Jesensko kolo 2019./2020.

1. Anica i Marica zajedno imaju 34 godine. Koliko su imale zajedno godina prije 12 godina?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
10	22	34	13	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Anica je prije 12 godina imala 12 godina manje nego sada. Također je i Marica prije 12 godina imala 12 godina manje nego sada. Ukupno su Anica i Marica prije 12 godina imale 12 + 12 = 24 godine manje nego sada. S obzirom da sada imaju ukupno 34 godine, prije 12 godina su imale ukupno 34 – 24 = 10 godina.

Točan odgovor je **A.**

2. Patrik je za vikend čitao lektiru. Ako je počeo čitati od 13 stranice i pročitao 77 stranica, koju je posljednju stranicu pročitao?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
88	90	91	89	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Prikažimo pregledno stranice knjige koje je Patrik pročitao:

Broj stranice u knjizi	13	14	15	…	**?**
Broj pročitane stranice	1	2	3	…	77

Uočavamo da je broj stranice u knjizi za 12 veći od broja pročitane stranice. Stoga je odgovor na pitanje 77 + 12 = 89.

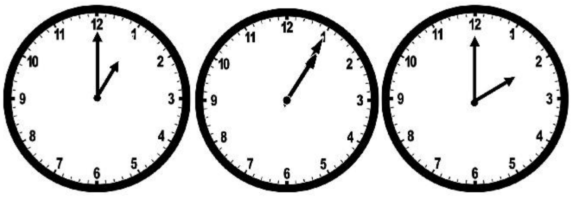
Točan odgovor je **D.**

3. Koliko će se puta od 12:15 do 23:15 istog dana poklopiti mala i velika kazaljka sata s kazaljkama?

A.	B.	C.	D.	E.
10	9	11	12	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Primijetimo da se unutar svakog punog sata (primjerice od 1:00 do 2:00) dogodi jedno preklapanje velike i male kazaljke sata (vidi sliku). To je stoga jer za proteklo vrijeme od 1:00 do 2:00 mala kazaljka će prijeći put od broja 1 do broja 2, a velika kazaljka će napraviti puni krug od broja 12 do broja 12. Na tom putu velika kazaljka će se jednom (između brojeva 1 i 2) preklopiti s malom kazaljkom.



Vrijeme od kojega mi brojimo preklapanja je 12:15. Do 13:00 velika kazaljka neće se preklopiti s malom!

Preklapanja s malom kazaljkom dogodit će se:

Vrijeme	12:15-13:00	13:00-14:00	14:00-15:00	…	22:00-23:00	23:00-23:15
Broj preklapanja	0	1	1	…	1	0
Ukupan broj preklapanja		1	2		10	

Točan odgovor je **A**.

4. Na jednoj je polici tri puta više knjiga nego na drugoj. Koliko je više knjiga na prvoj polici ako ih je na obje police ukupno 444?

A.	B.	C.	D.	E.
333	222	111	148	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj knjiga na drugoj polici (gdje ih je manje) označimo simbolom ♣ i pregledno prikažimo broj knjiga na policama:

Broj knjiga na prvoj polici	Broj knjiga na drugoj polici	Ukupan broj knjiga na policama
♣♣♣	♣	♣♣♣♣

S obzirom da je ukupan broj knjiga na policama 444, zaključujemo da su četiri znaka ♣ jednaka 444, što znači da je jedan znak ♣ jednak 444 : 4 = 111. Sada znamo koliko je knjiga na svakoj polici:

Broj knjiga na prvoj polici	Broj knjiga na drugoj polici	Ukupan broj knjiga na policama
♣♣♣	♣	♣♣♣♣
333	111	444

Na prvoj polici je 333 – 111 = 222 više knjiga nego na drugoj polici. Točan odgovor je **B**.

5. Rak Matko hoda tako da nakon pet koraka naprijed ide dva koraka nazad. Svaki Matkov korak dug je 2 cm. Koliko koraka Matko treba napraviti da bi došao iz jedne rupe u drugu ako znamo da je udaljenost tih dviju rupa 1 m?

A.	B.	C.	D.	E.
119	114	Manje od 100	Više od 120	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

S obzirom da rak Matko hoda tako da nakon pet koraka naprijed ide dva koraka nazad, znači da kada je napravio sedam koraka pomaknuo se unaprijed za tri koraka, tj za 6 cm. Nazovimo to jednom „rutom".

1 ruta = 7 koraka = 6 cm

Matko treba prijeći put od 1 m = 100 cm. Podijelimo taj put na dijelove od 6 cm tj. na prijeđene rute:

$$100 = 16 \cdot 6 + 4$$

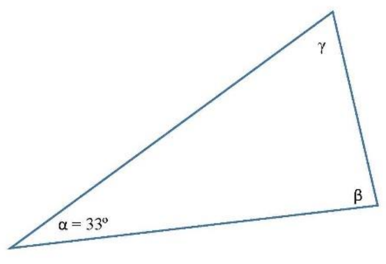
Dakle, da bi prešao put od 100 cm, Matko mora 16 puta napraviti rutu (7 koraka = 5 naprijed + 2 nazad) pa je to ukupno $16 \cdot 7 = 112$ koraka.

Ali, još moramo pridodati ostatak od 4 cm tj. dva koraka, pa je ukupan broj napravljenih koraka $112 + 2 = 114$. Točan odgovor je **B**.

6. Veličina je jednog unutarnjeg kuta trokuta 33°. Koliko iznosi zbroj veličina sukuta preostalih dvaju unutarnjih kutova tog trokuta?

A.	B.	C.	D.	E.
213°	147°	327°	Ovisi o mjerama ostalih kutova	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



S obzirom da je zbroj kutova u trokutu 180°, $\beta + \gamma = 180° - 33° = 147°$.

Moramo izračunati zbroj veličina sukuta (kut koji sa zadanim kutom čini ispruženi kut) preostalih dvaju unutarnjih kutova tog trokuta.

$$\beta' + \gamma' = (180° - \beta) + (180° - \gamma) = 360° - (\beta + \gamma) = 360° - 147° = 213°$$

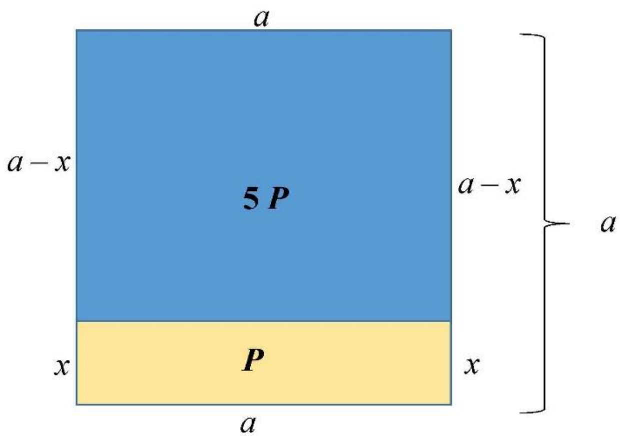
Točan odgovor je **A**.

7. Kvadrat presiječemo pravcem na takva dva pravokutnika da je površina većeg pravokutnika pet puta veća od površine manjeg, a opseg većeg je za 80 cm veći od opsega manjeg pravokutnika. Koliki je opseg danog kvadrata?

A. Manji od 200 cm	**B.** Između 200 cm i 250 cm	**C.** Između 250 cm i 300 cm	**D.** Veći od 300 cm	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Napravimo skicu kvadrata:



S obzirom da je površina plavog pravokutnika 5 puta veća od površine žutog pravokutnika, zaključujemo da je duljina stranice $a - x$ pet puta veća od duljine stranice x. Dakle, $a - x = 5x \quad \Rightarrow \quad a = 6x$.

Izrazimo opsege oba pravokutnika:

$$O_{plavog} = 2a + 2(a - x) = 4a - 2x = 4 \cdot 6x - 2x = 22x$$

$$O_{žutog} = 2a + 2x = 2 \cdot 6x + 2x = 12x + 2x = 14x$$

Opseg većeg je za 80 cm veći od opsega manjeg pravokutnika, pa je
$22x = 14x + 80 \quad \Rightarrow \quad 8x = 80 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 6 \cdot 10 = 60$ cm

Opseg danog kvadrata je $O = 4a = 4 \cdot 60 = 240$ cm. Točan odgovor je **B**.

8. Koliko postoji različitih brojeva a koji nisu prosti i za koje vrijedi $V(a, 48) = 48$?

A. 8	**B.** 7	**C.** 6	**D.** Ništa od navedenoga	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Iz $V(a, 48) = 48$ zaključujemo da je 48 višekratnik broja a, pa je a djelitelj broja 48. Napišimo sve djelitelje broja 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Ukupan broj djelitelja je 10, ali među njima samo brojevi 1, 4, 6, 8, 12, 16, 24 i 48 nisu prosti. Točan odgovor je **A**.

9. Zadan je pravokutnik *ABCD* duljina stranica 2 cm i 3 cm. Točke *A*, *B* i *C* ujedno su i vrhovi trapeza površine 18 cm^2 kojima je jedna osnovica stranica pravokutnika. Nacrtajte sve trapeze s danim svojstvom i uočite njihovu najdulju stranicu. Koliki je zbroj duljina duljih osnovica svih mogućih tako dobivenih trapeza?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
35 cm	25 cm	50 cm	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

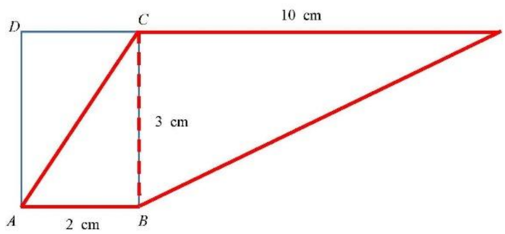
Rješenje:

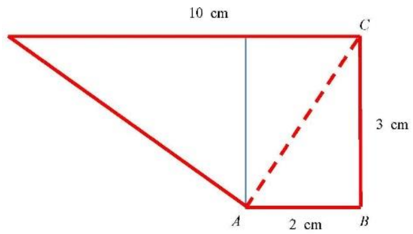
S obzirom da su točke *A*, *B* i *C* ujedno i vrhovi trapeza površine 18 cm^2 kojima je jedna osnovica stranica pravokutnika, postoje dvije mogućnosti:

1. Duljina osnovice trapeza je 2 cm. Tada je duljina visine trapeza 3 cm. Iz površine ćemo izračunati duljinu druge osnovice trapeza.

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v \quad \Rightarrow \quad 18 = \frac{2+c}{2} \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad c = 10\,\text{cm}$$

Nacrtajmo sve trapeze s tim svojstvom:

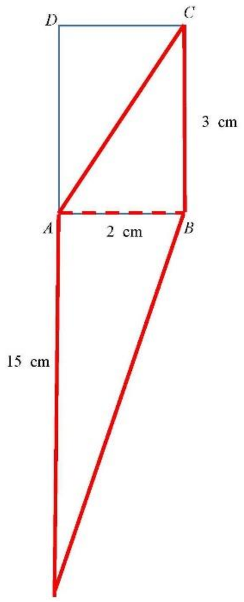


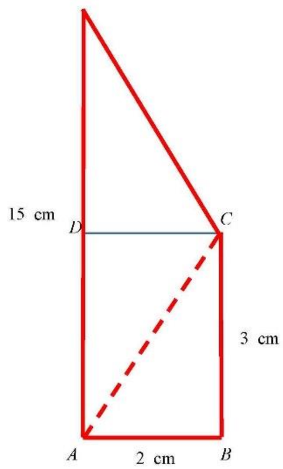


2. Duljina osnovice trapeza je 3 cm. Tada je duljina visine trapeza 2 cm. Iz površine ćemo izračunati duljinu druge osnovice trapeza.

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v \quad \Rightarrow \quad 18 = \frac{3+c}{2} \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad c = 15\,\text{cm}$$

Nacrtajmo sve trapeze s tim svojstvom:





Zbroj duljina duljih osnovica svih mogućih tako dobivenih trapeza je 10 + 10 +15 + 15 = 50 cm. Točan odgovor je **C**.

10. Ivica i Marica žele pojesti sve slatkiše s vještičine kuće. Ako Ivica sam jede slatkiše treba mu 12 dana, a Marici samoj treba 14 dana. Prva tri dana slatkiše su jeli zajedno, a onda je Marici bilo zlo pa je ostatak slatkiša pojeo sam Ivica. Koliko je najmanje dana trebalo Ivici i Marici da pojedu sve slatkiše?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6	7	9	10	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Izračunat ćemo kojom brzinom Ivica i Marica zajedno jedu slatkiše:

	treba mu za to:	u toku jednog dana pojede:
Ivica sam jede slatkiše	12 dana	$\frac{1}{12}$ slatkiša
Marica sama jede slatkiše	14 dana	$\frac{1}{14}$ slatkiša
Ivica i Marica zajedno jedu slatkiše		$\frac{1}{12}+\frac{1}{14}=\frac{13}{84}$ slatkiša

Prva tri dana slatkiše su jeli zajedno pa je to ukupno $3\cdot\frac{13}{84}=\frac{39}{84}$ pojedenih slatkiša, što znači da je preostalo za pojesti $1-\frac{39}{84}=\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$ ukupne količine slatkiša.

Ostatak slatkiša je pojeo sam Ivica za nepoznati x broj dana. Kako Ivica u toku jednog dana može pojesti $\frac{1}{12}$ slatkiša, zaključujemo da vrijedi: $\frac{1}{12}\cdot x=\frac{15}{28} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{28}\cdot 12=\frac{45}{7}=6\frac{3}{7}$.

To znači da je Ivica jeo sam slatkiše najmanje još 7 dana. Kada tome pribrojimo prva tri dana kada su ih jeli zajedno, dolazimo do odgovora na pitanje u zadatku: Ivici i Marici da pojedu sve slatkiše trebalo je najmanje 10 dana. Točan odgovor je **D**.

11. Troznamenkasti broj x pri dijeljenju s 5, 6 i 9 daje ostatak 1. Koliki je zbroj svih brojeva x s tim svojstvom?

A. 5860	**B.** 4059	**C.** 4869	**D.** Ne može se odrediti	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

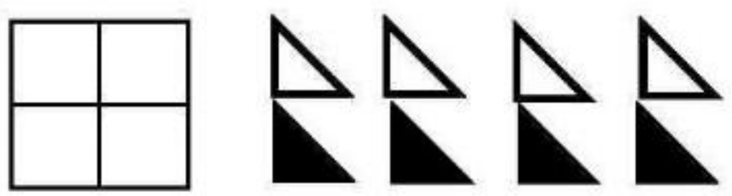
Ako troznamenkasti broj x pri dijeljenju s 5, 6 i 9 daje ostatak 1, onda je broj $x-1$ djeljiv s 5, 6 i 9. Broj je djeljiv s 5, 6 i 9, pa je djeljiv s njihovim najmanjim zajednički višekratnikom $V(5,6,9)=90$.

Troznamenkastih brojeva $x-1$ djeljivi s brojem 90 je 10 i to su: 990, 900, 810,…, 180, pa x može biti 991, 901, 811,…, 181.

$991 + 901 + 811 + \ldots + 271 + 181 = (991 + 181) + (901 + 271) + \ldots + (631 + 541) = 1172 \cdot 5 = 5860$

Točan odgovor je **A.**

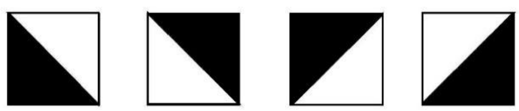
12. Na podu hodnika je mozaik oblika kvadrata podijeljen na 4 kvadratna dijela (kao na slici). Mozaik se može složiti od točno 8 pločica oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta, četiri bijele i četiri crne. Ako se svaki kvadratni dio mozaika mora složiti od jedne bijele i jedne crne pločice, na koliko različitih načina se može složiti taj mozaik?



A. 16	**B.** 256	**C.** 64	**D.** Ne može se odrediti	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

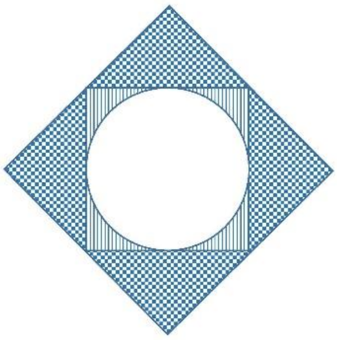
Rješenje:

Jedan kvadratić možemo popločati na četiri načina:



S obzirom da popločavamo četiri kvadratića i svaki možemo popločati na četiri načina, ukupan broj načina da popločamo pod je $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. Točan odgovor je **B.**

13. Kvadratu duljine stranice 2 cm na slici je upisana kružnica i opisan kvadrat. Za koliko je veća površina ispunjena kvadratićima od površine ispunjene crtama?

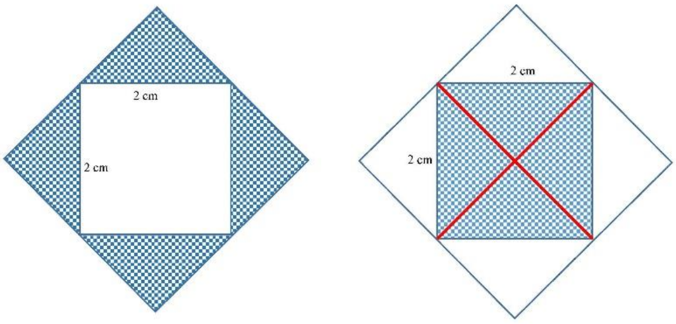


A. π cm^2	**B.** $4 - \pi$ cm^2	**C.** 2π cm^2	**D.** Ništa od navedenoga	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Polumjer kružnice jednak je polovini duljine stranice manjeg kvadrata, dakle 1 cm. To znači da je površina ispunjena crtama jednaka: $P_{crte} = a^2 - r^2\pi = 4 - \pi$ cm^2.

Površina ispunjena kvadratićima sastoji se od četiri jednakokračna pravokutna trokuta koja možemo presložiti tako da tvore kvadrat stranice duljine 2.



Dakle, površina ispunjena kvadratićima je 4 cm^2 i veća je od površine ispunjene crtama za π cm^2. Točan odgovor je **A**.