



Zimsko kolo 2020./2021.

1. Ako pravilnom n -terokutu obrišemo dva susjedna vrha, a preostale vrhove spojimo u novi mnogokut, dobiveni lik ima 27 dijagonala manje od početnog n -terokuta. Koliko je dijagonala imao početni n -terokut?

A. 44	B. 104	C. 27	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	-----------	----------	----------------------------	------------------------------------

Rješenje:

Broj dijagonala n -terokuta je $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ako obrišemo dva susjedna vrha, tada imamo $m = n - 2$ vrha pa je broj dijagonala $\frac{m(m-3)}{2} = \frac{(n-2)(n-5)}{2}$.

S obzirom da dobiveni lik ima 27 dijagonala manje od početnog lika, vrijedi:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 27 + \frac{(n-2)(n-5)}{2}$$

$$n(n-3) = 54 + (n-2)(n-5)$$

$$n^2 - 3n = 54 + n^2 - 7n + 10 \Rightarrow n = 16$$

Broj dijagonala početnog lika je $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{16 \cdot 13}{2} = 104$.

Točan odgovor je **B.**

2. Na osobnim iskaznicama datumi su napisani u formatu DD.MM.GGGG. Da bismo napisali današnji datum u tom formatu, 12.12.2020., trebaju nam dvije znamenke 0, dvije znamenke 1 i četiri znamenke 2. Jednake znamenke upotrijebili smo i kad je bio 22.11.2020. Koliko različitih datuma ove i iduće godine možemo zapisati tim znamenkama?



A. 9	B. 8	C. 7	D. 6	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

Znamenke kojima ispisujemo datume su: 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2.

Ispišimo prvo sve datume ove godine. S obzirom da je godina 2020, za dan i mjesec preostale su nam znamenke 1, 1, 2, 2. S tim znamenkama možemo napisati mjesecce: 11 i 12. Datumi su: 22.11.2020., 12.12.2020. i 21.12.2020.

Kada napišemo iduću godinu 2021, za dan i mjesec preostat će nam znamenke 0, 1, 2, 2. S tim znamenkama možemo napisati mjesecce: 01, 02, 10 i 12. Datumi su: 22.01.2021., 12.02.2021., 21.02.2021., 22.10.2021., 02.12.2021. i 20.12.2021.

Ukupno je to $3 + 6 = 9$ datuma ove i iduće godine.

Točan odgovor je A.

3. Ana je na proslavu svog desetog rođendana, 1.4.2020., pozvala društvo desetogodišnjaka. Zanimljivo je da je svim sudionicima proslave zbroj dana, mjeseca i godine rođenja jednak, a nitko nije rođen istoga dana. Koji je najveći mogući broj Aninih prijatelja na rođendanu?

A. 3	B. 5	C. 6	D. 9	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

S obzirom da Ana 1.4.2020. slavi deseti rođendan, ona je rođena 1.4.2010. Zbroj dana, mjeseca i godine rođenja je $1 + 4 + 2010 = 2015$.

Na dan proslave 1.4.2020. navršenih deset godina su imali prijatelji rođeni u periodu od 2.4.2009. do 1.4.2010.

Ispišimo prvo datume od 2.4.2009. do kraja 2009. Zbroj mjeseca i godine mora biti $2015 - 2009 = 6$, pa je to moguće 2.4.2009. i 1.5.2009.

U 2020. godini zbroj dana i mjeseca treba biti $2015 - 2010 = 5$, pa je to moguće 4.1.2010., 3.2.2010. i 2.3.2010. Primijetimo da je 1.4.2010. rođena Ana, a mi moramo naći najveći broj Aninih prijatelja (bez Ane).

Dakle, postoji pet različitih datuma koji zadovoljavaju dano svojstvo.

Točan odgovor je B.

4. Brojevi x_1 i x_2 rješenja su kvadratne jednadžbe $mx^2 + (1-m)x + 1 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. Koliko je $\frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1}$?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
$\frac{2m+1}{2m}$	$\frac{m+1}{2}$	$\frac{3m-1}{2m}$	ništa od navedenog	

Rješenje:

Po Vieteovim formulama iz jednadžbe $mx^2 + (1-m)x + 1 = 0$ slijedi $x_1 + x_2 = -\frac{1-m}{m} = \frac{m-1}{m}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$,

$m \neq 0$. Traženi izraz $\frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1}$ izrazimo preko zbroja i produkta rješenja jednadžbe:

$$\frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1} = \frac{(1+x_1) + (1+x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} = \frac{2 + x_1 + x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} = \frac{2 + \frac{m-1}{m}}{1 + \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m}} = \frac{2m + m - 1}{m + m - 1 + 1} = \frac{3m - 1}{2m}$$

Točan odgovor je C.

5. Brojevi x_1 i x_2 rješenja su kvadratne jednadžbe $mx^2 + (1-m)x + 1 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. Koliko je $\frac{1-x_1}{1+x_2} + \frac{1-x_2}{1+x_1}$?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
$\frac{2m^2 + 1}{2m}$	$\frac{4m^2 - 1}{2m^2}$	$\frac{m^2 + 4m - 1}{2m^2}$	ništa od navedenog	

Rješenje:

Po Vieteovim formulama iz jednadžbe $mx^2 + (1-m)x + 1 = 0$ slijedi $x_1 + x_2 = -\frac{1-m}{m} = \frac{m-1}{m}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$,

$m \neq 0$. Traženi izraz $\frac{1-x_1}{1+x_2} + \frac{1-x_2}{1+x_1}$ izrazimo preko zbroja i produkta rješenja jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{1-x_1}{1+x_2} + \frac{1-x_2}{1+x_1} &= \frac{(1-x_1)(1+x_1) + (1-x_2)(1+x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} = \frac{1-x_1^2 + 1-x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = \frac{2-(x_1^2+x_2^2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\ &= \frac{2-\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = \frac{2-\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+2 \cdot \frac{1}{m}}{1+\frac{m-1}{m}+\frac{1}{m}} = \frac{2m^2-m^2+2m-1+2m}{m^2+m^2-m+m} = \frac{m^2+4m-1}{2m^2} \end{aligned}$$

Točan odgovor je C.

6. Koliko troznamenkastih brojeva a zadovoljava jednakost $250 \cdot a = b \cdot b$ za neki prirodni broj b ?

A. 6	B. 5	C. 4	D. 3	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

- Broj 250 rastavimo na proste faktore. Tada vrijedi: $5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot a = b \cdot b$.
- Broj s desne strane umnožak je prirodnog broja samog sa sobom, pa i broj s lijeve strane jednakosti moramo moći zapisati u tom obliku. Odatle zaključujemo da a mora biti umnožak broja 10 i nekog kvadrata. Dakle, $a = 10 \cdot k^2$, pri čemu je k prirodan broj.
- S obzirom da tražimo koliko troznamenkastih brojeva a zadovoljava dano svojstvo, to su brojevi:
 $10 \cdot 16 = 160, 10 \cdot 25 = 250, 10 \cdot 36 = 360, 10 \cdot 49 = 490, 10 \cdot 64 = 640$ i $10 \cdot 81 = 810$.
- Točan odgovor je A.

7. Koliko troznamenkastih brojeva a zadovoljava jednakost $250a = 11b^2$ za neki prirodni broj b ?

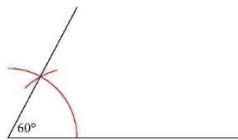
A. 6	B. 5	C. 4	D. 3	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

- Broj 250 rastavimo na proste faktore. Tada vrijedi: $5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot a = 11 \cdot b \cdot b$.
- Broj s desne strane umnožak je broja 11 i kvadrata prirodnog broja, pa i broj s lijeve strane jednakosti moramo moći zapisati u tom obliku. Odatle zaključujemo da a mora biti umnožak broja 11, broja 10 i nekog kvadrata. Dakle, $a = 11 \cdot 10 \cdot k^2 = 110k^2$, pri čemu je k prirodan broj.
- S obzirom da tražimo koliko troznamenkastih brojeva a zadovoljava dano svojstvo, to su brojevi:
 $110 \cdot 1 = 110, 110 \cdot 4 = 440$ i $110 \cdot 9 = 990$.
- Točan odgovor je D.

8. Prilikom konstrukcije kuta veličine 60° ravnalom i šestarom moramo šestarom nacrtati dva luka (kao na slici).

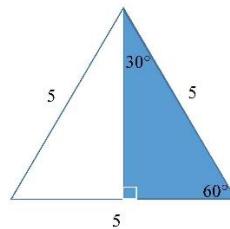
Koliko najmanje lukova moramo nacrtati ako želimo ravnalom i šestarom konstruirati pravokutan trokut s kutom veličine 30° i duljinom najdulje stranice od 5 cm?



A. više od 5	B. 5	C. 4	D. manje od 4	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------	---------	---------	------------------	--

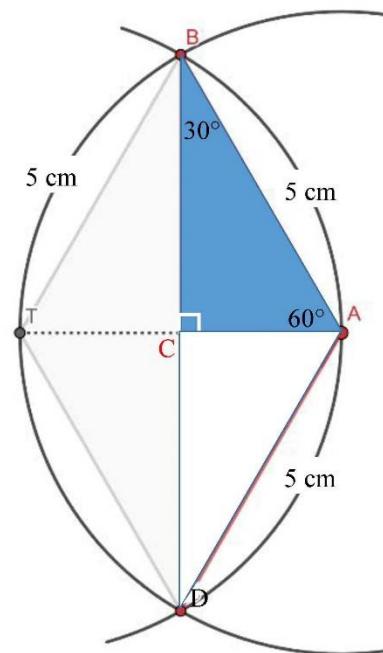
Rješenje:

Primijetimo da je pravokutan trokut s kutom veličine 30° i duljinom najdulje stranice od 5 cm pola jednakostaničnog trokuta duljine stranice 5 cm.



Konstrukcija s 2 luka:

- iz točke T nacrtamo luk polumjera 5 cm,
- na tom luku odaberemo neku točku A i iz nje nacrtamo luk polumjera 5 cm (koji prolazi kroz točku T),
- presječne točke ta dva luka označimo s B i D ,
- nacrtajmo dužinu \overline{BD} ,
- trokut ABC je pravokutan s kutom veličine 30° i duljinom najdulje stranice od 5 cm



Točan odgovor je **D**.

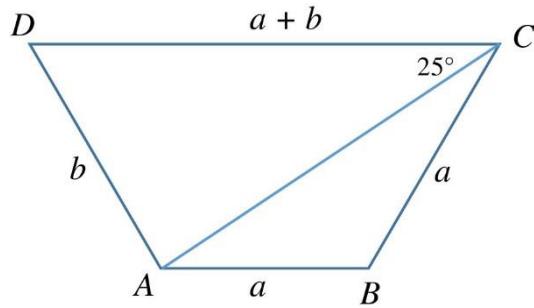
9. U trapezu $ABCD$ osnovica \overline{AB} jednako je duga kao krak \overline{BC} , a osnovica \overline{DC} duga je kao oba kraka zajedno.

Dijagonala \overline{AC} zatvara s osnovicom \overline{DC} kut od 25° , kolika je veličina kuta trapeza uz vrh D ?

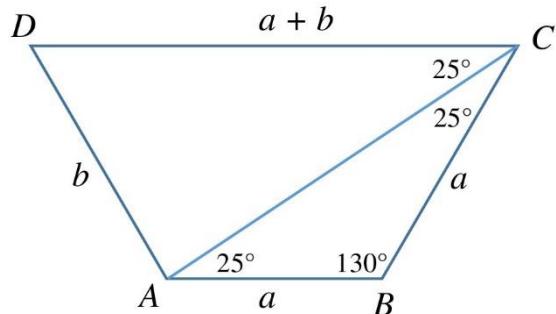
A. 120°	B. 90°	C. 80°	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
------------	-----------	-----------	----------------------------	------------------------------------

Rješenje:

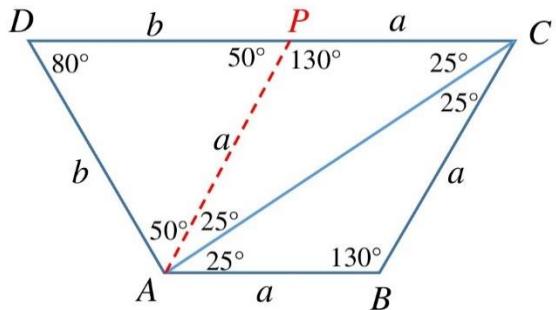
Skicirajmo dani trapez:



Izračunajmo kute u trokutu ABC . Kut BAC jednak je kutu ACD jer su to kutovi uz presječnicu. Trokut ABC jednakokračan je, pa možemo izračunati i mjere preostala dva kuta u tom trokutu.



Da bismo iskoristili činjenicu da je osnovica \overline{CD} jednako duga kao oba kraka zajedno, označimo s P točku na dužini \overline{CD} koja je od C udaljena za a i spojimo tu točku s vrhom A . Četverokut $ABCP$ je romb (jer je \overline{AB} paralelno i jednako dugo kao \overline{CP} i $|AB|=|BC|$). Stoga zaključujemo da je $|AP|=a$. Kut DPA suplementaran je kutu APC pa je $|\angle DPA|=50^\circ$. Dakle, trokut APD jednakokračan je s duljinom osnovice a . Sada jednostavno izračunamo preostale kute trokuta APD .



Točan odgovor je C.

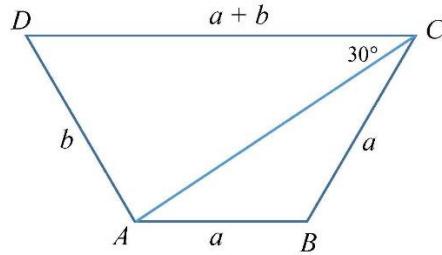
10. U trapezu $ABCD$ osnovica \overline{AB} jednako je duga kao krak \overline{BC} , a osnovica \overline{DC} duga je kao oba kraka zajedno.

Dijagonala \overline{AC} zatvara s osnovicom \overline{DC} kut od 30° . Ako je opseg trapeza $ABCD$ 20 cm, kolika mu je površina?

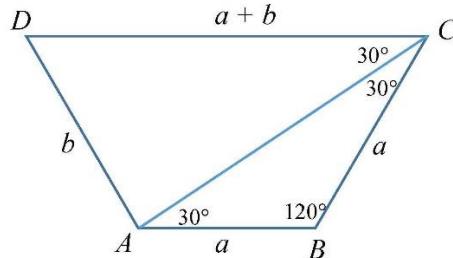
A. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$	B. $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$	C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	----------------------------	------------------------------------

Rješenje:

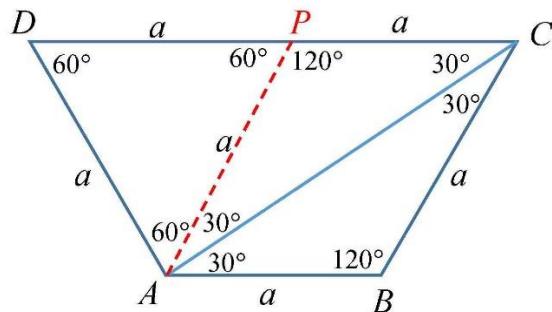
Skicirajmo dani trapez:



Izračunajmo kutove u trokutu ABC . Kut BAC jednak je kutu ACD jer su to kutovi uz presječnicu. Trokut ABC jednakokračan je, pa možemo izračunati i mjeru preostala dva kuta u tom trokutu.



Da bismo iskoristili činjenicu da je osnovica \overline{CD} jednako duga kao oba kraka zajedno, označimo s P točku na dužini \overline{CD} koja je od C udaljena za a i spojimo tu točku s vrhom A . Četverokut $ABCP$ je romb (jer je \overline{AB} paralelno i jednako dugo kao \overline{CP} i $|AB|=|BC|$). Stoga zaključujemo da je $|AP|=a$. Kut DPA suplementaran je kutu APC pa je $|\angle DPA|=60^\circ$. Dakle, trokut APD jednakostaničan je s duljinom stranice a .



S obzirom da je opseg danog trapeza 20 cm, zaključujemo da je $a = 20 : 5 = 4 \text{ cm}$. Površina trapeza sastoji se od tri jednakostanična trokuta: $P = 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Točan odgovor je C.