Jesensko kolo 2019./2020.

1. Koliko postoji različitih brojeva *a* koji nisu prosti i za koje vrijedi $V(a,48)=48$?

A.	B.	C.	D.	E.
8	7	6	Ništa od navedenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Iz $V(a,48)=48$ zaključujemo da je 48 višekratnik broja *a*, pa je *a* djelitelj broja 48. Napišimo sve djelitelje broja 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Ukupan broj djelitelja je 10, ali među njima samo brojevi 1, 4, 6, 8, 12, 16, 24 i 48 nisu prosti. Točan odgovor je **A**.

2. Troznamenkasti broj *x* pri dijeljenju s 5, 6 i 9 daje ostatak 1. Koliki je zbroj svih brojeva *x* s tim svojstvom?

A.	B.	C.	D.	E.
5860	4059	4869	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Ako troznamenkasti broj *x* pri dijeljenju s 5, 6 i 9 daje ostatak 1, onda je broj $x-1$ djeljiv s 5, 6 i 9. Broj je djeljiv s 5, 6 i 9, pa je djeljiv s njihovim najmanjim zajednički višekratnikom $V(5,6,9)=90$.

Troznamenkastih brojeva $x-1$ djeljivi s brojem 90 je 10 i to su: 990, 900, 810,…, 180, pa *x* može biti 991, 901, 811,…, 181.

$991 + 901 + 811 + \ldots + 271 + 181 = (991 + 181) + (901 + 271) + \ldots + (631 + 541) = 1172 \cdot 5 = 5860$

Točan odgovor je **A**.

3. Zadan je pravokutnik *ABCD* duljina stranica 2 cm i 3 cm. Točke *A*, *B* i *C* ujedno su i vrhovi trapeza površine 18 cm^2 kojima je jedna osnovica stranica pravokutnika. Nacrtajte sve trapeze s danim svojstvom i uočite njihovu najdulju stranicu. Koliki je zbroj duljina duljih osnovica svih mogućih tako dobivenih trapeza?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
35 cm	25 cm	50 cm	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

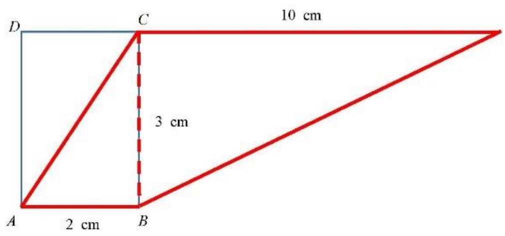
Rješenje:

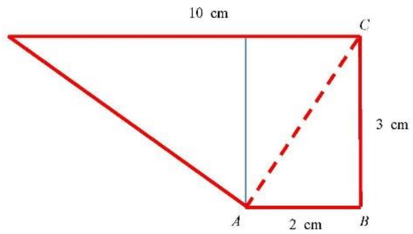
S obzirom da su točke *A*, *B* i *C* ujedno i vrhovi trapeza površine 18 cm^2 kojima je jedna osnovica stranica pravokutnika, postoje dvije mogućnosti:

1. Duljina osnovice trapeza je 2 cm. Tada je duljina visine trapeza 3 cm. Iz površine ćemo izračunati duljinu druge osnovice trapeza.

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v \quad \Rightarrow \quad 18=\frac{2+c}{2}\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad c=10\,\text{cm}$$

Nacrtajmo sve trapeze s tim svojstvom:

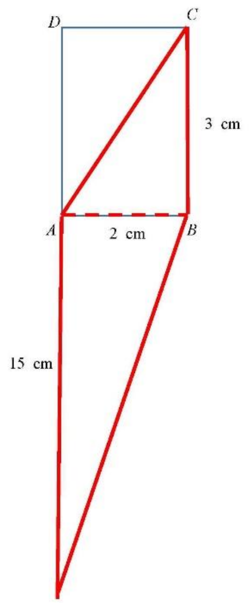


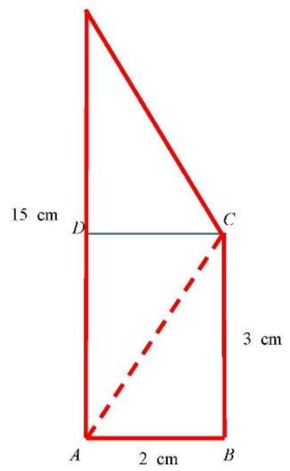


2. Duljina osnovice trapeza je 3 cm. Tada je duljina visine trapeza 2 cm. Iz površine ćemo izračunati duljinu druge osnovice trapeza.

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v \quad \Rightarrow \quad 18=\frac{3+c}{2}\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad c=15\,\text{cm}$$

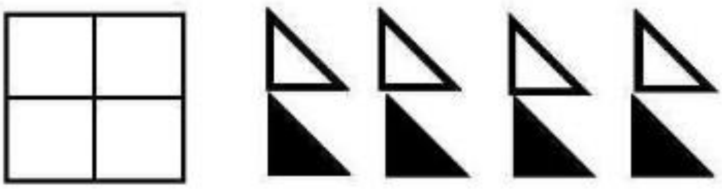
Nacrtajmo sve trapeze s tim svojstvom:





Zbroj duljina duljih osnovica svih mogućih tako dobivenih trapeza je 10 + 10 +15 + 15 = 50 cm. Točan odgovor je **C**.

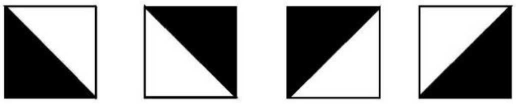
4. Na podu hodnika je mozaik oblika kvadrata podijeljen na 4 kvadratna dijela (kao na slici). Mozaik se može složiti od točno 8 pločica oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta, četiri bijele i četiri crne. Ako se svaki kvadratni dio mozaika mora složiti od jedne bijele i jedne crne pločice, na koliko različitih načina se može složiti taj mozaik?



A.	B.	C.	D.	E.
16	256	64	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Jedan kvadratić možemo popločati na četiri načina:



S obzirom da popločavamo četiri kvadratića i svaki možemo popločati na četiri načina, ukupan broj načina da popločamo pod je $4\cdot4\cdot4\cdot4=256$. Točan odgovor je **B.**

5. Zadani su skupovi $A=\{n\in\mathbf{N}:n<50, n=5k-1, k\in\mathbf{N}\}$, $B=\mathbf{R}\setminus\langle-\infty,4\rangle$ i $C=\{m\in\mathbf{Z}:|m-2|\leq10\}$. Koji od navedenih skupova u rješenjima ima najviše elemenata?

A.	B.	C.	D.	E.
$A\cap B$	$C\setminus B$	$(C\cap A)\setminus B$	$B\cap C$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$A=\{n\in\mathbf{N}:n<50, n=5k-1, k\in\mathbf{N}\}=\{4,9,14,19,24,29,34,39,44,49\}$

$B=\mathbf{R}\setminus\langle-\infty,4\rangle=[4,\infty\rangle$

$C=\{m\in\mathbf{Z}:|m-2|\leq10\}=\{-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$A\cap B=A=\{4,9,14,19,24,29,34,39,44,49\}$

$C\setminus B=\{-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$(C\cap A)\setminus B=\{4,9\}\setminus B=\varnothing$

$B\cap C=\{4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

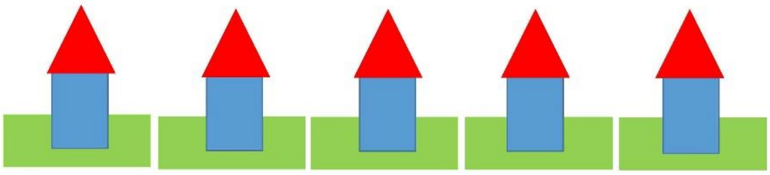
Točan odgovor je **B.**

6. Negacija tvrdnje „Sve kuće u ulici imaju krov i imaju dvorište“ je:

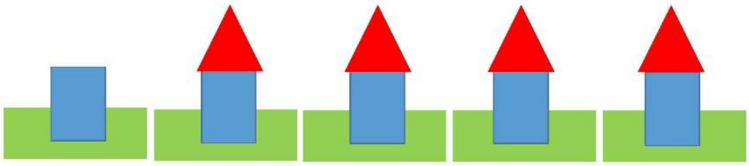
A. Sve kuće u ulici nemaju krov i nemaju dvorište	**B.** Sve kuće u ulici nemaju krov ili imaju dvorište	**C.** Postoji kuća u ulici koja nema krov i nema dvorište	**D.** Postoji kuća u ulici koja nema krov ili nema dvorište	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

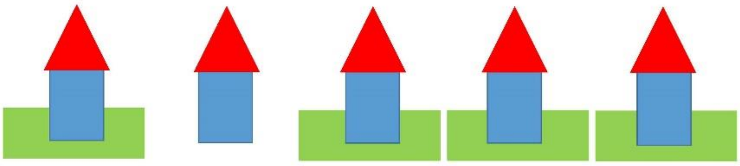
Skicirajmo izjavu „Sve kuće u ulici imaju krov i imaju dvorište“. Pretpostavimo da je u ulici 5 kuća. Sve imaju krov i sve imaju dvorište:



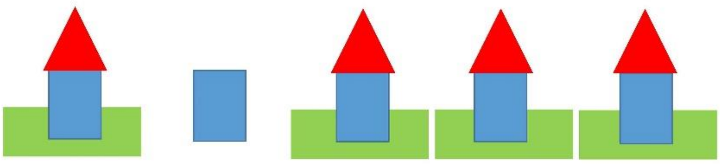
Ako ta izjava nije točna, to znači da može biti moguća bilo koja od sljedećih situacija:



- postoji kuća koja nema krov



- postoji kuća koja nema dvorište



- postoji kuća koja nema ni krov ni dvorište

- sve kuće nemaju ni krov ni dvorište

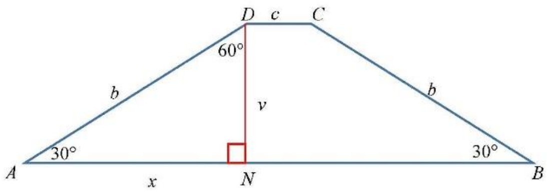
Jednino što možemo biti sigurni je da postoji kuća koja nema krov ili nema dvorište. Točan odgovor je **D**.

7. Kutovi uz osnovicu trapeza opsega 60 cm imaju mjeru 30º. Izračunaj duljinu visine trapeza najveće moguće površine.

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
7.5 cm	$\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm	$5\sqrt{3}$ cm	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Trapez je jednakokračan jer su mu kutovi uz osnovicu mjere 30º. Njegov opseg je 60 cm što znači da je $a+2b+c=60$.



Trokut *AND* ima kutove 30° - 60° - 90° pa je $v=\frac{b}{2}$.

Površina trapeza je $P=\frac{a+c}{2}\cdot v$. Želimo izraziti sve veličine preko iste (duljine kraka *b*): $a+c=60-2b$

$v=\frac{b}{2}$, dakle $P(b)=\frac{60-2b}{2}\cdot\frac{b}{2}=(30-b)\cdot\frac{b}{2}=-\frac{1}{2}b^2+15b$.

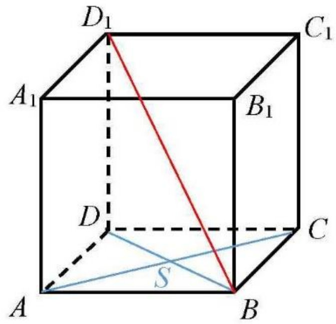
Maksimalnu vrijednost ova kvadratna funkcija dostiže za $b_0=-\frac{15}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=15$. Tada je $v=\frac{b}{2}=7.5$ cm.

Točan odgovor je **A.**

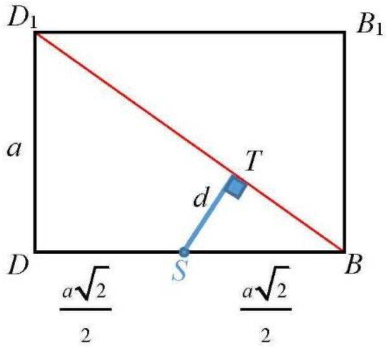
8. Koliko je središte baze kocke duljine brida a udaljeno od njezine prostorne dijagonale?

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{a}{2}$ cm	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$ cm	$\frac{a\sqrt{6}}{2}$ cm	Ništa od navedenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:



Da bismo odredili udaljenost točke S od prostorne dijagonale, promatrat ćemo presjek kocke okomit na bazu koji sadrži prostornu dijagonalu:



Trokuti BST i BD_1D su slični po K-K pa su stranice proporcionalne:

$$\frac{|ST|}{|SB|}=\frac{|DD_1|}{|BD_1|} \Rightarrow \frac{d}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow d=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{6}a$$

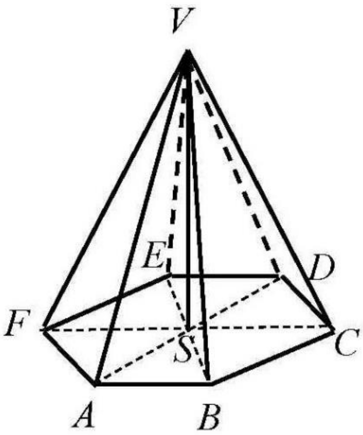
Točan odgovor je **B**.

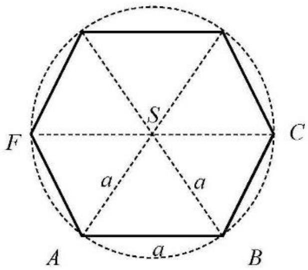
9. Zadana je pravilna šesterostrana piramida čija je duljina osnovnoga brida a tri puta manja od duljine bočnoga brida b. Koliki je omjer obujma te piramide i obujma kocke s istim osnovnim bridom a?

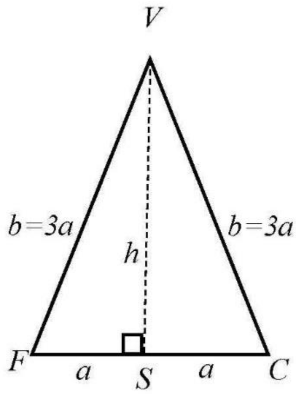
A.	B.	C.	D.	E.
$1:3$	$\sqrt{2}:2$	$\sqrt{6}:2$	$\sqrt{6}:1$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$V_{kocka} = a^3$







$h = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}\,a$

$V_6 = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot 2\sqrt{2}a = \sqrt{6}\,a^3$

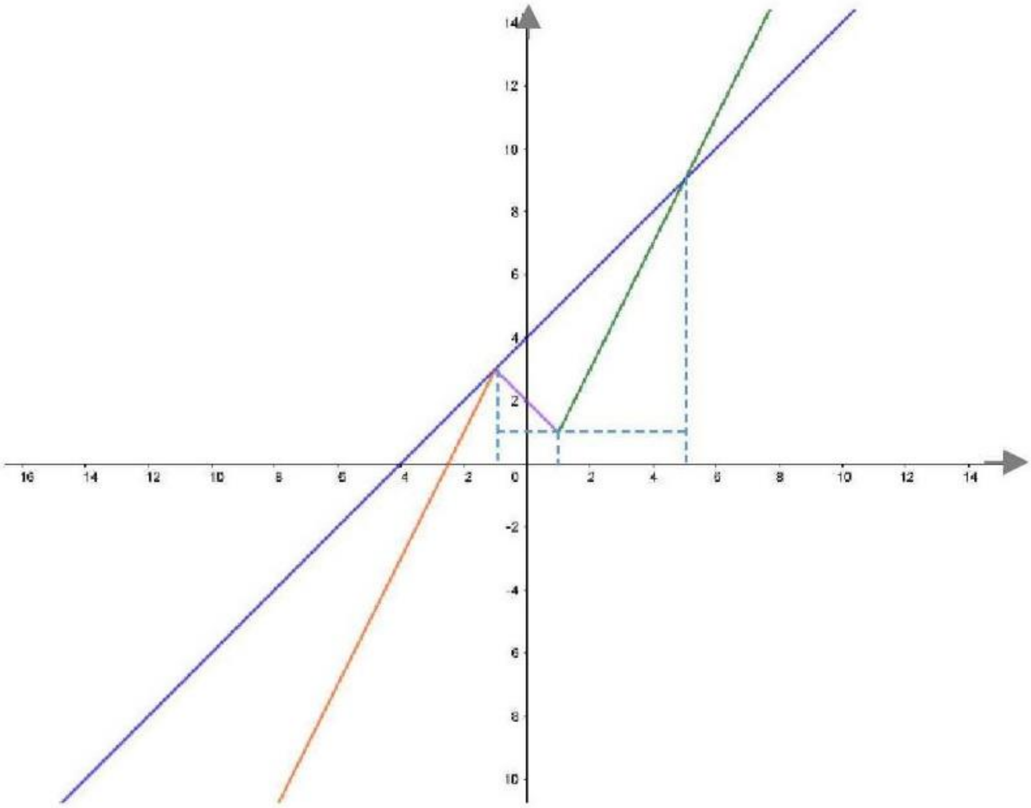
$V_6 : V_{kocke} = \sqrt{6} : 1$ pa je točan odgovor **D**.

10. Kolika je površina lika omeđenog grafovima funkcija $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x\le -1 \\ -x+2, & -1<x<1 \\ 2x-1, & x\ge 1 \end{cases}$ i $g(x)=x+4$?

A. 12 kv.j.	**B.** 18 kv.j.	**C.** 14 kv.j.	**D.** Ništa od ponuđenoga	**E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x\le -1 \\ -x+2, & -1<x<1, \\ 2x-1, & x\ge 1 \end{cases} \quad g(x)=x+4$$



Iz površine pravokutnog trapeza moramo oduzeti površine dvaju pravokutnih trokuta:

$P=\frac{8+2}{2}\cdot 6-\frac{4\cdot 8}{2}-\frac{2\cdot 2}{2}=12$ kv. jed. Točan odgovor je **A**.

11. Zbroj svih rješenja jednadžbe $\sqrt{2}\sin x-\cos^2 2x=\sin^2 2x$ u intervalu $\left\langle -\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\rangle$ je:

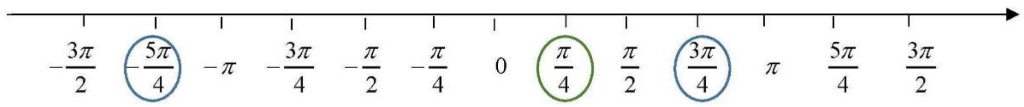
A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$\sqrt{2}\sin x-\cos^2 2x=\sin^2 2x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}\sin x=\cos^2 2x+\sin^2 2x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}\sin x=1$

$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x_2=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$

Nađimo $x\in\left\langle -\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\rangle$:



$-\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$. Točan odgovor je **C**.

12. Kolika je razlika brojnika i nazivnika potpuno skraćenog razlomka $\frac{\left(x^2-3x-4\right)^2}{x^4-(16-8x)^2}$?

A.	B.	C.	D.	E.
17 + 10*x*	17 – 10*x*	17 – 6*x*	Ništa od ponuđenoga	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$x^2-3x-4=x^2+x-4x-4=x(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x-4)$

$x^4-(16-8x)^2=\left(x^2-(16-8x)\right)\left(x^2+(16-8x)\right)=\left(x^2-16+8x\right)\left(x^2+16-8x\right)=\left(x^2-16+8x\right)(x-4)^2$

$\frac{\left(x^2-3x-4\right)^2}{x^4-(16-8x)^2}=\frac{(x+1)^2(x-4)^2}{\left(x^2+8x-16\right)(x-4)^2}=\frac{(x+1)^2}{x^2+8x-16}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x-16}$

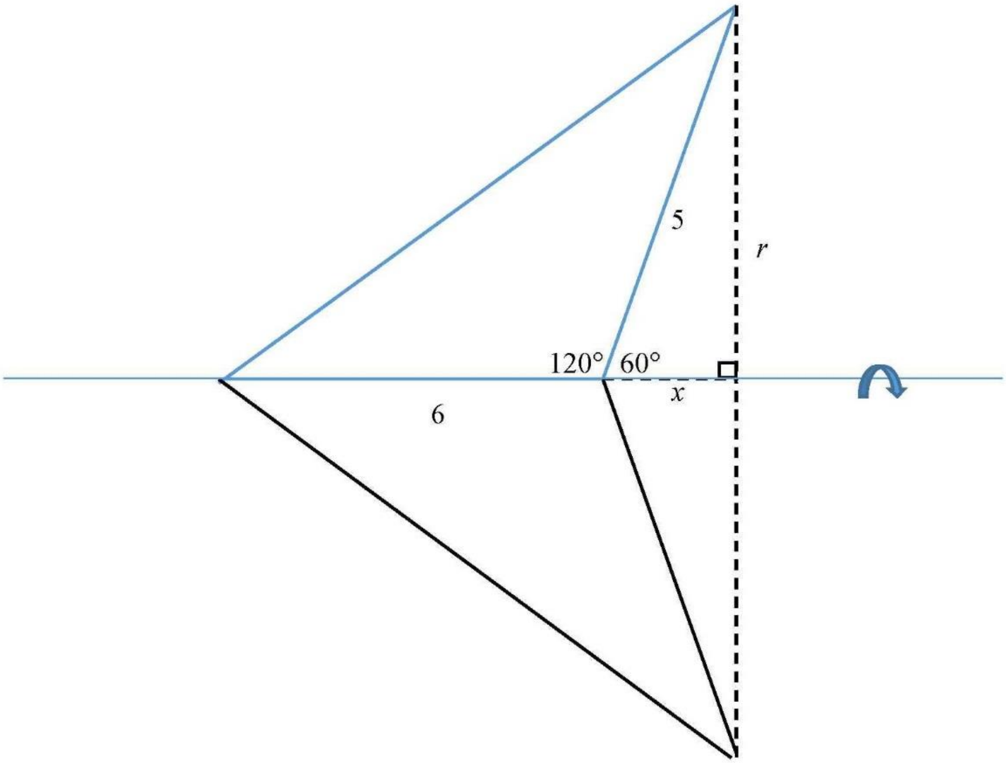
Razlika brojnika i nazivnika potpuno skraćenog razlomka je $\left(x^2+2x+1\right)-\left(x^2+8x-16\right)=-6x+17$.

Točan odgovor je **C**.

13. Trokut čije stranice duljina 5 cm i 6 cm zatvaraju kut od 120° rotira oko srednje po duljini stranice trokuta. Odredite obujam rotacionog tijela.

A.	B.	C.	D.	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje
60π cm^3	$\frac{75\pi}{2}$ cm^3	50π cm^3	90π cm^3	

Rješenje:



Da bi odredili obujam rotacionog tijela, iz obujma velikog stošca moramo oduzeti obujam malog stošca:

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot(6+x)-\frac{1}{3}r^2\pi\cdot x=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot 6=2r^2\pi$$

Očito je $r=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm pa je $V=2\cdot\frac{75}{4}\cdot\pi=\frac{75\pi}{2}$ cm^3. Točan odgovor je **B**.