Proljetno kolo 2018./2019.

1. Koliki je zbroj svih realnih parametara *a* za koje jednadžba $\frac{a}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x^2-4}$ nema realna rješenja?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
1.25	–3	0	–1.75	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: $\frac{a}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x^2-4} \;\Big|\cdot(x-2)(x+2),\ x\neq\pm2$

$$a(x+2)+3(x-2)=5$$
$$ax+2a+3x-6=5$$
$$(a+3)x=11-2a$$

$a=-3 \quad\Rightarrow\quad 0\cdot x=17$ pa jednadžba nema rješenja.

$$a\neq-3 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11-2a}{a+3}$$

Ali, $x\neq\pm2$, stoga vrijedi: $\frac{11-2a}{a+3}\neq\pm2$. Pogledajmo za koje *a* to vrijedi.

$$\frac{11-2a}{a+3}\neq2 \quad\Rightarrow\quad 11-2a\neq2a+6 \quad\Rightarrow\quad a\neq\frac{5}{4}$$

$\frac{11-2a}{a+3}\neq-2 \quad\Rightarrow\quad 11-2a\neq-2a-6 \quad\Rightarrow\quad 0\cdot a\neq17$ što uvijek vrijedi.

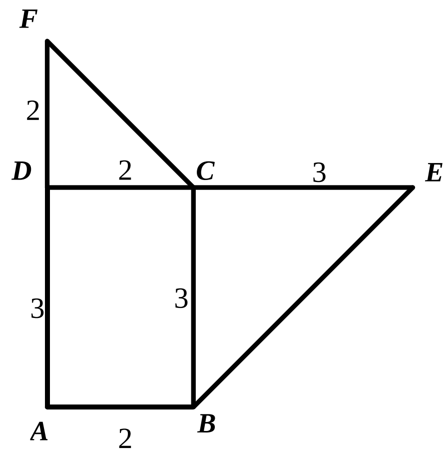
Dakle, za $a=-3$ i $a=\frac{5}{4}$ jednadžba nema rješenja.

$-3+\frac{5}{4}=-\frac{7}{4}=-1.75$. Točan odgovor je D.

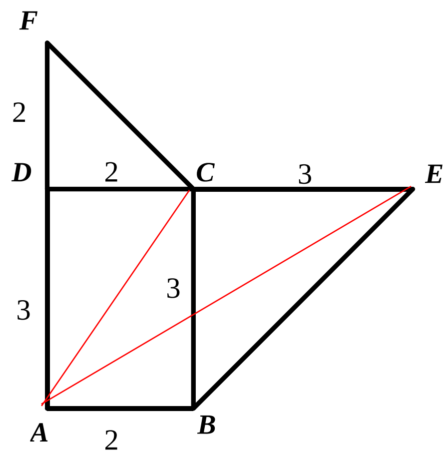
2. Nad stranicom $\overline{BC}$ pravokutnika *ABCD* dugom 3 cm prema van konstruiran je jednakokračan pravokutan trokut *BEC* ($|BC| = |CE|$), dok je nad stranicom $\overline{CD}$ tog pravokutnika dugom 2 cm prema van konstruiran jednakokračan pravokutan trokut *CDF* ($|CD| = |DF|$). Koliki je zbroj površina trokuta *ACE*, *ABF* i *CEF*?

A.	B.	C.	D.	E.
12.5 cm^2	12 cm^2	13.5 cm^2	14 cm^2	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



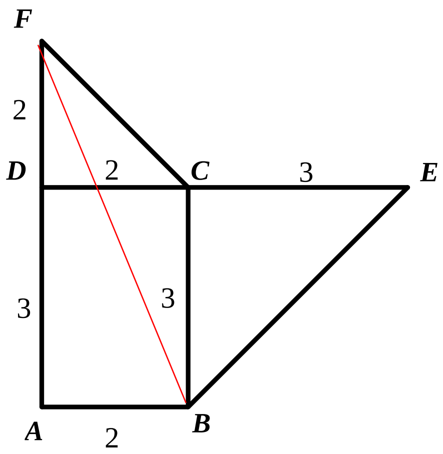
Promotrimo trokut *ACE*:



Promatramo osnovicu $\overline{CE}$ duljine 3 i visinu na tu osnovicu $\overline{DA}$ duljine 3. Površina trokuta je

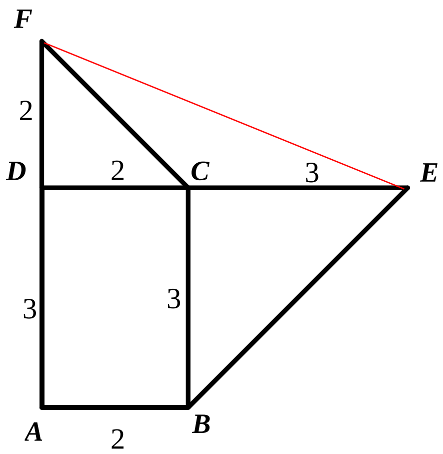
$P_{ACE} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$.

Promotrimo trokut *ABF*:



Trokut je pravokutan s duljinama kateta 2 i 5. Površina trokuta je $P_{ABF} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$.

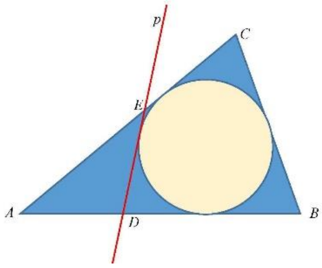
Promotrimo trokut *CEF*:



Promatramo osnovicu $\overline{CE}$ duljine 3 i visinu na tu osnovicu $\overline{DF}$ duljine 2. Površina trokut je $P_{CEF} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$

Zbroj površina trokuta *ACE*, *ABF* i *CEF* je $\frac{9}{2} + 5 + 3 = \frac{25}{2} = 12.5$ cm^2. Točan odgovor je A.

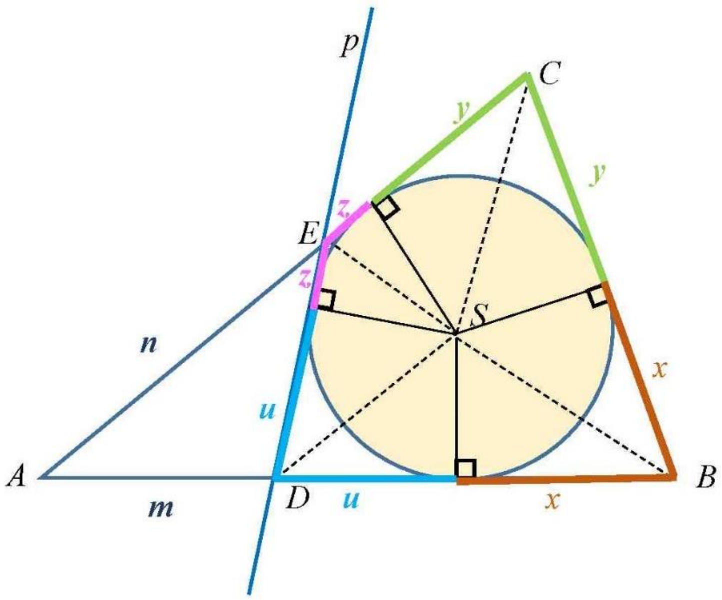
3. Trokutu *ABC* upisana je kružnica kojoj je $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 8$ cm i $|CA| = 12$ cm. Pravac *p* dira kružnicu. Koliki je opseg trokuta *ADE*?



A. 13 cm	**B.** 7 cm	**C.** 17 cm	**D.** Ne može se odrediti	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Središte trokutu upisane kružnice sjecište je simetrala kuteva.



$$|AB| = 13 \quad \Rightarrow \quad m + u + x = 13$$

$$|BC| = 8 \quad \Rightarrow \quad x + y = 8$$

$$|CA| = 12 \quad \Rightarrow \quad n + z + y = 12$$

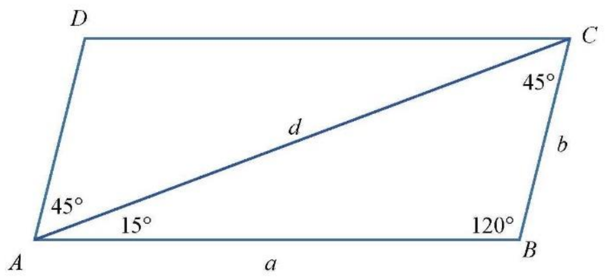
Trebamo izračunati opseg trokuta *ADE* što je $m + u + z + n$. Ako zbrojimo prvu i treću jednakost dobivamo da je $m + n + u + z + x + y = 13 + 12$, pa je $m + n + u + z = 17$. Odgovor na pitanje je C.

8

4. Dulja dijagonala paralelograma duljine $3\sqrt{2}$ cm zatvara sa stranicama paralelograma kutove od 15^0 i 45^0. Odredite površinu paralelograma.

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6 cm^2	$9-3\sqrt{3}$ cm^2	$\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ cm^2	Ništa od navedenog	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



Izračunat ćemo površinu trokuta *ABC*: $P_{ABC} = \frac{1}{2} bd \sin 45° = \frac{d^2 \sin 15° \sin 45°}{2 \sin 120°}$.

$$\sin 15° = \sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$P_{ABC} = \frac{d^2 \sin 15° \sin 45°}{2 \sin 120°} = \frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2}$, pa je površina paralelograma $9-3\sqrt{3}$ cm^2.

Točan je odgovor B.

5. 2019-znamenkastom broju 2019201920…20192019201 želimo dopisati 2020-tu znamenku na mjestu jedinice tako da dobiveni broj bude djeljiv s 18. Koju znamenku trebamo dopisati?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
8	6	4	9	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

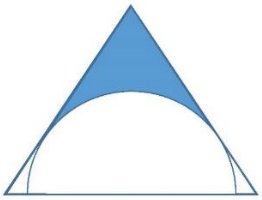
Broj $x = \overline{20192019...2019201a}$ ima 2020 znamenki. Kako je 2020 : 4 = 505, broj se sastoji od 504 četvorki brojeva 2019, te znamenki 201*a*.

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj svih znamenki djeljiv s 9. Izračunajmo zbroj svih znamenki broja *x*:

$$505 \cdot (2+0+1) + 504 \cdot 9 + a = 6051 + a = 9 \cdot 672 + 3 + a$$

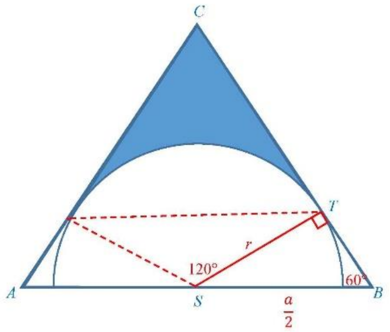
Da bi *x* bio djeljiv s 9, *a* mora biti jednako 6. Točan odgovor je B.

6. U jednakostraničan trokut duljine stranice 8 cm upisan je polukrug kao na slici. Kolika je površina osjenčanog dijela?

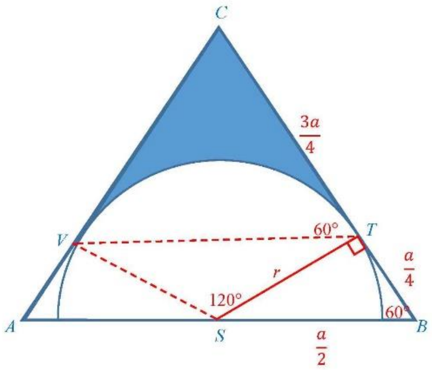


A.	B.	C.	D.	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje
$12\sqrt{3}-6\pi$	$16\sqrt{3}-12\pi$	$12\sqrt{3}-4\pi$	$21\sqrt{3}-4\pi$	

Rješenje:



Trokut SBT ima kutove $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ pa je $|BT| = \frac{a}{4}$ i $|ST| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Trokut VTC je jednakostraničan i površina mu je $P_{VTC} = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm². Kada od površine tog trokuta oduzmemo površinu kružnog odsječka, dobiti ćemo osjenčanu površinu.

Površina trokuta VST jednaka je površini jednakostraničnog trokuta duljine stranice r: $P_{VST} = r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ cm². Površina kružnog odsječka: $P_{odječka} = P_{isječka} - P_{\triangle VST} = \frac{1}{3} r^2 \pi - r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\pi - 3\sqrt{3}$ cm².

Osjenčana površina: $P_{osjenčana} = P_{\triangle VTC} - P_{odsječak} = 9\sqrt{3} - (4\pi - 3\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} - 4\pi$ cm². Točan odgovor je C.

7. Koji od ponuđenih linearnih izraza nije faktor u rastavu polinoma $x^4+8x^3-18x^2-72x+81$?

A.	B.	C.	D.	E.
$x+9$	$x-9$	$x+3$	$x-1$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
x^4+8x^3-18x^2-72x+81 &= \left(x^2-9\right)^2+8x\left(x^2-9\right)\\
&= \left(x^2-9\right)\left(x^2-9+8x\right)\\
&= (x-3)(x+3)(x+9)(x-1)
\end{aligned}
$$

Točan odgovor je B.

8. Najveći zajednički djelitelj dvaju brojeva je 12, a njihov je najmanji zajednički višekratnik 240. Koliko parova takvih brojeva postoji?

A.	B.	C.	D.	E.
1	2	3	4	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: D $(a, b) = 12$, V $(a, b) = 240$

Važno: **D $(a, b) \cdot$ V $(a, b) = a \cdot b$**

Dakle, umnožak traženih brojeva je $12 \cdot 240 = 2880$. S obzirom da je njihov najveći zajednički djelitelj 12, oba broja imaju faktor 12.

$2880 = 12 \cdot 12 \cdot 20$

Promotrimo mogućnosti:

a	b	D (a, b)
$12 \cdot 1$	$12 \cdot 20$	12
~~$12 \cdot 2$~~	~~$12 \cdot 10$~~	~~24~~
$12 \cdot 4$	$12 \cdot 5$	12

Rješenja su parovi 12 i 420, te 48 i 60. Točan odgovor je B.

9. Duljine stranica trokuta su 3.14 cm i 7.2 cm. Ako je duljina treće stranice trokuta paran prirodni broj, koliko takvih trokuta postoji?

A.	B.	C.	D.	E.
6	3	2	Ništa od navedenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

a = 3.14 cm, b = 7.2 cm.

VAŽNO: Zbroj svake dvije stranice trokuta mora biti veći od duljine treće stranice!

$$a+b>c \quad \Rightarrow \quad 10.34>c$$

$$b+c>a \quad \Rightarrow \quad 7.2+c>3.14 \text{ za svaki } c$$

$$a+c>b \quad \Rightarrow \quad 3.14+c>7.2 \quad \Rightarrow \quad c>4.06$$

Kako je c **paran** prirodan broj koji mora zadovoljiti uvjet $4.06<c<10.34$, c može biti 6 ili 8 ili 10. Točan odgovor je B.

10. Za koje realne parametre a će nejednakost $(x-a)(2x+a)>a$ biti ispunjena za sve $x\in\mathbb{R}$?

A.	B.	C.	D.	E.
$-\frac{8}{9}<a<0$	$0<a<\frac{8}{9}$	$a\notin\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$(x-a)(2x+a)>a \text{ za sve } x\in\mathbb{R} \Rightarrow 2x^2-ax-a(a+1)>0 \text{ za sve } x\in\mathbb{R}$$

Kvadratna funkcija je pozitivna za sve $x\in\mathbb{R}$ ako joj je vodeći koeficijent pozitivan i nema realne nultočke (diskriminanta negativna).

$$D=a^2+8a(a+1)=a(8+9a)<0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{8}{9}<a<0$$

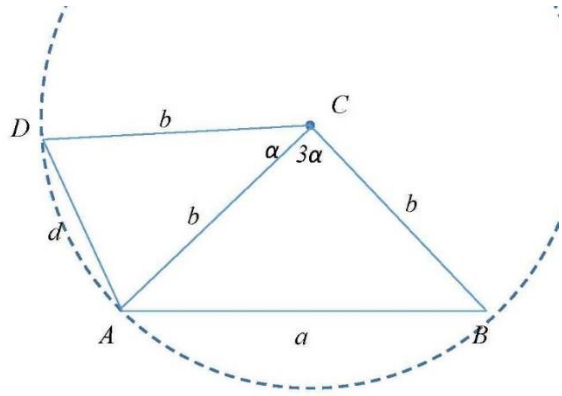
Točan odgovor je A.

11. Dijagonala $\overline{AC}$ trapeza $ABCD$ jednako je duga kao krak $\overline{BC}$ i kao osnovica $\overline{CD}$. Ona dijeli kut trapeza u vrhu C u omjeru 3 : 1, pri čemu je veći kut uz krak. Koliki je najmanji kut tog trapeza?

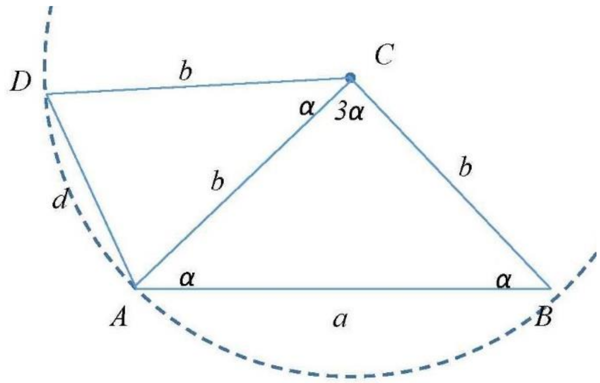
A.	B.	C.	D.	E.
30°	33°	25°	36°	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Skicirajmo zadano:



Kut $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD = \alpha$ jer su to kutovi uz presječnicu. Jer je trokut ABC jednakokračan, $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = \alpha$.



Zbroj kutova u trokutu *ABC* je 180°, pa je $5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$. Preostalo nam je odrediti kutove u trokutu *ACD*. S obzirom da je taj trokut jednakokračan, kutovi uz osnovicu su $90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - 18° = 72°$. Očito je najmanji kut u četverokutu *ABCD* kut $\measuredangle ABC = \alpha = 36°$. Točan odgovor je D.

12. Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe $\log_4(\cos 3x) = -0.5$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$\log_4(\cos 3x) = -0.5 \quad \Rightarrow \quad \cos 3x = 4^{-0.5} \quad \Rightarrow \quad \cos 3x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$x \in \langle 0, \pi \rangle$ i $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ zadovoljavaju samo $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}$, pa je točan odgovor B.

13. Četveroznamenkastom broju dodamo troznamenkast broj koji dobijemo kada početnom broju obrišemo znamenku na mjestu tisućica i dobijemo zbroj 5246. Koliko četveroznamenkastih brojeva zadovoljava to svojstvo?

A.	B.	C.	D.	E.
3	1	2	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$\overline{abcd}+\overline{bcd}=5246 \quad \Rightarrow \quad 1000a+2\cdot\overline{bcd}=5246$$

Najveća moguća vrijednost broja $2\cdot\overline{bcd}$ je $2\cdot 999=1998$, pa je najmanja moguća vrijednost broja $1000a$ 3248. To znači da a može biti 3 ili 4.

$$a=4 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\overline{bcd}=1246 \quad \Rightarrow \quad \overline{bcd}=623 \quad \Rightarrow \quad \overline{abcd}=4623$$

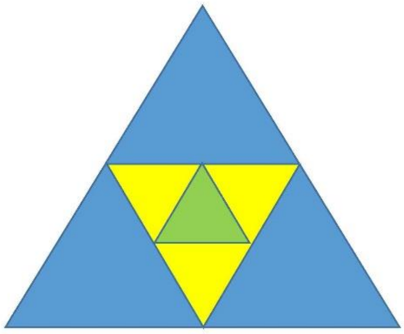
$$a=5 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\overline{bcd}=246 \quad \Rightarrow \quad \overline{bcd}=123 \quad \Rightarrow \quad \overline{abcd}=5123$$

Točna odgovor je C.

14. U jednakostraničan trokut duljine stranice a upisan je jednakostraničan trokut tako da su njegove stranice paralelne stranicama početnog trokuta. U taj trokut upisan je novi jednakostraničan trokut itd. Nađi zbroj površina svih trokuta.

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



Kada u jednakostraničan trokut duljine stranice a upišemo jednakostraničan trokut tako da su njegove stranice paralelne stranicama početnog trokuta, njegova stranica je dvostruko kraća od stranice početnog trokuta, što znači da mu je površina četiri puta manja.

$$P_1+P_2+\ldots=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}+\ldots=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

Točan odgovor je B.

15. Rješenje jednadžbe $\log_2 x+\log_2^2 x+\log_2^3 x+\ldots=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+2}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$ je:

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[4]{32}$	$\sqrt[5]{16}$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$\log_2 x+\log_2^2 x+\log_2^3 x+\ldots=\dfrac{\log_2 x}{1-\log_2 x}$ uz uvjete $x>0$ i $\left|\log_2 x\right|<1 \quad\Rightarrow -1<\log_2 x<1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{2}<x<2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+2}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+2}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+6n+2}+\sqrt{n^2+2n-3}}{\sqrt{n^2+6n+2}+\sqrt{n^2+2n-3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+2-\left(n^2+2n-3\right)}{\sqrt{n^2+6n+2}+\sqrt{n^2+2n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^2+6n+2}+\sqrt{n^2+2n-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}}=\frac{4}{2}=2$$

Dakle, dobili smo jednadžbu $\dfrac{\log_2 x}{1-\log_2 x}=2 \quad\Rightarrow\quad \log_2 x=\dfrac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt[3]{4}$