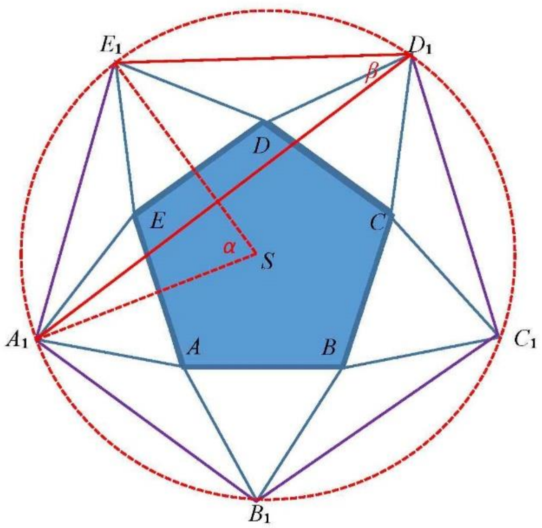
Zimsko kolo 2018./2019.

1.7. Nad stranicama pravilnog peterokuta *ABCDE* konstruirani su prema van jednakostranični trokuti ABB_1, BCC_1, CDD_1, DEE_1 i EAA_1. Kolika je mjera kuta $\measuredangle A_1D_1E_1$?

A. 54°	**B.** 30°	**C.** 36°	**D.** Ništa od navedenoga	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



Točke A_1, B_1, C_1, D_1 i E_1 su vrhovi novog pravilnog peterokuta. Traženi kut je obodni kut nad tetivom $\overline{A_1E_1}$ pa je dvostruko manji od središnjeg kuta peterokuta: $\beta = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{5} = 36°$.

2.9. U Gaussovoj ravnini prikaži skup svih kompleksnih brojeva za koje je $\sqrt{(\operatorname{Re} z-2)^2}+\sqrt{(\operatorname{Im} z+3)^2}<2$. Kolika je površina dobivenog skupa?

A.	B.	C.	D.	E.
4π	8	2.5π	4	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{(\operatorname{Re} z-2)^2}+\sqrt{(\operatorname{Im} z+3)^2}<2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(y+3)^2}<2 \quad \Rightarrow \quad |x-2|+|y+3|<2$$

Koristeći definiciju apsolutne vrijednosti realnog broja da je $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, promotrit ćemo četiri slučaja:

1. slučaj:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ y+3 \geq 0 \\ x-2+y+3<2 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -3 \\ y < -x+1 \end{cases}$$

2. slučaj:

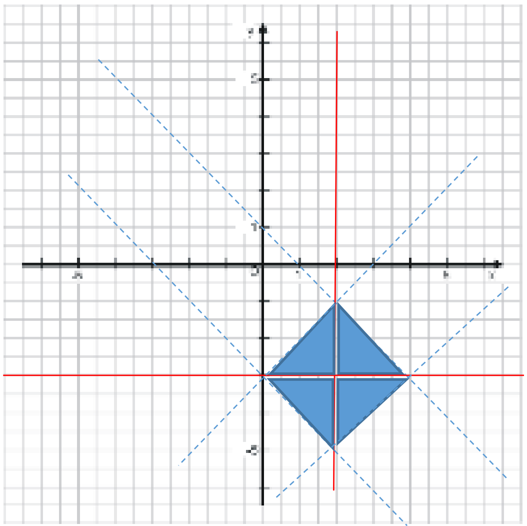
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ y+3 < 0 \\ x-2-y-3<2 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 2 \\ y < -3 \\ y > x-7 \end{cases}$$

3. slučaj:

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ y+3 < 0 \\ -x+2-y-3<2 \end{cases} = \begin{cases} x < 2 \\ y < -3 \\ y > -x-3 \end{cases}$$

4. slučaj:

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ y+3 \geq 0 \\ -x+2+y+3<2 \end{cases} = \begin{cases} x < 2 \\ y \geq -3 \\ y < x-3 \end{cases}$$



Dobili smo kvadrat čija je dijagonala duljine 4, pa je površina kvadrata 8.

1.12. Na koliko različitih načina možemo ispuniti ploču 4 x 4 nenegativnim cijelim brojevima tako da zbroj svakih dvaju susjednih polja (u retku ili stupcu) bude 2?

A. Više od 10	**B.** 6	**C.** 3	**D.** 2	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj 2 moramo prikazati kao zbroj dva nenegativna cijela broja. To je moguće napraviti na dva načina:

$2 = 2 + 0$ ili $2 = 1 + 1$.

Imamo tri mogućnosti:

- Ako u prvo polje prvog retka stavimo broj 1, tada svi brojevi u tablici moraju biti 1 (da bi zbroj svakih dvaju susjednih polja bio 2).
- Ako u prvo polje prvog retka stavimo broj 2, tada pored i ispod njega mora biti broj 0 itd.
- Ako u prvo polje prvog retka stavimo broj 0, tada pored i ispod njega mora biti broj 2 itd.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

ili

2	0	2	0
0	2	0	2
2	0	2	0
0	2	0	2

ili

0	2	0	2
2	0	2	0
0	2	0	2
2	0	2	0

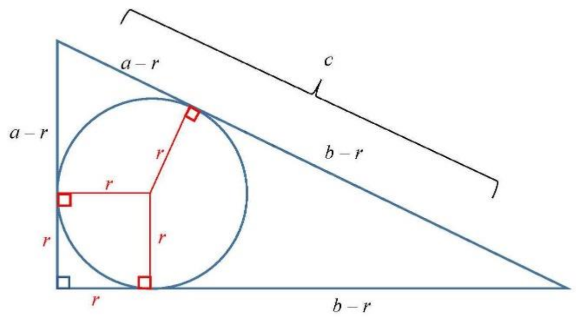
Stoga, odgovor na pitanje u zadatku jednak je 3.

1.14. Zbroj polumjera upisane i opisane kružnice pravokutnom trokutu jednak je:

A. $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	**B.** $\sqrt{ab}$	**C.** $\dfrac{a+b}{2}$	**D.** Ništa od navedenoga	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Polumjer pravokutnom trokutu opisane kružnice jednak je polovici duljine hipotenuze: $R = \dfrac{c}{2}$.



Polumjer pravokutnom trokutu upisane kružnice je $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ (vidi sliku!).

Zbroj polumjera upisane i opisane kružnice pravokutnom trokutu jednak je $\dfrac{a+b}{2}$.

2.9. Kolika je površina lika što ga graf funkcije $f\left(x\right)=\left|\sqrt{x^2-2x+1}-3\right|$ zatvara s pozitivnim dijelom koordinatnih osi?

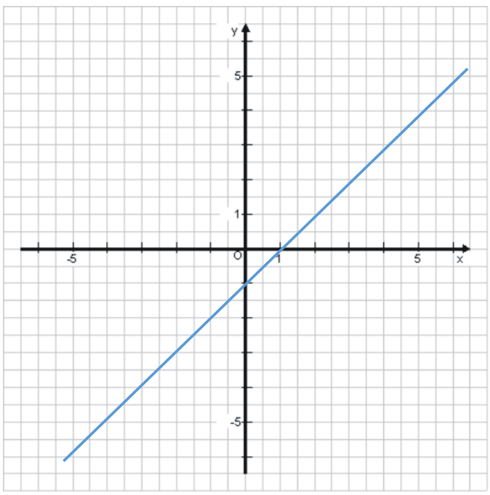
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
9	8	7	4	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

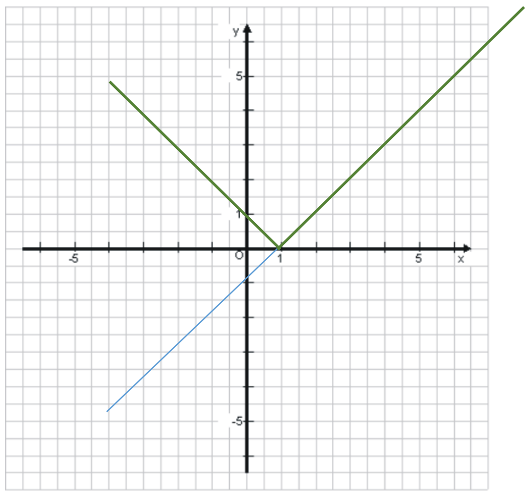
$$f\left(x\right)=\left|\sqrt{x^2-2x+1}-3\right|=\left|\sqrt{\left(x-1\right)^2}-3\right|=\left|\left|x-1\right|-3\right|$$

Graf funkcije crtamo transformacijama:

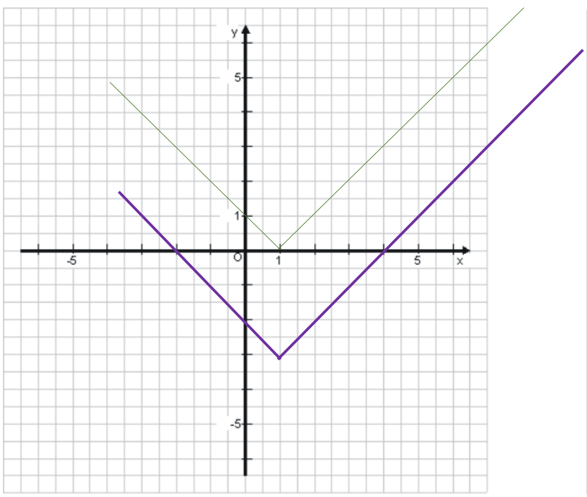
1° $y=x-1$



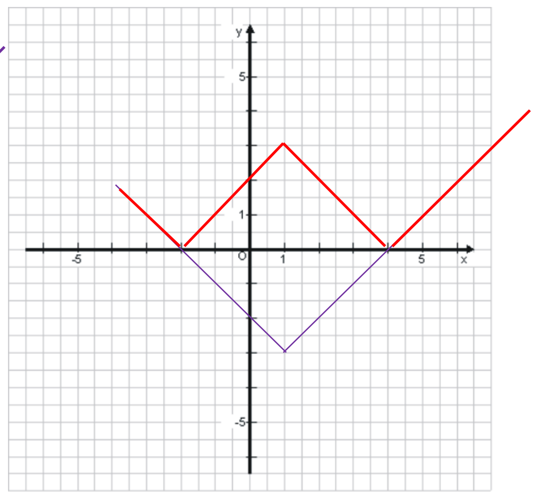
2° $y=\left|x-1\right|$



3° $y=\left|x-1\right|-3$



4° $y=\left|\left|x-1\right|-3\right|$



Površina lika što ga graf funkcije zatvara s pozitivnim dijelom koordinatnih osi: $P=\dfrac{6\cdot 3}{2}-\dfrac{2\cdot 2}{2}=9-2=7$

2.7. Broj djevojčica drugog razreda jedne srednje škole jednak je broju dječaka trećeg razreda te iste škole. Koga ima više: djevojčica u drugom i trećem razredu ili učenika trećih razreda te škole?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Ima ih jednako	Učenika trećih razreda te škole	Djevojčica u drugom i trećem razredu	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj djevojčica $_{\text{drugog razreda}}$ = Broj dječaka $_{\text{trećeg razreda}}$

Broj djevojčica $_{\text{drugog razreda}}$ + Broj djevojčica $_{\text{trećeg razreda}}$ = Broj dječaka $_{\text{trećeg razreda}}$ + Broj djevojčica $_{\text{trećeg razreda}}$

Broj djevojčica $_{\text{drugog razreda}}$ + Broj djevojčica $_{\text{trećeg razreda}}$ = Broj učenika $_{\text{trećeg razreda}}$

2.11. Koliki je imaginarni dio zbroja rješenja sustava $\begin{cases} 3zi+5w=2+3i \\ z-\overline{w}=5+2i \end{cases}$, gdje su $z,w\in\mathbb{C}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Veći od 10	2	4	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$z=a+bi,\ w=x+yi,\ a,b,x,y\in\mathbb{R}.$

Imaginarni dio zbroja rješenja je $\operatorname{Im}(z+w)=b+y$.

$$\begin{cases} 3(a+bi)i+5(x+yi)=2+3i \\ (a+bi)-(x-yi)=5+2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ai-3b+5x+5yi=2+3i \\ a+bi-x+yi=5+2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5x-3b)+(5y+3a)i=2+3i \\ (a-x)+(b+y)i=5+2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-3b=2 \\ 5y+3a=3 \\ a-x=5 \\ b+y=2 \end{cases}$$ => Ne moramo rješavati sustav do kraja jer smo dobili odgovor na pitanje u zadatku!

3.5. Za koji realan parametar *m* jednadžba $x\left(x^2+1\right)=mx^2$ ima točno jedno realno rješenje?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$m<2$	$m<\pm 2$	$-2<m<2$	Ništa od navedenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$x\left(x^2+1\right)=mx^2 \Rightarrow x\left(x^2+1\right)-mx^2=0 \Rightarrow x(x^2+1-mx)=0 \Rightarrow x_1=0 \text{ ili } x^2-mx+1=0$$

S obzirom da dana jednadžba mora imati točno jedno realno rješenje (a to je $x_1=0$) zaključujemo da kvadrata jednadžba ne smije imati realnih rješenja pa joj je diskriminanta negativna.

$$D=b^2-4ac=m^2-4$$

$$D<0 \Rightarrow m^2<4 \Rightarrow |m|<2 \Rightarrow -2<m<2$$

3.6. Pri dijeljenju istim brojem 140 i 188 daju isti ostatak. Koliko takvih brojeva postoji?

A.	B.	C.	D.	E.
7	8	10	11	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

VAŽNO: Ako pri dijeljenju istim brojem dva broja daju isti ostatak to znači da je njihova razlika djeljiva tim brojem! Npr. $24 = 4 \cdot 5 + 4$ i $39 = 7 \cdot 5 + 4$, pa je $39 - 24 = 15 = 3 \cdot 5 + 0$.

Kako pri dijeljenju istim brojem 140 i 188 daju isti ostatak, to znači da je 188 – 140 = 48 djeljiv tim brojem. Zadatak se sveo na to da odredimo sve djelitelje broja 48 a to su: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 i 48. Takvih je brojeva 10.

3.8. Koliko djelitelja ima broj $3^8 - 1$?

A.	B.	C.	D.	E.
18	22	24	20	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$\begin{aligned} 3^8 - 1 &= (3^4 - 1) \cdot (3^4 + 1) \\ &= (3^2 - 1) \cdot (3^2 + 1) \cdot (3^4 + 1) \\ &= (3 - 1) \cdot (3 + 1) \cdot (3^2 + 1) \cdot (3^4 + 1) \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 41 \\ &= 2^5 \cdot 5^1 \cdot 41^1 \end{aligned}$$

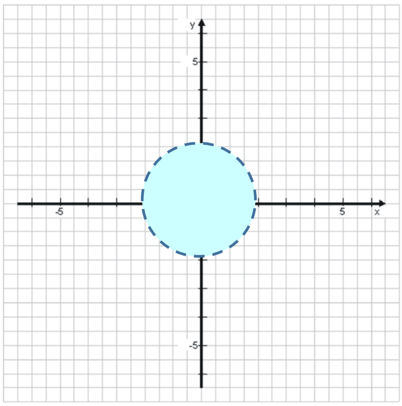
Broj svih djelitelja je $(5+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

3.10. Prikaži u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi: $\begin{cases} |z| < 2 \\ \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z + 2 \end{cases}$. Odredi površinu lika određenog tim sustavom.

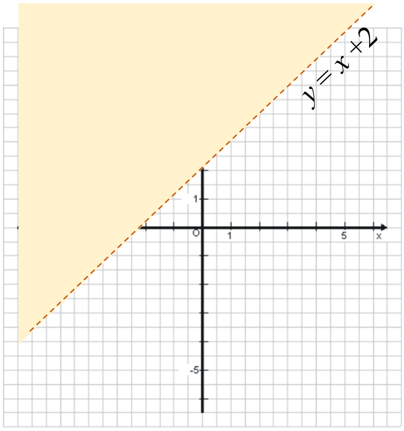
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\pi - 2$	$4\pi - 2$	$2\pi - 2$	$2\pi - 1$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

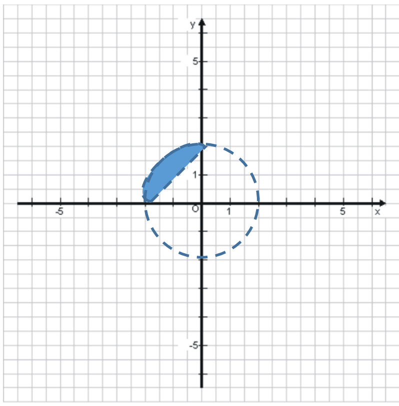
Kompleksni brojevi z za koje vrijedi $|z| < 2$ pripadaju krugu radijusa 2 sa središtem u ishodištu:



Kompleksni brojevi z za koje vrijedi $\operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z + 2$ pripadaju poluravnini na slici:



Kompleksni brojevi z za koje vrijede oba svojstva pripadaju kružnom odsječku kruga radijusa 2:



Površina lika određenog tim sustavom je $\frac{1}{4}r^2\pi - \frac{r^2}{2} = \pi - 2$.

4.5. Što vrijedi za rješenje jednadžbe $\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}=3\binom{n+1}{n}$?

A.	B.	C.	D.	E.
Kvadrat je prirodnog broja	Manji je od 5	Veći je od 10	Djeljiv je sa 6	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}=3\binom{n+1}{n} \Rightarrow \binom{n}{1}+\binom{n}{2}=3\binom{n+1}{1} \Rightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}=3(n+1)$$

$$2n+n^2-n=6n+6 \Rightarrow n^2-5n-6=0 \Rightarrow \cancel{n_1=-1},\ n_2=6$$

n je djeljiv sa 6.

4.7. Luka boji strane drvene kocke u bijelu ili crvenu boju. Koliko različitih kockica može dobiti takvim bojanjem?

A.	B.	C.	D.	E.
12	6	10	8	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Promatrat ćemo slučajeve u ovisnosti o tome koliko je strana obojano crvenom bojom (ostale su bijele).

Broj crvenih strana	Broj načina
0	1
1	1
2	2 (možemo obojati susjedne ili nasuprotne strane)
3	2 (možemo obojati tri strane koje se sastaju u jednom vrhu ili tri strane u nizu)
4	2 (možemo ostaviti neobojane susjedne ili nasuprotne strane)
5	1
6	1

Ukupan broj načina je 10.

4.8. Rješenja jednadžbe $z^5 = 1$ u Gaussovoj ravnini čine vrhove pravilnog peterokuta. Kolika je duljina dijagonale tog peterokuta?

A.	B.	C.	D.	E.
$2\cos 54°$	$2\sin 36°$	$2\sin 72°$	$2\sin 54°$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

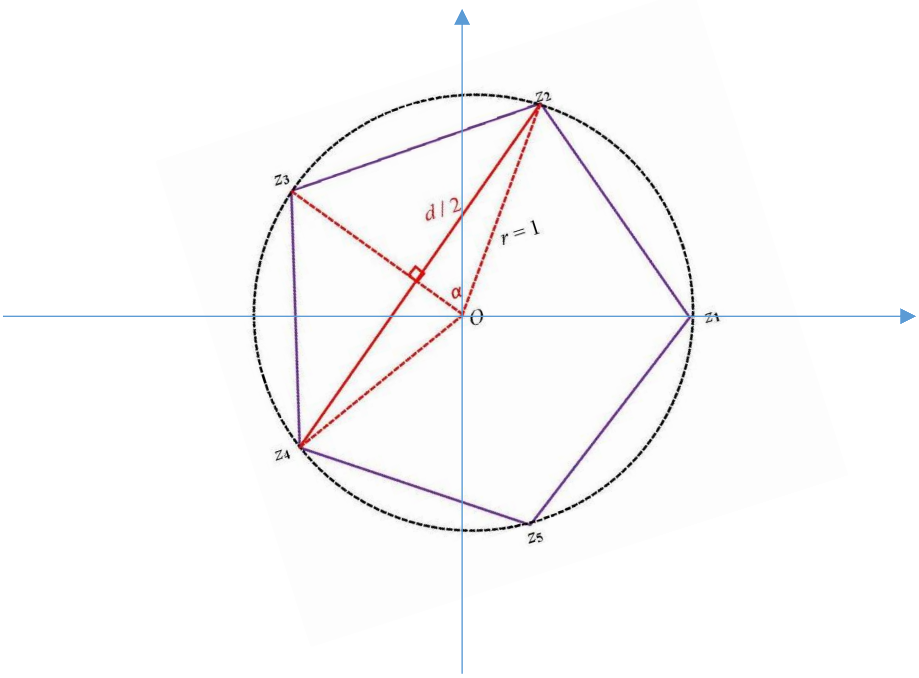
Rješenje:

$$z^5 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \cos\frac{0+2k\pi}{5} + i\sin\frac{0+2k\pi}{5}, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0,\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\ z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\ z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$z_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

Rješenja jednadžbe su vrhovi pravilnog peterokuta čiji je radijus opisane kružnice 1. Primijetimo da nam je ta činjenica dovoljna da odgovorimo na pitanje u zadatku i nije bilo nužno ispisivati sve pete korijene iz z.



$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°,\ \sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad d = 2r\sin\alpha = 2\sin 72°$$

4.9. Ako je $\sin x-\cos y=a$, $\sin y-\cos x=b$ koliko je $\sin(x+y)$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\frac{1-2a^2-2b^2}{2}$	$\frac{1+2a^2+2b^2}{2}$	$\frac{2-a^2-b^2}{2}$	$\frac{2+a^2+b^2}{2}$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$\sin x-\cos y=a \quad\Rightarrow\quad \sin^2 x-2\sin x\cos y+\cos^2 y=a^2$$

$$\sin y-\cos x=b \quad\Rightarrow\quad \sin^2 y-2\sin y\cos x+\cos^2 x=b^2$$

Zbrojimo te dvije jednakosti:

$$\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-2(\sin x\cos y+\sin y\cos x)+\underbrace{\sin^2 y+\cos^2 y}_{1}=a^2+b^2$$

$$-2\sin(x+y)=a^2+b^2-2 \quad\Rightarrow\quad \sin(x+y)=\frac{2-a^2-b^2}{2}$$

4.13. Na dvama usporednim pravcima p i q nalaze se točke A, B, C, D i E. Broj trokuta s vrhovima u tim točkama ovisi o položaju točaka. Ako prebrojimo sve trokute s vrhovima u tim točkama, točke nije moguće postaviti u takav položaj da one određuju najviše:

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
9 takvih trokuta	6 takvih trokuta	3 takva trokuta	0 takvih trokuta	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Promotrimo sve slučaje različitih razmještaja točaka po pravcima:

Jedan pravac	Drugi pravac	Mogući trokuti	Broj mogućih trokuta
A, B, C, D, E	-	-	0
A, B, C, D	*E*	*ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE*	6
A, B, C	*D, E*	*ABD, ABE, ACD, ACE, BCD, BCE* *ADE, BDE, CDE*	9

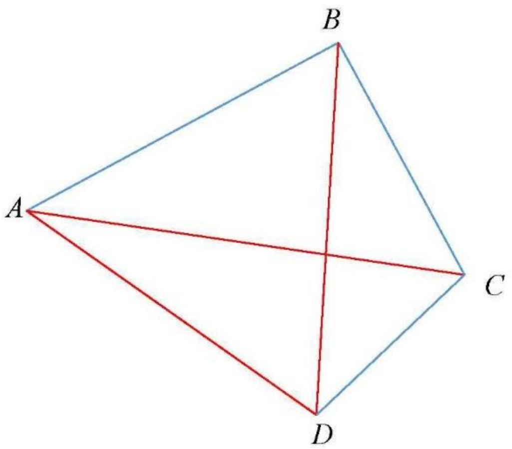
Nije moguće točke postaviti u položaj da određuju 3 trokuta.

4.15. U ravnini je zadano n točaka od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu. Svake dvije točke određuju dužinu obojanu u plavu ili crvenu boju. Koliko najmanje točaka mora biti u ravnini da bismo bili sigurni da među njima postoje tri točke čiji su vrhovi jednobojnog trokuta?

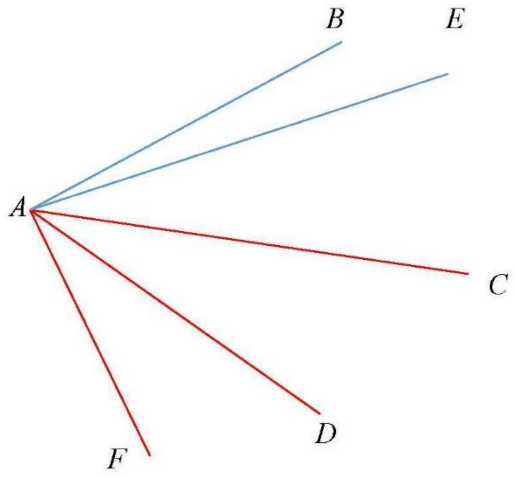
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
4	6	8	Ne možemo biti sigurni	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Ako su u ravnini zadane 4 točke (označimo ih s A, B, C i D), od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu, možemo dužine obojati kao na slici:



Pretpostavimo da je u ravnini zadano 6 točaka (označimo ih s A, B, C, D, E i F), od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu. Iz točke A ide 5 dužina $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$. Od tih 5 dužina sigurno postoje bar 3 koje su iste boje. Pretpostavimo da su crvene boje kao na slici:



Ako je jedna od dužina $\overline{FC}, \overline{CD}, \overline{DF}$ crvene boje tada imamo jednobojni crveni trokut. Ukoliko su sve te tri dužine plave, tada one tvore jednobojni plavi trokut.

Dakle, odgovor na pitanje u zadatku je 6.