



## Proljetno kolo 2020./2021.

1. Ako je  $D(a, b, c) = 4$  i  $V(a, b, c) = 240$ , koliki je najmanji mogući umnožak brojeva  $a$ ,  $b$  i  $c$ ?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
960	3 840	11 520	nije moguće odrediti	

Rješenje:

✓  $V(a, b, c) = 240$  pa 240 prikažimo kao umnožak prostih faktora:

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

✓ S obzirom da je  $D(a, b, c) = 4$ , brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  možemo prikazati kao

$$a = 4x, b = 4y, c = 4z, \text{ pri čemu je } D(x, y, z) = 1 \text{ i } V(x, y, z) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

✓ Brojevi  $x$ ,  $y$  i  $z$  nisu jedinstveni i postoji više mogućnosti.

✓ Primjerice:  $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$  ili  $(x = 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 5)$ .

✓ Najmanji mogući umnožak brojeva  $a$ ,  $b$  i  $c$  dobit ćemo kada je umnožak brojeva  $x$ ,  $y$  i  $z$  najmanji moguć. To će biti slučaj ako niti jedan faktor ne ponovimo više puta.

✓ Primjerice:  $(x = 2 \cdot 2, y = 3 \text{ i } z = 5)$  ili  $(x = 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 1)$ .

✓ U oba slučaja je  $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ , pa je  $a \cdot b \cdot c = 4x \cdot 4y \cdot 4z = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3 840$ .

✓ Točan odgovor je **B.**

2. Ako je  $D(a, b, c) = 4$  i  $V(a, b, c) = 240$ , koliki je najveći mogući umnožak različitih brojeva  $a$ ,  $b$  i  $c$ ?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
3 840	115 200	230 400	nije moguće odrediti	

Rješenje:

$V(a, b, c) = 240$  pa 240 prikažimo kao umnožak prostih faktora:

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

S obzirom da je  $D(a, b, c) = 4$ , brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  možemo prikazati kao

$$a = 4x, b = 4y, c = 4z, \text{ pri čemu je } D(x, y, z) = 1 \text{ i } V(x, y, z) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Brojevi  $x$ ,  $y$  i  $z$  nisu jedinstveni i postoji više mogućnosti.

Primjerice:  $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$  ili  $(x = 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 5)$ .

Najveći mogući umnožak brojeva  $a$ ,  $b$  i  $c$  dobit ćemo kada je umnožak brojeva  $x$ ,  $y$  i  $z$  najveći mogući. To će biti slučaj ako svaki faktor napišemo dva puta.

Primjerice:  $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$  ili  $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$ . Sada je

$$x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \text{ pa je } a \cdot b \cdot c = 4x \cdot 4y \cdot 4z = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 230 400.$$

Točan odgovor je **C**.

3. Ako je  $x + x^{-1} + 1 = 0$ , koliko je  $x^{2048} + x^{-2048}$ ?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-1	1	11	nije moguće odrediti	

Rješenje:

$$x + x^{-1} + 1 = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -1$$

$$\text{Analogno: } \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 = 1 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = -1 \dots$$

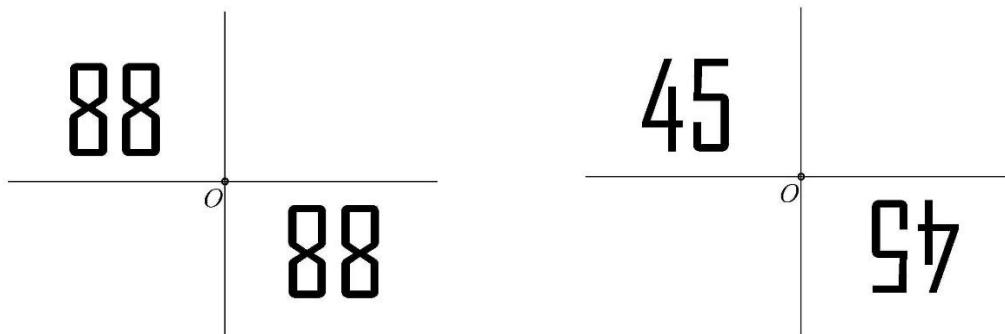
$$\Rightarrow x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}} = -1$$

$$\text{Jer je } 2048 = 2^{11} \text{ vrijedi } x^{2048} + \frac{1}{x^{2048}} = -1$$

Točan odgovor je **A**.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ispisujemo brojeve te ih preslikavamo centralnom simetrijom s obzirom na točku  $O$ . Primjerice, centralnosimetrična slika broja 88 je broj 88, ali centralnosimetrična slika broja 45 nije broj (bez okretanja papira).

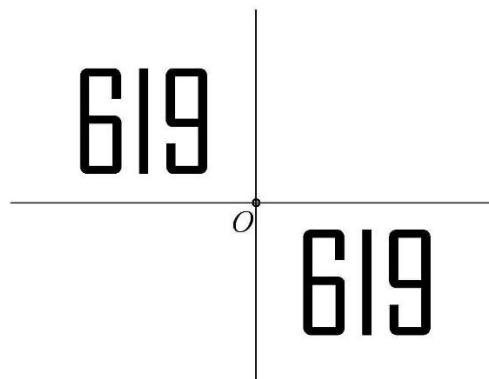


Koliko postoji troznamenkastih brojeva kojima će centralnosimetrična slika s obzirom na točku  $O$  predstavljati zapis tога истог броја без окретања папира?

A. 12	B. 6	C. 9	D. ništa od navedenog	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	---------	---------	--------------------------	--

Rješenje:

Primijetimo da se znamenke 0, 1 i 8 opisanim preslikavanjem preslikavaju u 0, 1 i 8. Međutim, treba primijetiti i da se broj 6 preslikava u 9, te broj 9 u 6. Također primijetimo da se znamenka jedinice preslikava u znamenku stotice, dok se znamenka desetice preslikava u sebe samu.



Ispišimo sada sve mogućnosti:

101	609	808	906
111	619	818	916
181	689	888	986

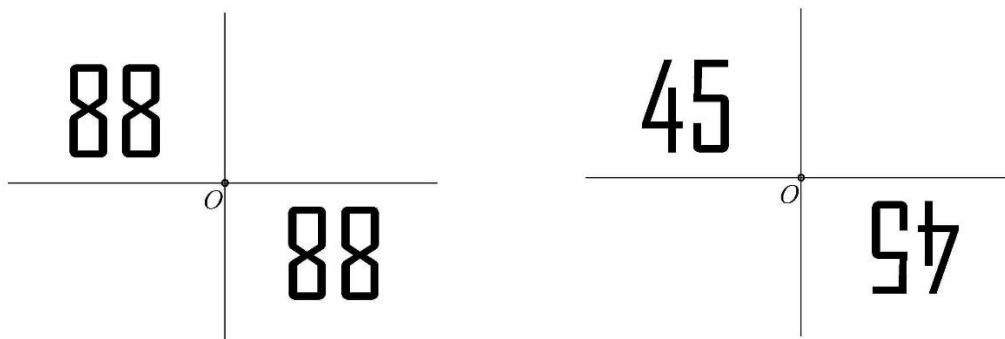
Postoji 12 takvih brojeva.

Točan odgovor je A.

## 5. Koristeći znamenke na slici

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ispisujemo brojeve te ih preslikavamo centralnom simetrijom s obzirom na točku  $O$ . Primjerice, centralnosimetrična slika broja 88 je broj 88, ali centralnosimetrična slika broja 45 nije broj (bez okretanja papira).



Koliko četveroznamenkastih brojeva postoji kojima će centralnosimetrična slika s obzirom na točku  $O$  predstavljati zapis toga istog broja bez okretanja papira?

A. 20	B. 6	C. 9	D. ništa od navedenog	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	---------	---------	--------------------------	--

Rješenje:

Vodeći računa o svemu što smo naveli u rješenju prethodnog zadatka mogli bismo ispisati sva rješenja. Međutim, sada ćemo zadatak riješiti na drugi način.

S obzirom da se znamenka tisućice preslikava u znamenku jedinice, a znamenka stotice u znamenku desetice, primijetimo da su traženi brojevi oblika  $\overline{abba}$ , pri čemu znamenka  $a$  može biti 1, 6, 8 ili 9, a znamenka  $b$  može biti 0, 1, 6, 8 ili 9.

Dakle, znamenku  $a$  možemo izabrati na 4 načina i znamenku  $b$  na 5 načina. To znači da broj  $\overline{ab}$  možemo izabrati na  $4 \cdot 5 = 20$  načina. Svakom izboru broja  $\overline{ab}$  odgovara broj  $\overline{abba}$  (npr. broju 18 odgovara broj 1881).

Četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju dano svojstvo je 20.

Točan odgovor je A.

6. Tomislav je primio poruku na mobitelu u 14:15. Nakon 15 minuta Tomislav je proslijedio poruku dvojici prijatelja. Svaki ju je od njih, 15 minuta nakon što je primio poruku od Tomislava, proslijedio svojoj dvojici prijatelja. Također, njihovi prijatelji učinili su isto i svatko je od njih nakon 15 minuta proslijedio poruku svojoj dvojici prijatelja. Igra slanja poruka potrajala je do 20 sati kada su posljednji učenici zaprimili poruke. Koliko je ukupno dječaka zaprimilo poruku u sklopu igre taj dan ako nijedan dječak nije primio više od jedne poruke?

A. $2^{25} - 1$	B. $2^{23}$	C. $2^{23} + 1$	D. $2^{24} - 1$	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
--------------------	----------------	--------------------	--------------------	------------------------------------

Rješenje:

Prikažimo pregledno broj primljenih poruka u vremenskom intervalu.

vrijeme	broj prijatelja koji su tada primili poruku	ukupan broj prijatelja koji su primili poruku do tada
14:15	1	1
14:30	$2 = 2^1$	$1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$
14:45	$2 \cdot 2 = 4 = 2^2$	$2^2 - 1 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 2^3 - 1$
15:00	$4 \cdot 2 = 8 = 2^3$	$2^3 - 1 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2^4 - 1$
...	...	
20:00	$2^n$	$2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

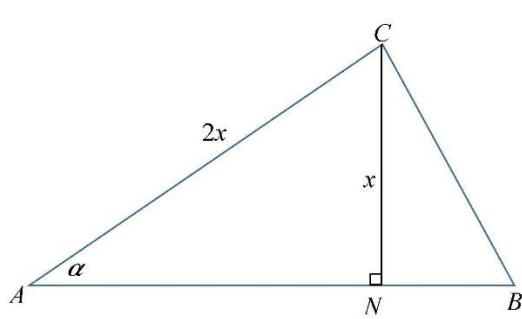
Od 14:15 do 20:00 proteklo je 5:45 minuta što je 23 vremenska perioda od 15 minuta. To znači da je broj prijatelja koji su primili poruku u 20:00 jednak  $2^{23}$ , pa je ukupan broj prijatelja koji su primili poruku od 14:15 jednak  $2^{24} - 1$ .

Točan odgovor je **D.**

7. U trokutu  $ABC$  duljina stranice  $\overline{AC}$  dvostruko je dulja od duljine visine na stranicu  $\overline{AB}$ , a kut  $\angle ACB$  veličine je  $105^\circ$ . Kako se odnose površine trokuta  $CBN$  i  $CAN$ , ako je  $N$  nožište visine iz vrha  $C$ ?

A. 1 : 2	B. $\sqrt{2} : \sqrt{3}$	C. $\sqrt{3} : 3$	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------	-----------------------------	----------------------	----------------------------	------------------------------------

Rješenje:



Trokut  $ANC$  je pravokutan i hipotenuza mu je dvostruko dulja od katete iz čega zaključujemo da je to pola jednakostraničnog trokuta duljine stranice  $2x$ . Dakle,  $\alpha = 30^\circ$  i  $|\angle ACN| = 60^\circ$ , pa je  $|\angle NCB| = 45^\circ$ . Trokut  $NCB$  je pravokutan jednakokračan.

$$\frac{P_{\Delta CBN}}{P_{\Delta CAN}} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Točan odgovor je **C**.