3}a$$

$$\Rightarrow \quad a:\left(|MD|+|ND|\right) = a:\frac{4}{3}a = 1:\frac{4}{3} = 3:4$$



Točan odgovor je **B**.

3. Bubamara Mara želi doći na polje maslačka šećući se vodoravno i okomito po poljima. Koliko najkraćih putova za to postoji?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
manje od 15	više od 14 i manje od 20	više od 19 i manje od 25	više od 24	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Bubamara ide najkraćim putem ako se pomiče samo udesno i prema gore (ne smije se vraćati ulijevo ili prema dolje).

Neki od najkraćih puteva su: DDDGGG ili DGDGDG ili GGGDDD…

Dakle, bubamara mora tri puta otići gore i tri puta udesno. Time se zadatak sveo na to da prebrojimo na koliko načina možemo napisati ovih šest slova: DDDGGG. Sada možemo ispisati sve mogućnosti, ali je zgodno primijetiti da tražimo na koja tri od šest mjesta će se nalaziti slovo D. Primjerice, nizu slova DGDGDG odgovara niz brojeva 135. Ispišimo sve mogućnosti:

123, 124, 125, 126,	234, 235, 236,	345, 346,
134, 135, 136,	245, 246,	356,
145, 146,	256,	456.
156,		

Ukupno ih je 20.

Točan odgovor je **C**.

4. Koliko postoji različitih pravokutnih trokuta kojima su duljine stranica iskazane u centimetrima prirodni brojevi, a brojčana vrijednost opsega jednaka je brojčanoj vrijednosti površine?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje
0	1	2	više od 2	

Rješenje.

U standardnim oznakama opseg pravokutnog trokuta je $O = a + b + c$, a površina $P = \frac{ab}{2}$. Izjednačimo njihove brojevne vrijednosti.

$$\frac{ab}{2} = a + b + c$$

Ne zaboravimo da je trokut pravokutan i da vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Iz gornje jednakosti izrazimo c i uvrstimo u ovu jednakost.

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{ab}{2} - (a+b)\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 - ab(a+b) + (a+b)^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 - ab(a+b) + a^2 + 2ab + b^2$$

$$\frac{1}{4}a^2b^2 - ab(a+b) + 2ab = 0 \quad |: ab$$

$$\frac{1}{4}ab - (a+b) + 2 = 0 \quad |\cdot 4$$

$$ab - 4(a+b) + 8 = 0$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0$$

$$a(b-4) - 4(b-4) - 16 + 8 = 0$$

$$(b-4)(a-4) = 8$$

a i b su prirodni brojevi (katete trokuta) pa imamo dvije mogućnosti:

$$\begin{cases} b-4=8 \\ a-4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=12 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{12^2+5^2}=13 \quad \text{ili} \quad \begin{cases} b-4=4 \\ a-4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{8^2+6^2}=10$$

Primijetimo da su trokuti sa stranicama a = 5 cm, b = 12 cm, c = 13 cm i a = 12 cm, b = 5 cm, c = 13 cm sukladni. Dakle, postoje dva pravokutna trokuta (5 cm, 12 cm, 13 cm i 6 cm, 8 cm, 10 cm) koja zadovoljavaju dano svojstvo.

Točan odgovor je **C**.