



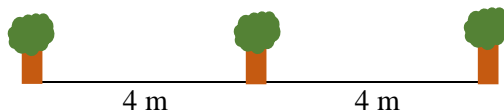
Prolječno kolo 2019./2020.

1. Uz desnu stranu ulice posađen je drvodred breza u jednakim razmacima od 5 m, a uz lijevu stranu ulice posađen je drvodred hrasta u jednakim razmacima od 4 m. Kolika je ukupna duljina oba drvodreda ako su posađena 72 stabla breze i 91 stablo hrasta?

A.	B.	C.	D.	E.
710 m	720 m	724 m	715 m	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Primijetimo da ukoliko, primjerice, u drvodredu posadimo 3 stabla u jednakim razmacima od 4 m, duljina drvodreda jednaka je $2 \cdot 4 = 8$ m.



Broj razmaka između stabala za jedan je manji od broja stabala. Stoga, drvodred od 72 stabla breze posađen u jednakim razmacima od 5 m duljine je $71 \cdot 5 = 355$ m, a drvodred od 91 stabla hrasta posađen u jednakim razmacima od 4 m duljine je $90 \cdot 4 = 360$ m. Ukupna duljina drvodreda je $355 + 360 = 715$ m. Točan odgovor je **D**.

2. Koliki je zbroj svih cijelih brojeva n za koje je razlomak $\frac{24}{n}$ također cijeli broj?

A.	B.	C.	D.	E.
60	36	54	0	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

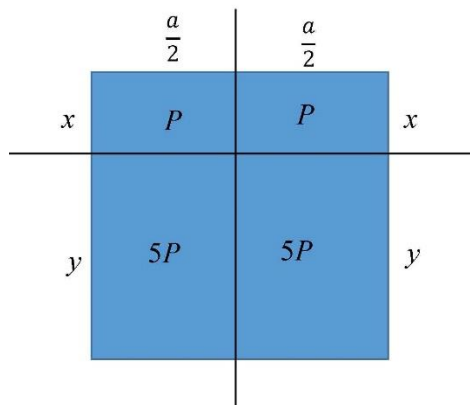
Da bi razlomak bio cijeli broj, n mora biti djelitelj broja 24.

To su: 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1 ali i $-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1$. Stoga je zbroj svih cijelih brojeva n za koje je razlomak $\frac{24}{n}$ također cijeli broj jednak 0. Točan odgovor je **D**.

3. Kvadrat je presječen dvama okomitim pravcima na dva para jednakih pravokutnika. Površina jednoga manjeg pravokutnika pet je puta manja od površine jednoga većeg pravokutnika. Koliki je opseg zadanog kvadrata ako se opsezi većeg i manjeg pravokutnika razlikuju za 120 cm?

A. manji od 300 cm	B. između 300 cm i 400 cm	C. između 400 cm i 500 cm	D. veći od 500 cm	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje
------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------	---

Rješenje: Skicirajmo kvadrat:



S obzirom da je površina većeg pravokutnika pet puta veća od površine manjeg pravokutnika (a jedna stranica im je zajednička) zaključujemo da $y = 5x$ i da je duljina stranice kvadrata $a = x + y = 6x$. Stoga je $x = \frac{a}{6}$ i

$y = \frac{5a}{6}$. Izrazimo razliku opsega većeg i manjeg pravokutnika:

$$O_{veliki} - O_{mali} = 2\left(\frac{a}{2} + \frac{5a}{6}\right) - 2\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{6}\right) = \frac{8a}{6} = \frac{4a}{3}.$$

Iz toga slijedi da je $\frac{4a}{3} = 120$, pa je duljina stranice kvadrata $a = 90$ cm. Opseg zadanog kvadrata je

$O = 4a = 4 \cdot 90 = 360$ m. Točan odgovor je **B**.

4. Funkcija $f(x) = a(x+2)(x-1)$ ima maksimalnu vrijednost 4. Koliki je a ?

A. 4	B. $-\frac{16}{9}$	C. $-\frac{9}{4}$	D. ništa od navedenoga	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje
----------------	------------------------------	-----------------------------	----------------------------------	---

Rješenje:

$$f(x) = a(x+2)(x-1) = a(x^2 + x - 2) = ax^2 + ax - 2a$$

Maksimalna vrijednost kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, pa je maksimalna

vrijednost dane funkcije $y_0 = \frac{-8a^2 - a^2}{4a} = -\frac{9a}{4}$. Ona će biti jednaka 4 za $a = -\frac{16}{9}$. Točan odgovor je **B**.

5. Od 24 učenika 1.a razreda njih petoro je u petak bilo odsutno s nastave. 13 učenika je toga dana dobilo ocjenu odličan iz pročitane lektire, a 16 učenika ocjenu odličan iz preskakanja prepona. Koliko je učenika 1.a razreda toga petka dobilo dvije ocjene odličan?

A.	B.	C.	D.	E.
5	10	13	Nije moguće odrediti.	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

S obzirom da od 24 učenika 1.a razreda njih petoro je u petak bilo odsutno s nastave, zaključujemo da je 19 učenika bilo na nastavi. Ne znamo koliko učenika nije ocijenjeno niti iz jednog predmeta toga dana, pa su moguće sljedeće situacije:



Zato ne možemo znati koliko je učenika 1.a razreda toga petka dobilo dvije ocjene odličan.

Točan odgovor je **D**.

6. Janica i Ivica grade toranj od kockica. Ako bi toranj gradila sama Janica, njoj bi za to trebala 3 sata. Ukoliko bi toranj gradio sam Ivica, on bi ga izgradio za 2 sata. Ako Janica i Ivica grade zajedno, za koliko će vremena toranj biti sagrađen?

A. 1 h 12 min	B. 1 h 22 min	C. 1 h 30 min	D. 1 h	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------------------	-------------------------	-------------------------	------------------	---

Rješenje:

Tko gradi	Vrijeme za koje bi sagradili cijeli toranj	Koliki dio tornja bi sagradili za vrijeme 1 sata
Janica	3 h	$\frac{1}{3}$
Ivica	2 h	$\frac{1}{2}$
Janica i Ivica	x h	$\frac{1}{x}$

Dakle $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$, pa je $x = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ h što je 1 h i 12 min. Točan odgovor je **A.**

7. Janica i Ivica grade toranj od kockica. Ako bi toranj gradila sama Janica, njoj bi za to trebala 3 sata. Ukoliko bi toranj gradio sam Ivica, on bi ga izgradio za 2 sata. Njihov maleni brat Jurica voli rastavljati kockice i on može rastaviti cijeli toranj za 5 sati. Ako Janica i Ivica zajedno grade, a to vrijeme mali im Jurica rastavlja, za koliko će vremena toranj biti sagrađen?

A. 1h 35 min	B. 1h 22 min	C. 1h 33 min	D. 1h 58 min	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje.
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	--

Rješenje:

Tko	Vrijeme za koje bi srušio cijeli toranj	Koliki dio tornja bi srušio za vrijeme 1 sata
Jurica	5 h	$\frac{1}{5}$
	Vrijeme za koje bi sagradili cijeli toranj	Koliki dio tornja bi sagradili za vrijeme 1 sata
Janica	3 h	$\frac{1}{3}$
Ivica	2 h	$\frac{1}{2}$
Janica, Ivica i Jurica	x h	$\frac{1}{x}$

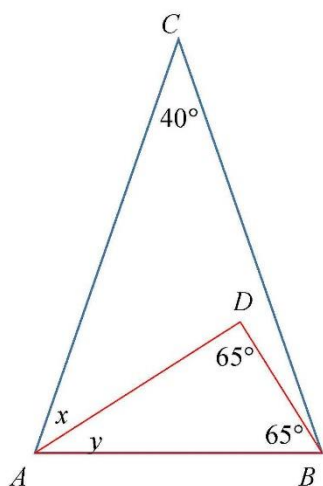
Dakle $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{x}$, pa je $x = \frac{30}{19} = 1\frac{11}{19}$ h što je 1 h i $\frac{11}{19} \cdot 60 = 34.7$ min. Točan odgovor je **A.**

8. Jednakokrakom trokutu ABC s kutom nasuprot osnovici \overline{AB} veličine 40° dočrtan je s iste strane ravnine u odnosu na AB jednakokrakan trokut ABD s kutom uz osnovicu \overline{BD} veličine 65° . Kolika je veličina kuta $\angle DAC$?

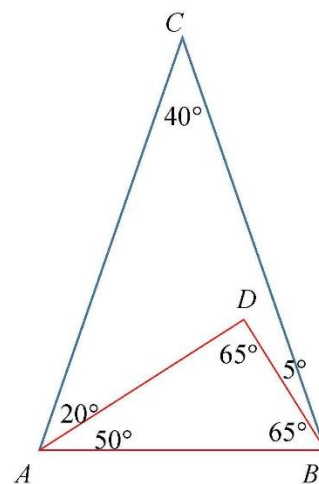
A.	B.	C.	D.	E.
40°	35°	20°	Ne može se odrediti	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Kutovi uz osnovicu jednakokrakog trokuta su jednaki. S obzirom da je kut nasuprot osnovici \overline{AB} veličine 40° , kutovi uz osnovicu trokuta ABC su 70° .



Kutovi uz osnovicu jednakokrakog trokuta ABD su veličine 65° , pa je kut nasuprot osnovice $y = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$. To znači da je $x = 70^\circ - y = 20^\circ$.



Točan odgovor je C.

9. Koliko rješenja ima jednadžba $2\log_2(\sin 3x) = \log_{\sqrt{2}}(\cos 3x)$ u intervalu $[0, \pi]$?

A.	B.	C.	D.	E.
2	3	4	8	Ne želimo odgovoriti na pitanje.

Rješenje:

S obzirom da su $\sin 3x$ i $\cos 3x$ argumenti logaritma, oni moraju biti pozitivni! Početni uvjet zadatka je

$$2k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ pa je } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle.$$

$$2\log_2(\sin 3x) = \log_{\sqrt{2}}(\cos 3x) \Rightarrow 2\log_2(\sin 3x) = 2\log_2(\cos 3x) \Rightarrow \sin 3x = \cos 3x \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = 1$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

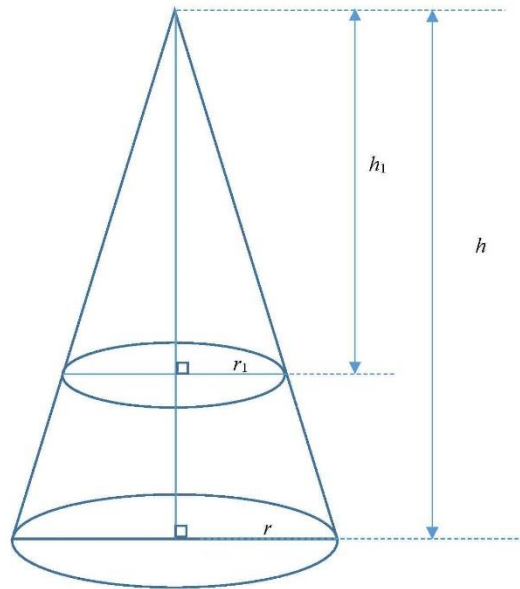
U intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle$ nalaze se $\frac{\pi}{12}$ i $\frac{3\pi}{4}$. Točan odgovor je A.

10. Ako stožac presiječemo ravninom paralelnom s ravninom baze na polovici visine stošca, u kojem su omjeru obujmovi tako dobivenih tijela?

A. 8 : 1	B. 2 : 1	C. 4 : 1	D. 7 : 1	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje.
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------------------------------

Rješenje:

Odgovarajuće elemente dopunjka u odnosu na veliki stožac označavat ćemo kao i elemente velikog stošca, ali s indeksom 1.



S obzirom da stožac presiječemo ravninom paralelnom s ravninom baze na polovici visine stošca, očito je

$$\frac{h_{velike}}{h_{male}} = \frac{h}{h_1} = 2.$$

Prisjetimo se da se sve odgovarajuće duljine stranica velikog stošca i dopunjka odnose s istim koeficijentom sličnosti k , površine odgovarajućih likova velikog stošca i dopunjka odnose se s kvadratom koeficijenta sličnosti tj. s k^2 , a obujmovi velikog stošca i dopunjka odnose se s kubom koeficijenta sličnosti tj. s k^3 .

Iz toga slijedi da je $k = 2$.

Želimo izračunati omjer obujmova visine (od baze prema vrhu) krnjeg stošca i dopunjka:

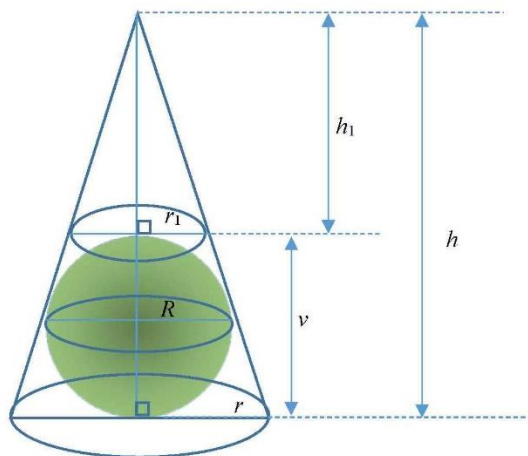
$$\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1 = k^3 - 1 = 2^3 - 1 = 7.$$

Točan odgovor je **D**.

11. U krnji stožac kojem se površine baza odnose kao 4 : 1 upisana je kugla. Kako se odnose polumjer te kugle i polumjer manje baze krnjeg stošca?

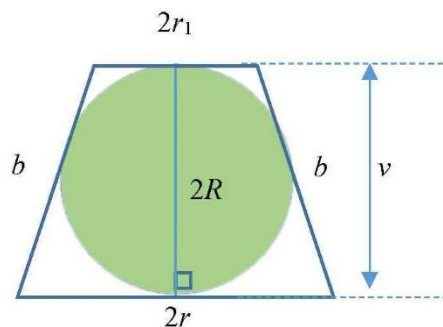
A. $\sqrt{2} : 2$	B. $\sqrt{3} : 2$	C. $\sqrt{2} : 1$	D. Nije moguće odrediti.	E. Ne želimo odgovoriti na pitanje.
----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------------	-------------------------------------

Rješenje:



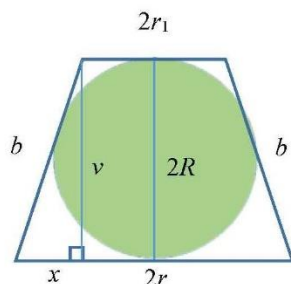
$$\frac{B}{B_1} = 4 \Rightarrow \frac{r}{r_1} = 2$$

Presjek krnjeg stošca ravninom okomitom na bazu je jednakokračan trapez kojem je upisana kružnica.



Dakle, četverokut je tangencijalan pa mu je zbroj nasuprotnih stranica jednak: $2r + 2r_1 = b + b \Rightarrow r + r_1 = b$.

Jer je $r = 2r_1$ vrijedi $3r_1 = b$.



$$x = \frac{2r - 2r_1}{2} = r - r_1 = 2r_1 - r_1 = r_1 \text{ i } b^2 = x^2 + v^2$$

$$\Rightarrow (3r_1)^2 = r_1^2 + (2R)^2$$

$$\Rightarrow 8r_1^2 = 4R^2$$

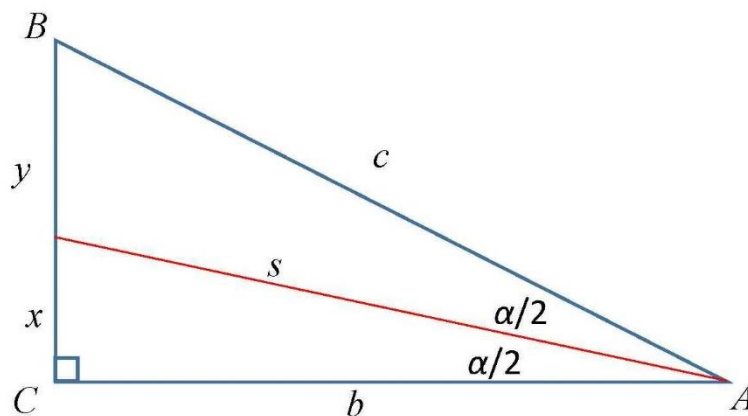
$$\Rightarrow 2r_1^2 = R^2 \Rightarrow \frac{R}{r_1} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

Točan odgovor je C.

12. U kojem omjeru simetrala kuta α pravokutnog trokuta dijeli nasuprotnu katetu?

A.	B.	C.	D.	E.
$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	Ne želimo odgovoriti na pitanje.

Rješenje:



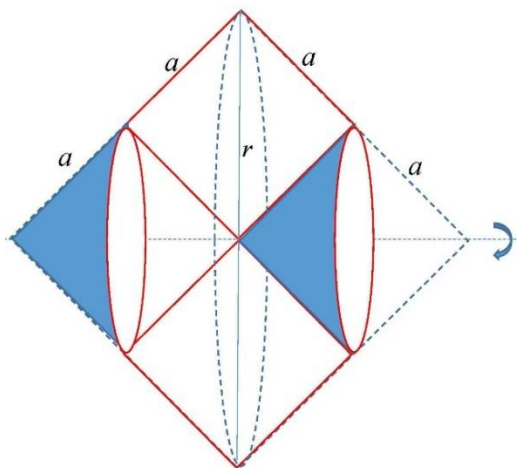
Teorem o simetrali kuta u trokutu: $\frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \cos \alpha$. Točan odgovor je C.

13. Kvadrat $ABCD$ površine 324 cm^2 rotira oko pravca točkom A paralelnog s BD . Odredite oplošje rotacionog tijela.

A.	B.	C.	D.	E.
$1296\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$	$648\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$	$1944\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$	$216\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Primijetimo da su plavi stošci na slici jednaki. Stoga je oplošje nastalog rotacionog tijela jednako oplošju tijela koje se sastoji od dva plašta stošca polumjera r i visine r , pri čemu je $r = a\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \text{ cm}$.



$O = 2 \cdot r\pi s = 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 2a = 4\sqrt{2}a^2\pi = 1296\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$. Točan odgovor je A.