

Proljetno kolo 2020./2021.

1. Ako je $D(a, b, c) = 4$ i $V(a, b, c) = 240$, koliki je najmanji mogući umnožak brojeva a , b i c ?

A.	B.	C.	D.	E.
960	3 840	11 520	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$V(a, b, c) = 240$ pa 240 prikazimo kao umnožak prostih faktora:

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

S obzirom da je $D(a, b, c) = 4$, brojeve a , b i c možemo prikazati kao

$$a = 4x, b = 4y, c = 4z, \text{ pri čemu je } D(x, y, z) = 1 \text{ i } V(x, y, z) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Brojevi x , y i z nisu jedinstveni i postoji više mogućnosti.

Primjerice: $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$ ili $(x = 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 5)$.

Najmanji mogući umnožak brojeva a , b i c dobit ćemo kada je umnožak brojeva x , y i z najmanji moguć. To će biti slučaj ako niti jedan faktor ne ponovimo više puta.

Primjerice: $(x = 2 \cdot 2, y = 3 \text{ i } z = 5)$ ili $(x = 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 1)$.

U oba slučaja je $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, pa je $a \cdot b \cdot c = 4x \cdot 4y \cdot 4z = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3\,840$.

Točan odgovor je **B**.

2. Ako je $D(a, b, c) = 4$ i $V(a, b, c) = 240$, koliki je najveći mogući umnožak različitih brojeva a, b i c ?

A. 3 840	B. 115 200	C. 230 400	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------	---------------	---------------	----------------------------	------------------------------------

Rješenje:

$V(a, b, c) = 240$ pa 240 prikažimo kao umnožak prostih faktora:

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

S obzirom da je $D(a, b, c) = 4$, brojeve a, b i c možemo prikazati kao

$$a = 4x, b = 4y, c = 4z, \text{ pri čemu je } D(x, y, z) = 1 \text{ i } V(x, y, z) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Brojevi x, y i z nisu jedinstveni i postoji više mogućnosti.

Primjerice: $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$ ili $(x = 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 5)$.

Najveći mogući umnožak brojeva a, b i c dobit ćemo kada je umnožak brojeva x, y i z najveći moguć. To će biti slučaj ako svaki faktor napišemo dva puta.

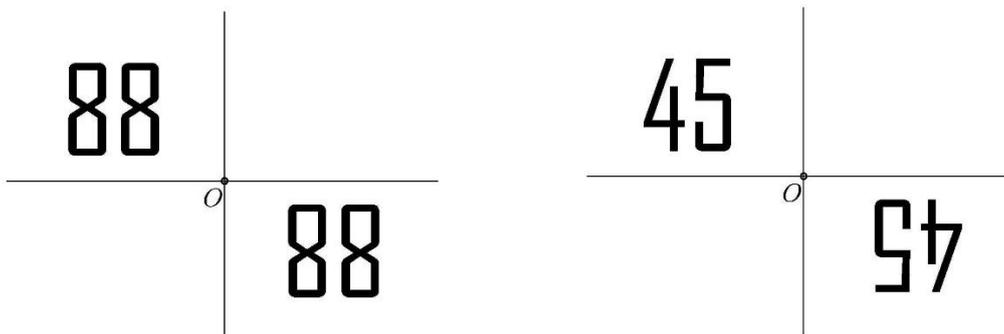
Primjerice: $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3, y = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$ ili $(x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, y = 2 \cdot 2 \text{ i } z = 3 \cdot 5)$. Sada je

$x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, pa je $a \cdot b \cdot c = 4x \cdot 4y \cdot 4z = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 230\,400$.

Točan odgovor je C.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ispisujemo brojeve te ih preslikavamo centralnom simetrijom s obzirom na točku O . Primjerice, centralnosimetrična slika broja 88 je broj 88, ali centralnosimetrična slika broja 45 nije broj (bez okretanja papira).

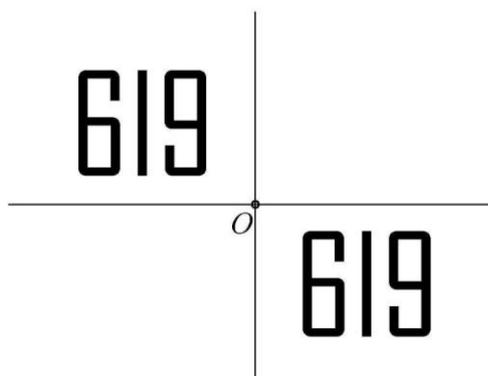


Koliko postoji troznamenkastih brojeva kojima će centralnosimetrična slika s obzirom na točku O predstavljati zapis toga istog broja bez okretanja papira?

A.	B.	C.	D.	E.
12	6	9	ništa od navedenog	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Primijetimo da se znamenke 0, 1 i 8 opisanim preslikavanjem preslikavanju u 0, 1 i 8. Međutim, treba primijetiti i da se broj 6 preslikava u 9, te broj 9 u 6. Također primijetimo da se znamenka jedinice preslikava u znamenku stotice, dok se znamenka desetice preslikava u sebe samu.



Ispišimo sada sve mogućnosti:

101 609 808 906
111 619 818 916
181 689 888 986

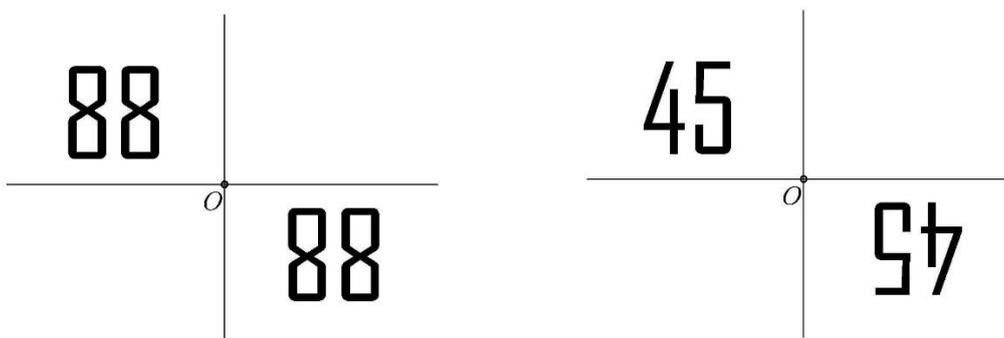
Postoji 12 takvih brojeva.

Točan odgovor je A.

4. Koristeći znamenke na slici

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ispisujemo brojeve te ih preslikavamo centralnom simetrijom s obzirom na točku O . Primjerice, centralnosimetrična slika broja 88 je broj 88, ali centralnosimetrična slika broja 45 nije broj (bez okretanja papira).



Koliko četveroznamenkastih brojeva postoji kojima će centralnosimetrična slika s obzirom na točku O predstavljati zapis toga istog broja bez okretanja papira?

A.	B.	C.	D.	E.
20	6	9	ništa od navedenog	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Vodeći računa o svemu što smo naveli u rješenju prethodnog zadatka mogli bismo ispisati sva rješenja. Međutim, sada ćemo zadatak riješiti na drugi način.

S obzirom da se znamenka tisućice preslikava u znamenku jedinice, a znamenka stotice u znamenku desetice, primijetimo da su traženi brojevi oblika \overline{abba} , pri čemu znamenka a može biti 1, 6, 8 ili 9, a znamenka b može biti 0, 1, 6, 8 ili 9.

Dakle, znamenku a možemo izabrati na 4 načina i znamenku b na 5 načina. To znači da broj \overline{ab} možemo izabrati na $4 \cdot 5 = 20$ načina. Svakom izboru broja \overline{ab} odgovara broj \overline{abba} (npr. broju 18 odgovara broj 1881).

Četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju dano svojstvo je 20.

Točan odgovor je A.