Zimsko kolo 2021./2021.

1. Koliko ima neparnih troznamenkastih brojeva koji su djeljivi bar s jednim od brojeva 3 i 5?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
421	421	211	210	Ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Troznamenkasti brojevi djeljivi s 3:

$$102 = 3 \cdot 34,\ 105 = 3 \cdot 35,\ 108 = 3 \cdot 36, \ldots, 999 = 3 \cdot 333$$

- takvih je brojeva 333 – 33 = 300, od čega je pola neparno.

Troznamenkasti brojevi djeljivi s 5:

$$100 = 5 \cdot 20,\ 105 = 5 \cdot 21,\ 110 = 5 \cdot 22, \ldots, 995 = 5 \cdot 199$$

- takvih je brojeva 199 – 19 = 180, od čega je pola neparno.

Troznamenkasti brojevi djeljivi s 15:

$$105 = 15 \cdot 7,\ 120 = 15 \cdot 8,\ 135 = 15 \cdot 9, \ldots, 990 = 15 \cdot 66$$

- takvih je brojeva 66 – 6 = 60, od čega je pola neparno.

Ako zbrojimo sve neparne troznamenkaste djeljive s 3 i sve neparne troznamenkaste djeljive s 5, tada smo dva puta brojali sve neparne troznamenkaste djeljive s 15. Stoga je broj svih neparnih troznamenkastih koji su djeljivi bar s jednim od brojeva 3 i 5 jednak:

$$150 + 90 - 30 = 210.$$

Točan odgovor je **D**.

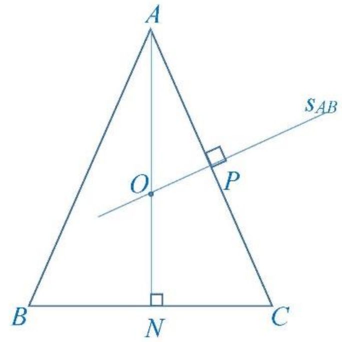
2. Kolika je udaljenost težišta i središta opisane kružnice jednakokračnog trokuta kojem je duljina osnovice i duljina visine na osnovicu 6 cm?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
0.25 cm	1.75 cm	$6-\sqrt{5}$ cm	ništa od navedenog	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Skicirajmo jednakokračan trokut *ABC* sa središtem trokutu opisane kružnice (sjecište simetrala stranica).

$a = v_a = 6$ cm

$$\Rightarrow |AC| = b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$



Trokuti *ANC* i *APO* su slični (po KK), pa su duljine stranica proporcionalne.

$$\frac{|AO|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AN|}$$

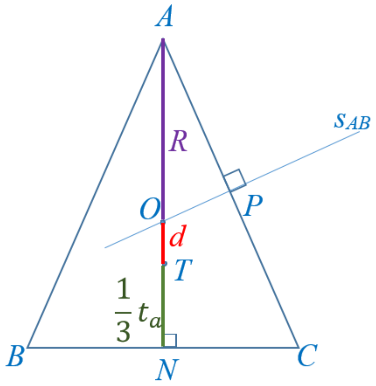
$$\Rightarrow \frac{R}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{v_a} \Rightarrow \frac{R}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{6} \Rightarrow R = \frac{15}{4} \text{ cm}$$

Težište *T* dijeli težišnicu u omjeru 1 : 2 od stranice ka vrhu, pa je $|TN| = \frac{1}{3} t_a = \frac{1}{3} v_a = 2$ cm

$$R + |TN| = \frac{15}{4} + 2 = 5\frac{3}{4} < 6 = v_a$$

$$d = v_a - (R + |TN|) = 6 - 5\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ cm}$$

Točan odgovor je **A**.



3. Uspravni stožac presiječemo ravninom paralelno bazi na dva dijela jednakih obujmova. Kako se odnose visine krnjeg stošca i dopunjka?

A.	B.	C.	D.	E.
1 : 1	$1:\sqrt[3]{3}$	$\left(\sqrt[3]{2}-1\right):1$	$1:\sqrt[3]{2}$	ne želimo odgovoriti na pitanje

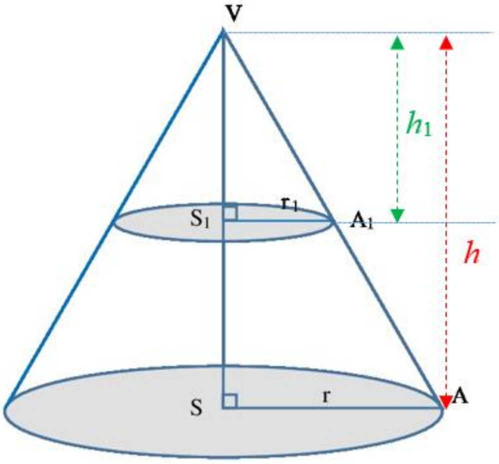
Rješenje: $\dfrac{h-h_1}{h_1}=\dfrac{h}{h_1}-1=?$

Prisjetimo se!

Sve odgovarajuće duljine stranica velikog stošca i dopunjka odnose se s istim koeficijentom sličnosti k.

Površine odgovarajućih likova velikog stošca i dopunjka odnose se s kvadratom koeficijenta sličnosti tj. s k^2.

Obujmovi velikog stošca i dopunjka odnose se s kubom koeficijenta sličnosti tj. s k^3.



Stožac smo presjekli na dva tijela jednakih obujmova pa je $V_1=\dfrac{1}{2}V$ tj. $\dfrac{V}{V_1}=2$.

$$\frac{V}{V_1}=k^3 \quad\Rightarrow\quad k=\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{h}{h_1}=k=\sqrt[3]{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{h-h_1}{h_1}=\frac{h}{h_1}-1=\sqrt[3]{2}-1$$

Točan odgovor je **C**.

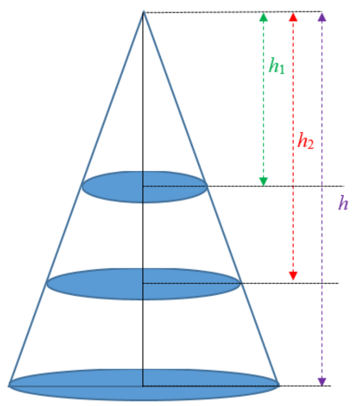
4. Uspravni stožac presiječemo dvjema ravninama paralelno bazi na tri dijela jednakih obujmova. Kako se odnose visine srednjeg (krnjeg stošca) i najgornjeg dijela stošca (dopunjka)?

A.	B.	C.	D.	E.
1 : 1	$1:\sqrt[3]{3}$	$\left(\sqrt[3]{3}-1\right):1$	$\left(\sqrt[3]{2}-1\right):1$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: $\dfrac{h_2-h_1}{h_1}=\dfrac{h_2}{h_1}-1=?$

Primijetimo da možemo zanemariti najdonji dio stošca i promatrati samo dva gornja.

Stožac smo presjekli na tri tijela jednakih obujmova pa je $\dfrac{V_2}{V_1}=2$.



$$\frac{V_2}{V_1}=k^3 \quad\Rightarrow\quad k=\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{h_2}{h_1}=k=\sqrt[3]{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{h_2-h_1}{h_1}=\frac{h_2}{h_1}-1=\sqrt[3]{2}-1$$

Točan odgovor je **D**.

5. Baza piramide *ABCDEFV* pravilni je šesterokut *ABCDEF*. Ortogonalna je projekcija vrha *V* na ravninu baze točka *A*. Ako je duljina visine piramide dvostruko veća od duljine osnovnog brida, koliki je kosinus kuta što ga zatvaraju bočni bridovi $\overline{EV}$ i $\overline{BV}$?

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{8\sqrt{35}}{35}$	$\frac{4\sqrt{35}}{35}$	$\frac{11\sqrt{35}}{70}$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Skicirajmo danu piramidu.

Kosinus kuta što ga zatvaraju bočni bridovi $\overline{EV}$ i $\overline{BV}$ naći ćemo iz trokuta *EVB* nakon što izračunamo duljine bridova $\overline{EV}$ i $\overline{BV}$.

Iz pravokutnog trokuta *BAV* sijedi:

$$|BV| = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

Iz pravokutnog trokuta *EAV* sijedi:

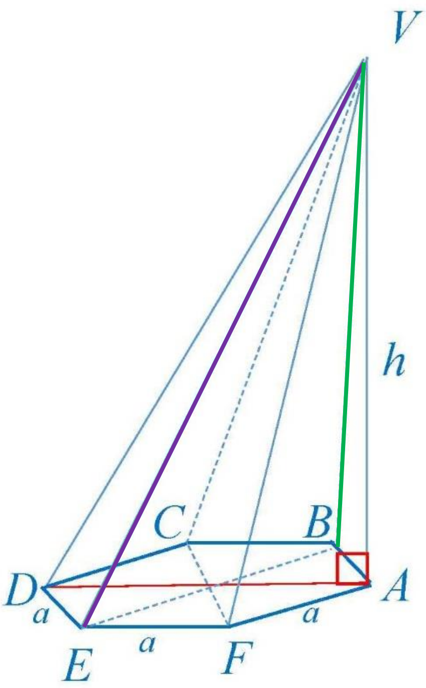
$$|EV| = \sqrt{(2v_a)^2 + h^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$$

Iz trokuta *EVB* kosinusovim poučkom dobivamo:

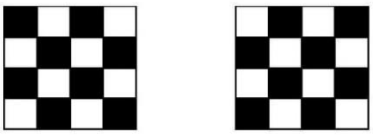
$$(2a)^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{7})^2 - 2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{7} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{(a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{7})^2 - 4a^2}{2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{7}} = \frac{8a^2}{2\sqrt{35}a^2} = \frac{4}{\sqrt{35}} = \frac{4\sqrt{35}}{35}$$

Točan odgovor je **B**.



6. Keramičar slaže 8 bijelih i 8 crnih pločica u obliku kvadrata 4 × 4. Na koliko načina to može napraviti ako kvadrat mora imati centralno simetričan raspored crnih pločica? Napomena: rasporedi na slici različiti su.



A.	B.	C.	D.	E.
910	56	70	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

S obzirom na to da kvadrat mora imati centralno simetričan raspored crnih pločica problem se svodi na to da pola crnih pločica (4) moramo rasporediti na pola kvadrata (8 polja).

To je moguće napraviti na $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ načina.

Točan odgovor je **C**.