# Zimsko kolo 2019./2020.

1. Tina ove godine ima rođendan u četvrtak. Koji dan u tjednu ove godine ima rođendan njezina prijateljica Tena koja je od nje starija 52 dana?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A.** ponedjeljak | **B.** utorak | **C.** srijeda | **D.** nedjelja | **E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje |

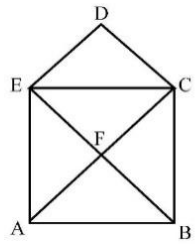
Rješenje:

S obzirom da tjedan ima 7 dana podijelimo 52 sa 7:

$$52 = 7 \cdot 7 + 3$$

Dakle, Tena je rođena 7 tjedana i 3 dana prije Tine, pa se od četvrtka moramo vratiti unazad za 3 dana i dobijemo ponedjeljak. Točan odgovor je **A**.

2. Katarina želi nacrtati lik kao na slici u jednom potezu tj. tako da ne diže olovku s papira i da ni jednom crtom ne prođe dva puta. Iz koliko od ovih 6 točaka može krenuti da bi to uspjela napraviti?




| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** | **E.** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 6 | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

Primijetimo da, s obzirom da niti jednom dužinom ne smijemo proći dva puta, iz nje (ako ona nije početna niti krajnja točka našeg puta) mora izlaziti paran broj dužina (svakom ulasku u tu točku jednom dužinom mora odgovarati druga dužina kojom ćemo izaći iz te točke). Početna točka našeg puta može imati neparan broj dužina jer nije nužno da se vratimo u tu točku. Isto vrijedi i za krajnju točku našeg puta.

Prebrojimo sada broj dužina u svakoj točki našeg lika:

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 4 |

Od šest točaka postoje dvije s neparnim brojem dužina (A i B) pa one moraju biti krajnja i početna točka puta.

Pokažimo jednu moguću putanju:

A – F – C – B – F – E – D – C – E – A – B.

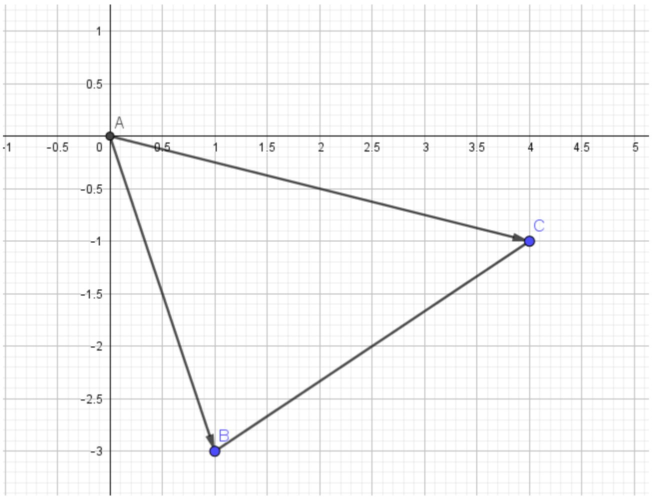
Točan odgovor je **B**.

3. Odredite kosinus najvećeg kuta trokuta $ABC$ ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j}$ i $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - \vec{j}$.

| A. | B. | C. | D. | E. |
|---|---|---|---|---|
| $-\frac{9\sqrt{190}}{190}$ | $\frac{3\sqrt{130}}{130}$ | $-\frac{7\sqrt{170}}{170}$ | $-\frac{9\sqrt{130}}{130}$ | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

Skicirajmo dane vektore u koordinatnom sustavu:




Izračunajmo duljine stranica trokuta:

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}\ c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\,.$$

Najdulja stranica trokuta je $b$, pa je najveći kut trokuta $\beta$. Dakle, izračunat ćemo kut između vektora $\overrightarrow{BA} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-1 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3\sqrt{130}}{130}\,.$$

Točan odgovor je **B**.

4. Koji je od navedenih intervala rješenje nejednadžbe $\sqrt{2x+1} > x-1$?

| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** | **E.** |
|---|---|---|---|---|
| $x \in [1,4\rangle$ | $x \in \mathbf{R} \setminus \langle 0,4\rangle$ | $x \in \langle 0,4\rangle$ | Ništa od ponuđenoga | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

Nejednadžba je definirana samo za $2x+1 \geq 0$ tj. $x \geq -\frac{1}{2}$. Promotrimo dva slučaja:

1) $x-1<0$ tj. $x<1$

Tada bi drugi korijen bio veći od negativnog broja, što uvijek vrijedi, pa su rješenje ovog slučaja svi realni brojevi $x$ iz uvjeta.
$\Rightarrow x<1$.

2) $x-1 \geq 0$ tj. $x \geq 1$

Obje strane nejednakosti su nenegativne i možemo ih kvadrirati:

$2x+1>(x-1)^2$

$2x+1>x^2-2x+1$

$0>x^2-4x$

$0<x<4$

Dobiven sustav nejednakosti presiječemo s $x \geq 1$ i dobivamo rješenje drugog slučaja $1 \leq x < 4$.

Unija rješenja oba slučaja su $x<4$, ali mora biti ispunjen i početni uvjet $x \geq -\frac{1}{2}$ što nas dovodi do konačnog rješenja nejednadžbe: $x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right\rangle$. Točan odgovor je **D**.

5. Zbroj dva prirodna broja je 1 882. Ako jednom broju dopišemo znamenku 8 na mjesto jedinice dobit ćemo dvostruko veći broj od drugog broja. Koliki je zbroj znamenaka drugog broja?

| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** | **E.** |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 23 | 21 | Ne može se odrediti | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

Zbroj dva prirodna broja je 1 882 $\Rightarrow x+y=1882$.

Ako jednom broju dopišemo znamenku 8 na mjesto jedinice dobit ćemo dvostruko veći broj od drugog broja

$\Rightarrow 10x+8=2y$.

$$\begin{cases} x+y=1882 \\ 10x-2y=-8 \end{cases} \Rightarrow x=313,\ y=1569.$$

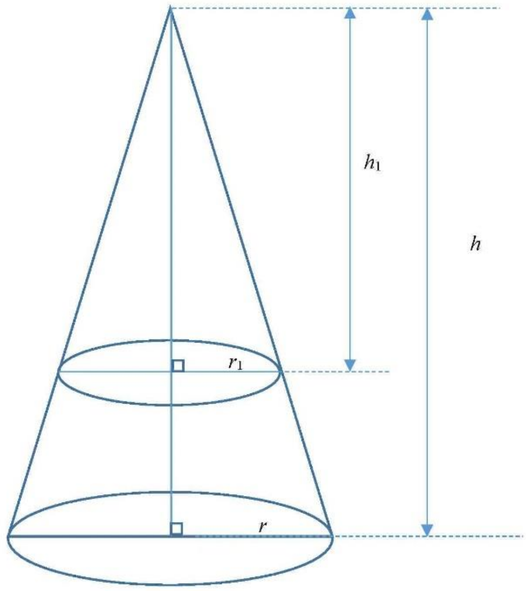
Zbroj znamenka drugog broja je 1 + 5 + 6 + 9 = 21. Točan odgovor je **C**.

6. U kojem omjeru od baze prema vrhu treba podijeliti visinu stošca tako da ravnina tom točkom paralelna s ravninom baze dijeli stožac na dva tijela jednakih obujmova?

| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** | **E.** |
|---|---|---|---|---|
| $1:1$ | $\sqrt[3]{2}:1$ | $1:\sqrt[3]{2}$ | $\left(\sqrt[3]{2}-1\right):1$ | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

Odgovarajuće elemente dopunjka u odnosu na veliki stožac označavat ćemo kao i elemente velikog stošca, ali s indeksom 1.




S obzirom da je volumen odrezanog stošca (dopunjka) jednak volumenu krnjeg stošca, očito je volumen dopunjka dvostruko manji od volumena velikog stošca. Dakle $\frac{V_{veliki}}{V_{mali}}=\frac{V}{V_1}=2$.

Prisjetimo se da se sve odgovarajuće duljine stranica velikog stošca i dopunjka odnose se s istim koeficijentom sličnosti $k$, površine odgovarajućih likova velikog stošca i dopunjka odnose se s kvadratom koeficijenta sličnosti tj. s $k^2$, a obujmovi velikog stošca i dopunjka odnose se s kubom koeficijenta sličnosti tj. s $k^3$.

Iz toga slijedi da je $k^3=2$, tj. $k=\sqrt[3]{2}$.

Želimo izračunati omjer visine (od baze prema vrhu) krnjeg stošca i dopunjka:

$$\frac{h-h_1}{h_1}=\frac{h}{h_1}-1=k-1=\sqrt[3]{2}-1.$$

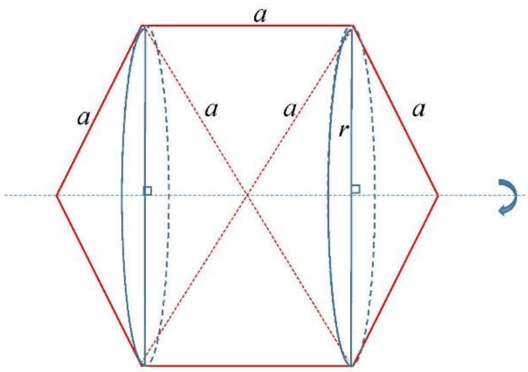
Točan odgovor je **D**.

7. Pravilni šesterokut površine $324\sqrt{3}$ cm$^2$ rotira oko svoje dulje osi simetrije. Odredite obujam rotacionog tijela.

| A. | B. | C. | D. | E. |
|---|---|---|---|---|
| $1260\sqrt{6}\,\pi$ cm$^3$ | $1296\sqrt{6}\,\pi$ cm$^3$ | $1944\sqrt{6}\,\pi$ cm$^3$ | $216\sqrt{6}\,\pi$ cm$^3$ | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

$P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ pa je $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 324\sqrt{3}$. Dakle, stranica šesterokuta je $a = 6\sqrt{6}$ cm.




Rotacijom je nastalo tijelo koje se sastoji od valjka visine *a* i dva stošca.

$$V_{rotacijskog\ tijela} = V_{valjak} + 2V_{stožac} = r^2\pi a + \frac{2}{3}r^2\pi h$$

Polumjer valjka i stošca jednak je visini jednakostraničnog trokuta ( $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{2}$ cm), dok je visina stošca jednaka polovici stranice jednakostraničnog trokuta ( $h = \frac{a}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$ cm).

$$V_{rotacijskog\ tijela} = r^2\pi a + \frac{2}{3}r^2\pi h = 162\pi \cdot 6\sqrt{6} + 108\pi \cdot 3\sqrt{6} = 972\sqrt{6}\,\pi + 324\sqrt{6}\,\pi = 1296\sqrt{6}\,\pi \text{ cm}^3$$

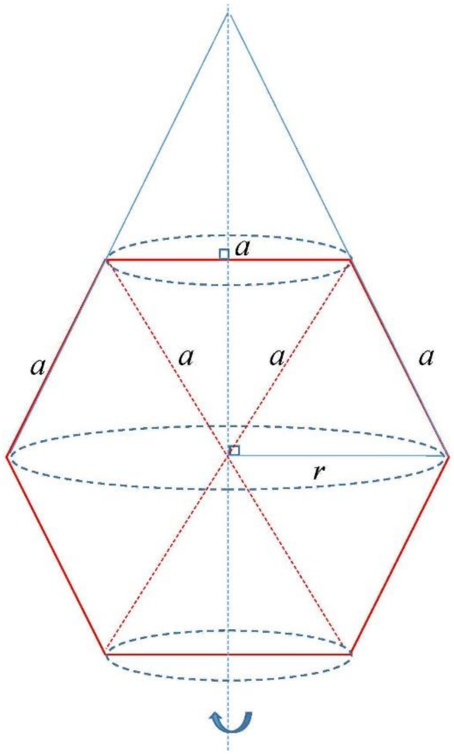
Točan odgovor je **B**.

8. Pravilni šesterokut površine $324\sqrt{3}$ cm² rotira oko svoje kraće osi simetrije. Odredite obujam rotacionog tijela.

| **A.** | **B.** | **C.** | **D.** | **E.** |
|---|---|---|---|---|
| $1296\sqrt{6}\,\pi$ cm³ | $2268\sqrt{2}\,\pi$ cm³ | $1134\sqrt{2}\,\pi$ cm³ | $216\sqrt{6}\,\pi$ cm³ | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

$P_6 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ pa je $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 324\sqrt{3}$. Dakle, stranica šesterokuta je $a = 6\sqrt{6}$ cm.




Rotacijom je nastalo tijelo koje se sastoji od dva krnja stošca visine $v$.

Prisjetimo se da se sve odgovarajuće duljine stranica velikog stošca i dopunjka odnose s istim koeficijentom sličnosti $k$, površine odgovarajućih likova velikog stošca i dopunjka odnose se s kvadratom koeficijenta sličnosti tj. s $k^2$, a obujmovi velikog stošca i dopunjka odnose se s kubom koeficijenta sličnosti tj. s $k^3$.

Dopunjak je također visine $v$, pa je $k = 2$. Polumjer baze dopunjka je $\frac{a}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$ cm, a visina mu je jednaka visini jednakostraničnog trokuta $v = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{2}$ cm.

$$V_{rotacijskog\ tijela} = 2V_{krnji\ stožac} = 2(V - V_1) = 2(8V_1 - V_1) = 14V_1$$

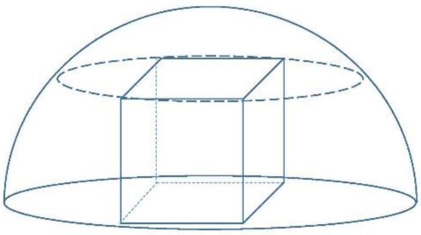
$V_1 = \frac{1}{3}Bv = \frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{6}\right)^2\pi\cdot 9\sqrt{2} = 162\sqrt{2}\,\pi$, pa je $V_{rotacijskog\ tijela} = 14V_1 = 2268\sqrt{2}\,\pi$ cm³.

Točan odgovor je **B.**

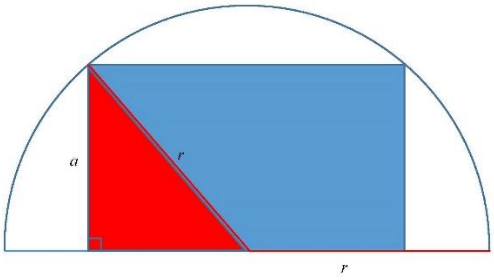
9. Kolika je duljina brida kocke upisane u polukuglu polumjera $\sqrt{6}$ cm?

| A. | B. | C. | D. | E. |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $\sqrt{3}$ | $2\sqrt{2}$ | Ništa od navedenoga | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:



Pogledat ćemo presjek polukugle ravninom okomitom na bazu koja sadrži prostornu dijagonalu kocke jer ona sadrži dodirne točke kocke i polukugle.




Primijenimo Pitagorin teorem: $a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow r^2=\frac{3}{2}a^2 \Rightarrow a^2=\frac{2}{3}\cdot 6=4 \Rightarrow a=2$

Točan odgovor je **A**.

10. Koliko rješenja ima jednadžba $2\log_2|\sin 3x|=\log_{\sqrt{2}}|\cos 3x|$ u intervalu $\langle 0,\pi\rangle$?

| A. | B. | C. | D. | E. |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 6 | 8 | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:

$$2\log_2|\sin 3x|=\log_{\sqrt{2}}|\cos 3x| \Rightarrow 2\log_2|\sin 3x|=2\log_2|\cos 3x| \Rightarrow |\sin 3x|=|\cos 3x| \Rightarrow |\mathrm{tg}3x|=1$$

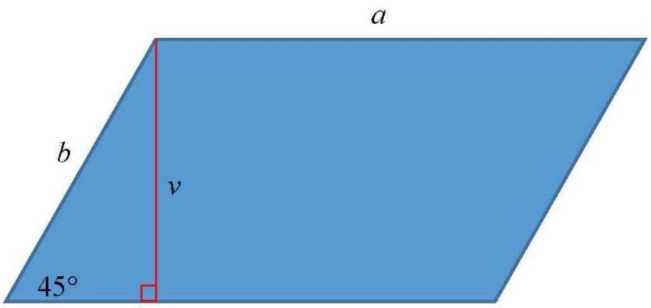
$$\Rightarrow \mathrm{tg}3x=\pm 1 \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}.$$

U intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ nalaze se $\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}$ i $\frac{11\pi}{12}$. Točan odgovor je **C**.

11. Šiljasti kut paralelograma opsega 60 cm ima mjeru 45°. Izračunaj najveću moguću površinu tog paralelograma.

| A. | B. | C. | D. | E. |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{225\sqrt{2}}{2}$ cm² | $\frac{225\sqrt{3}}{2}$ cm² | $\frac{225}{2}$ cm² | Ne može se odrediti | Ne želimo odgovoriti na pitanje |

Rješenje:




$$O = 60 \Rightarrow a + b = 30$$

$$P = av = ab\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}ab$$

S obzirom da želimo izračunati najveću moguću površinu, izrazimo ju kao funkciju jedne varijable:

$$P(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}a(30-a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-a^2 + 30a\right)$$

$P$ je kvadratna funkcija koja maksimalnu vrijednost doseže za $a_0 = \frac{-30}{-2} = 15$ cm, pa je $b$ = 15 cm.

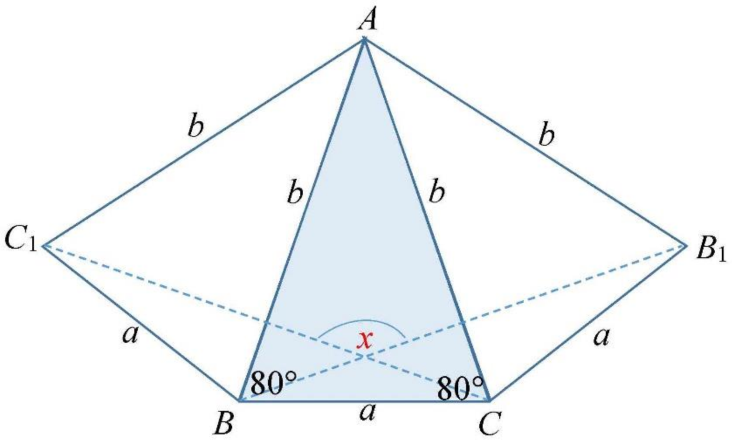
$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}ab = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 15\cdot 15 = \frac{225\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}^2$$

Točan odgovor je **A.**

12. Zadan je jednakokračan trokut $ABC$ takav da je $|AB| = |AC|$. Veličina kuta uz osnovicu je 80°. Osnosimetričnu sliku trokuta $ABC$ s obzirom na pravac $AC$ označimo s $AB_1C$, a osnosimetričnu sliku trokuta $ABC$ s obzirom na pravac $AB$ označimo s $ABC_1$. Koliki tupi kut zatvaraju pravci $BB_1$ i $CC_1$?

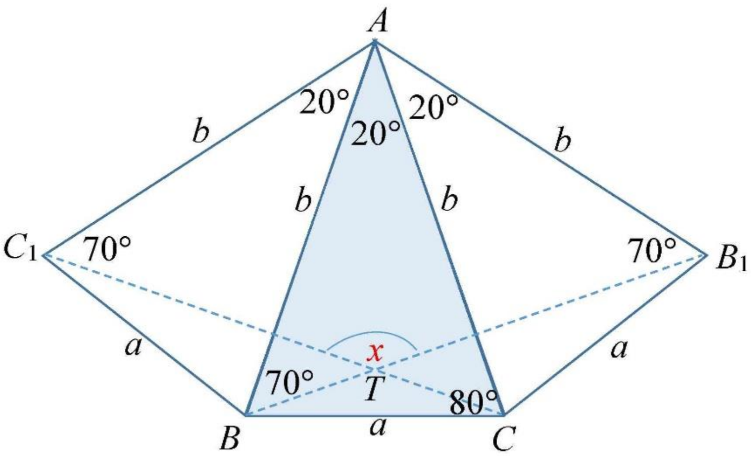
| **A.** 140° | **B.** 150° | **C.** 160° | **D.** Ništa od navedenoga | **E.** Ne želimo odgovoriti na pitanje |
|---|---|---|---|---|

Rješenje:




U trokutu $ABC$ izračunajmo kut uz vrh $A$: $180° - 2 \cdot 80° = 20°$.

Trokut $BB_1A$ je jednakokračan, pa možemo izračunati kut $\measuredangle BB_1A = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.




Zbroj kutova u četverokutu $CTB_1A$: $60° + 2 \cdot 70° + x = 360° \Rightarrow x = 160°$.

Točan odgovor je **C**.