Zimska škola u Lucijanki
21. 2. - 25. 2. 2022.

Sadržaj ove knjige uključuje sljedeća predavanja:

Ponedjeljak (21. 2.)	Matematičke igre - Matej Ištuk (FER) i Vatroslav Jakopec (FER)
Utorak (22. 2.)	Sustavi - Ivan Bevanda (4.G) i Maja Škrlin (4.F)
Srijeda (23. 2.)	Pokušaj hvatanja kuteva - Iva Tadić (3.G) i Matej Vojvodić (4.G)
Četvrtak (24. 2.)	Diofantske jednadžbe - Lukas Baltas (PMF) i Matej Vojvodić (4.G)
Petak (25. 2.)	Princip ekstrema - Jakov Ljubičić (PMF) i Leonarda Pribanić (FER)

GLV forces

Sponsored by GLV & Đurđa

Trenutni i bivši učenici Gimnazije Lucijana Vranjanina
Kontaktirajte nas na glv.forces@gmail.com

Luckova zimska škola matematike
u Lucijanki 21. 2. 2022.

Matematičke igre
Matej Ištuk i Vatroslav Jakopec

Teorijski uvod

Definicija igre:
1) igra ima proizvoljan broj igrača
2) svaki igrač ima pristup strategijama koje može pratiti
3) strategije koje su igrači odabrali odlučuju rezultat igre
4) svaki rezultat igre ima neku vrijednost svakom igraču (možemo ih prikazati brojevima)

Kod igara gdje igrači igraju naizmjence korisno je promatrati koje su pozicije igre pobjedničke, odnosno gubitničke. Pozicija će biti pobjednička (za igrača koji je na redu) ako je iz nje **moguće nekim potezom** doći u poziciju koja je gubitnička. Pozicija će biti gubitnička ako **svaki potez** vodi iz te pozicije u pobjedničku poziciju.

U nekim igrama postoje strategije koje nisu nužno optimalne ali su izrazito stabilne, tj. promjenom strategije ne povećava se šansa pobjede igrača koji mijenja strategiju. Takvu poziciju nazivamo Nashovom ravnotežom, a javljaju se na primjer u igri par-nepar (šansa za pobjedu je 50% bez obzira na strategiju, tako da je svaka jednako dobra ukoliko ju drugi igrač ne zna) ili kamen-škare-papir (recimo, bacanjem isključivo kamena i dalje bismo trebali dobiti isti udio kao da bacamo bilo koji znak nasumično, dakle ne isplati nam se mijenjati strategiju).

Lagani zadaci

1. Prvi igrač izgovara cijeli broj, zatim drugi igrač izgovara još jedan cijeli broj. Ako je zbroj izgovorenih brojeva paran, pobjeđuje prvi igrač, a ako je neparan pobjeđuje drugi. Tko pobjeđuje?

Rješenje 1. zadatka : Drugi igrač pobjeđuje, strategija je da kaže broj druge parnosti od prvog.

2. Prvi igrač izgovara cijeli broj, zatim drugi igrač izgovara još jedan cijeli broj. Ako je umnožak izgovorenih brojeva paran, pobjeđuje prvi igrač, a ako je neparan pobjeđuje drugi. Tko pobjeđuje?

Rješenje 2. zadatka : Prvi igrač pobjeđuje. Pobjeđuje igrač koji ima paran broj kao uvjet pobijede jer očito može samo reći bilo koji paran broj.

3. Na tri gomile nalaze se žetoni, na prvoj gomili 2 žetona, na drugoj 3, a na trećoj 4 žetona. Igraju dva igrača. Jednim potezom dozvoljeno je jednu hrpu razdvojiti na dvije manje hrpe žetona. Gubi igrač koji nema mogućnost odigrati potez. Tko pobjeđuje?

Rješenje 3. zadatka : Drugi igrač pobjeđuje. Broj hrpa svakom podjelom raste za 1, ali je broj žetona konstantan. Igra završava kada je broj hrpa (na početku 3) jednak broju žetona (9) što je sveukupno 6 podjela, stoga hrpu neće moći podijeliti prvi igrač jer je redni broj njegovih podjela neparan.

4. Brojevi od 1 do 6 napisani su jedan za drugim. Igrači naizmjence raspoređuju znakove plus i minus između tih brojeva. Kad se sva mjesta popune, izračunava se rezultat. Ako je rezultat paran broj, pobjednik je prvi igrač, a ako je neparan, pobjednik je drugi igrač. Tko pobjeđuje?

Rješenje 4. zadatka : Drugi igrač pobjeđuje. Rezultat je uvijek neparan jer kad god bilo koji predznak ispred n promijenimo, konačni rezultat će se promijeniti za $2n$.

5. Dva igrača igraju naizmjence. Na hrpi se nalazi 11 bombona. Dozvoljen potez je s hrpe maknuti 1, 2 ili 3 bombona. Pobjednik je onaj koji makne zadnji bombon s hrpe. Koji igrač pobjeđuje?

Rješenje 5. zadatka : Prvi igrač pobjeđuje. Prvi igrač uzme 3 bombona, i onda u svoja iduća dva poteza uzme $4 - n$, gdje je n broj bombona koje je uzeo drugi igrač prethodni red.

6. Ako se na hrpi iz prethodnog zadatka nalazi 12 bombona, koji igrač sada pobjeđuje? Za koje sve količine bombona na hrpi zasigurno pobjeđuje prvi igrač?

Rješenje 6. zadatka : Drugi igrač pobjeđuje. Drugi igrač uzima $4 - n$ bombona svaki potez, što ga vodi do sigurne pobjede. Općenito, prvi igrač dobiva ukoliko početni broj nije djeljiv s 4, a drugi samo kada je djeljiv s 4.

7. Imamo dvije hrpe s po 5 bombona. U jednom potezu jedan igrač može uzeti koliko god želi bombona, ali samo s jedne hrpe. Gubi igrač koji nema potez. Koji igrač pobjeđuje?

Rješenje 7. zadatka : Drugi igrač pobjeđuje. Drugi igrač kopira poteze prvoga, samo na drugoj hrpi.

Umjereni zadaci

8. Na ploči je napisano redom n minusa. Dva igrača naizmjence prepravljaju jedan ili dva susjedna minusa u plus. Pobjednik je onaj igrač koji posljednji prepravi minus. Koji igrač pobjeđuje?

Rješenje 8. zadatka : Prvi igrač pobjeđuje. Prvi igrač prepravi srednji minus (ako je n neparan, srednja dva ako je n paran) te onda samo kopira poteze drugog igrača na drugoj strani "minusa", što ga dovodi do pobjede.

9. Dva igrača igraju križić-kružić na ploči 9×9. Za svaki red i za svaki stupac u kojem na kraju igre ima više križića nego kružića prvi igrač dobije jedan bod. Drugi igrač dobiva po jedan bod za svaki red i za svaki stupac u kojem ima više kružića nego križića. Koji će igrač imati više bodova?

Rješenje 9. zadatka : Prvi igrač će imati više bodova. Prvi igrač stavi svoj simbol u centralno polje ploče te onda kopira poteze drugog igrača, što ga dovodi do pobjede.

10. Grupa od N ljudi odabiru realni broj od 0 do 100. Igru pobjeđuje igrač čiji je broj najbliži 2/3 prosjeka odabira grupe. Koja je Nashova ravnoteža ove igre? Hoće li u grupi prosječnih ljudi odgovor koji daje Nashova ravnoteža pobijediti, te ako neće, koji je broj najbolje odabrati?

Rješenje 10. zadatka : 0, jer nema smisla odabrati broj veći od 66, pa onda nema smisla odabrati broj veći od 44 i tako dalje do 0. No, vjerojatno jer većina ljudi ne razmišljaju savršeno logično, eksperimentalno je utvrđeno da je broj bio oko 21.6.

11. Imamo 10 žetona: 2 bijela, 2 crna, 2 crvena, 2 plava i 2 zelena. Dva igrača naizmjence stavljaju žetone na vrhove konveksnog deseterokuta. Cilj igrača A je da napravi niz od 5 žetona svih 5 različitih boja, a igrač B ga u tome ometa. Igru počinje igrač B. Koji igrač pobjeđuje?

Rješenje 11. zadatka : Igrač A pobjeđuje. Igrač A može staviti istu boju koju je igrač B stavio samo na drugi kraj deseterokuta, što ga dovodi do pobijede.

12. Održava se dražba za novčanicu od 100 kn u kojoj sudjelujete, ali ni gubitnici ni pobjednici dražbe ne dobivaju novac natrag. Postoji li Nashova ravnoteža za ovu dražbu (i ako postoji, koja je)?

Rješenje 12. zadatka : Ne postoji Nashova ravnoteža. Dok su cijene novčanice manje od 100kn, uvijek je isplativo ponuditi više novca, a dok je cijena 100 ili iznad gubitci su za 100 kn manji, što znači da nema količine novca koju je previše ponuditi.

13. Dva igrača naizmjenično lome čokoladu 5×10. Jedan potez je jedan lom po udubljenju duž ili poprijeko čokolade. Pobjednik je igrač koji odlomi prvi komadić 1×1. Koji igrač pobjeđuje?

Rješenje 13. zadatka : Pobjeđuje igrač koji ide prvi. Prvi igrač prelomi čokoladu po pola, te dalje krade strategiju do pobjede.

Teški zadaci

14. Mirko i Slavko igraju igru sa snopom karata. Mirko, pa zatim Slavko, obojica odabiru niz boja duljine 3 (crnu ili crvenu), zatim se karte kontinuirano izvlače s vrha deka dok se ne izvuče nečiji niz boja. Ima li jedan igrač prednost i ako da, kako ju ostvaruje?

Rješenje 14. zadatka : Slavko ima prednost i ostvaruje ju tako što uzme Mirkovu sekvencu i na početak nje stavi boju suprotnu srednjoj boji Mirkove.

Sličnu ideju možete vidjeti i ovdje: https://www.youtube.com/watch?v=IAiNqQi30-Y, odnosno puno rješenje i objašnjenje ovdje: https://www.youtube.com/watch?v=Sa9jLWKrX0c

15. Mirko i Slavko igraju kartašku igru s $2n$ karata koje su numerirane s $1, \dots, 2n$. Na početku se svakom podijeli n karata. Nakon toga naizmjence bacaju karte sve dok zbroj bačenih karata nije djeljiv s $2n + 1$. Ako je zbroj bačenih karata djeljiv s $2n + 1$, pobjeđuje zadnja osoba koja je bacila kartu. Tko ima pobjedničku strategiju ako Slavko igra prvi?

Rješenje 15. zadatka : Mirko ima pobjedničku strategiju. Dokazat ćemo da nakon svakog Slavkova poteza Mirko može ili završiti igru ili postići da Slavko ne može završiti igru u sljedećem potezu. Pretpostavimo da je Mirku u nekom trenutku ostalo $k - 1$ karata, a Slavku k karata, te neka je zbroj karata na stolu kongruentan s j modulo $2n + 1$. Ako Slavko ima $2n + 1 - j$ među svojim kartama, može to odigrati i pobijediti. Ako nema tu kartu, onda ima jednu kartu više od Slavka. Za svaku Slavkovu kartu K, najviše jedna Mirkova karta takva je da će Slavko nakon njegovog poteza pobijediti bacanjem karte K. To znači da Mirko ima barem jednu kartu koju može odigrati, a da Slavko neće pobijediti u potezu nakon, a kako svi znaju koje su karte preostale i koje su bačene, Mirko zna koju kartu treba baciti. Dakle, Mirko ima pobjedničku strategiju.

16. Mirku i Slavku dosta je suparništva, odlučili su popuniti Mirkovu staru šahovsku ploču sa što više Slavkovih domina. Jedini problem je što Mirkovoj šahovskoj ploči nedostaju dva suprotna kutna polja. Koliko najviše domina mogu staviti na šahovsku ploču?

Rješenje 16. zadatka : 30. Svaki domino zauzima jedno crno i jedno bijelo polje, a suprotni rubovi su iste boje, stoga imamo ili 30 crnih ili 30 bijelih polja, te je maksimalan broj domina na takvoj ploči 30. Uf, preteško predavanje.

Prijedlozi za daljnje rješavanje:

https://mnm.hr/online-predavanja

Posebno predavanja Bojanje i popločavanje (15.), Invarijante (10.) i Dirichletov princip (5.).

Luckova zimska škola matematike
u Lucijanki 22. 2. 2022.

Sustavi
Ivan Bevanda i Maja Škrlin

Teorijski uvod

U ovom predavanju upoznat ćete se s najčešćim idejama i metodama koje će vam pomoći u rješavanju sustava jednadžbi. Nažalost, ne postoji savršena formula kojom ćete riješiti svaki sustav, ali smo sigurni da će vas ove ideje usmjeriti na pravi put.

Ideje koje se mogu koristiti za rješavanje sustava jednadžbi:

1. faktorizacija, posebno kad se jedna strana jednadžbe izjednači s nulom
2. zbrajanje, oduzimanje i množenje jednadžbi
3. supstitucije

Za faktorizaciju se obično koriste sljedeće metode:

1. izlučivanje zajedničkog faktora (svojstvo distributivnost)
2. grupiranje, zapisavanje izraza u drugom obliku (komutativnost i asocijativnost)
3. algebarski identiteti

Neki od korisnih identita:

1. kvadrat binoma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. kub binoma: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
3. razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
4. zbroj/razlika kubova: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
5. kvadrat trinoma: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

Rješenja kvadratne oblika $ax^2+bx+c=0$ su dva (ne nužno realna) broja x_1 i x_2 koja možemo dobiti pomoću formule za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Kod rješavanja kvadratnih jednadžbi korisno je znati diskriminantu pomoću koje određujemo tip rješenja. Diskriminanta kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4ac$:
$D > 0 \Longrightarrow$ realna i različita rješenja
$D = 0 \Longrightarrow$ realno dvostruko rješenje
$D < 0 \Longrightarrow$ konjugirano kompleksna rješenja.

Sustavi jednadžbi bez kvadratnih jednadžbi

1. Zadan je sustav jednadžbi:

$$a^2 + b^2 = 10$$

$$3a + 3b = 12$$

Odredi iznos:
a) umnoška ab.
b) točne vrijednosti brojeva a, b.

Rješenje 1. zadatka : a)

$$3a + 3b = 12$$

$$3(a + b) = 12$$

$$a + b = 4$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$4^2 = 10 + 2ab$$

$$2ab = 6$$

$$ab = 3$$

b)

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$4^2 - (a - b)^2 = 12$$

$$a - b = \pm 2$$

Onda imamo sustav:

$$a + b = 4$$

$$a - b = \pm 2$$

Iz toga slijedi da $a = 3$ i $b = 1$ ili $a = 1$ i $b = 3$.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 = 8$ i $a^6 + b^6 = 416$.
Odredi umnožak ab.

Rješenje 2. zadatka : Prema formuli za kub binoma dobivamo:

$$(a^2 + b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$$

$$= a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2)$$

$$8^3 = 416 + 3a^2b^2 \cdot 8$$

$$a^2b^2 = 4 \Longrightarrow ab = 2$$

jer su a i b pozitivni, pa je i njihov umnožak pozitivan.

3. Neka su x i y međusobno različiti realni brojevi takvi da vrijedi:

$$x + 4 = (y - 2)^2$$

$$y + 4 = (x - 2)^2$$

Odredi $x^2 + y^2$.

Rješenje 3. zadatka : Ako raspišemo kvadrate binoma, jednadžbe se dovode u oblik:

$$x = y^2 - 4y$$

$$y = x^2 - 4x$$

Oduzmemo li te jednadžbe dobivamo:

$$x - y = y^2 - x^2 - 4y + 4x$$

$$x - y = (y - x)(y + x) - 4(y - x)$$

$$x - y = -(x - y)(x + y) + 4(x - y)$$

$x \neq y$, pa možemo dijeliti obje strane s $(x - y)$.

$$1 = -x - y + 4$$

$$x + y = 3$$

Zbrojimo li jednadžbe iz prvog i drugog reda rješenja, dobivamo:

$$x + y = x^2 + y^2 - 4x - 4y$$

$$(x + y) = x^2 + y^2 - 4(x + y)$$

$$x^2 + y^2 = 5(x + y) = 15$$

4. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10$$

Koliko je $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$?

Hint (4-1) : Pomnožiti obje jednakosti s ab.
Hint (4-2) : Prepoznati zbroj kubova i iskoristiti formulu.

Rješenje 4. zadatka : Množenjem svake od jednakosti s ab imamo

$$a^2 + b^2 = 3ab$$

$$a^3 + b^3 = 10ab$$

Uočimo zbroj kubova i raspišemo po formuli.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu imamo $10ab = (a + b)(3ab - ab)$, odnosno nakon sređivanja konačno dobivamo $a + b = 5$.

Iz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i prve jednakosti slijedi $(a + 5)^2 = 5ab$. Uvrštavanjem imamo $5ab = 5^2$, odnosno $ab = 5$.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ svedemo na zajednički nazivnik i zbrojimo, te tada imamo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)}{ab}$

Preostaje nam samo uvrstiti prethodno dobivene vrijednosti iz kojih slijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

5. U koordinatnoj ravnini prikažite sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijede jednakosti:

$$|x + y| = 1$$

$$|x| + |y| = 1$$

Rješenje 5. zadatka : Prva nam jednadžba kaže da $x + y = 1$ ili $x + y = -1$. Ovo su jednadžbe pravaca u koordinatnom sustavu. Druga jednadžba nam daje 4 slučaja (1 za svaki kvadrant) i njezina je slika u obliku dijamanta sastavljenog od segmenata 4 pravca.

$$x \geq 0, y \geq 0 \Longrightarrow x + y = 1$$

$$x \leq 0, y \geq 0 \Longrightarrow -x + y = 1$$

$$x \leq 0, y \leq 0 \Longrightarrow -x - y = 1$$

$$x \geq 0, y \leq 0 \Longrightarrow x - y = 1$$

Presjek pravaca dobivenih iz prve jednadžbe i dijamanta dobivenog iz druge jednadžbe daje geometrijsko rješenje.

6. Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$(x + y)(x + y + z) = 90$$

$$(y + z)(x + y + z) = 105$$

$$(z + x)(x + y + z) = 255$$

Hint (6-1) : Zbroji sve jednadžbe i faktoriziraj.
Hint (6-2) : Riješi slučajeve.

Rješenje 6. zadatka : Zbrajanjem jednadžbi dobivamo $2(x+y+z)^2 = 450$ iz čega slijede dva moguća slučaja. $x+y+z=15$ ili $x+y+z=-15$

Uvrštavanjem u zadani sustav dobivamo dva sustava jednadžbi

$$x+y=6$$
$$y+z=7$$
$$z+x=17$$

$$x+y=-6$$
$$y+z=-7$$
$$z+x=-17$$

Oba sustava riješit ćemo tako da redom oduzimamo svaku jednadžbu od početne jednadžbe, odnosno od mogućeg slučaja.

$$x+y+z=15 \Longrightarrow x+y=6 \Longrightarrow z=9$$

Analogno za svaku varijablu i za oba slučaja.

Konačno dobivmo da su $(x,y,z)=(8,-2,9)$ i $(x,y,z)=(-8,2,-9)$.

7. Odredite sve realne brojeve x, y, z za koje vrijedi:

$$xy+x+y=31$$
$$xz+x+z=-5$$
$$yz+y+z=-9$$

Hint (7-1) : U svakoj jednadžbi dodati 1 s obje strane.
Hint (7-2) : Faktorizirati i pomnožiti sve tri jednadžbe.

Rješenje 7. zadatka : U svakoj jednadžbi dodamo 1 s obje strane.

$$xy+x+y+1=32$$
$$xz+x+z+1=-4$$
$$yz+y+z+1=-8$$

Faktoriziramo

$$(x+1)(y+1)=32$$
$$(x+1)(z+1)=-4$$
$$(y+1)(z+1)=-8$$

Množenjem jednadžbi dobijemo

$$((x+1)(y+1)(z+1))^2 = 1024$$

iz čega slijede dva moguća slučaja: $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$ i $(x+1)(y+1)(z+1)$=-32

1. slučaj: podijelimo jednadžbu $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$ s jednadžbom $(x+1)(y+1) = 32$. Dobijemo $z+1 = 1$ odnosno $z = 0$. Analogno dijelimo s drugom i trećom jednadžbom i dobijemo vrijednosti za x i y.

2. slučaj: podijelimo jednadžbu $(x+1)(y+1)(z+1) = -32$ s jednadžbom $(x+1)(y+1) = 32$. Dobijemo $z+1 = -1$ odnosno $z = -2$. Analogno dijelimo s drugom i trećom jednadžbom i dobijemo vrijednosti za x i y.

Konačno rješenja su $(x, y, z) = (-5, -9, 0)$ i $(x, y, z) = (3, 7, -2)$

8. Postoje li realni brojevi x, y, z takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -5$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 8$$

Hint (8-1) : Kvadriraj izraz s recipročnim članovima iz prve jednadžbe.

Rješenje 8. zadatka : Pretpostavimo da takvi realni x, y, z postoje. Tada je

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)^2 &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y} + \frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z} + \frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\right)\\ &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right)\\ &= 8 + 2\cdot(-5)\\ &= -2\end{aligned}$$

što je nemoguće jer su kvadrati realnih brojeva nenegativni. Dakle, ne postoji takvi realni x, y, z.

9. Nađite realna rješenja sustava jednadžbi:

$$x + y + z = 2$$

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1$$
$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6$$

Hint (9-1) : Pojednostavi sustav.

Rješenje 9. zadatka : Najprije ćemo transformacijom jednadžbi dobiti ekvivalentan ali jednostavniji sustav. Sređivanjem druge jednadžbe i korištenjem prve jednakosti dobivamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx = 1$$

$$(x + y + z)^2 + xy + yz + zx = 1$$

$$xy + yz + zx = -3$$

Analogno postupamo i s trećom jednadžbom:

$$x(xy + xz) + y(yz + xy) + z(xz + yz) = -6$$

$$x(3 + yz) + y(3 + xz) + z(3 + xy) = 6$$

$$x + y + z + xyz = 2$$

$$xyz = 0$$

Dakle, polazni sustav ekvivalentan je sustavu:

$$x + y + z = 2$$

$$xy + yz + zx = -3$$

$$xyz = 0$$

Iz posljednje jednadžbe je $x = 0$ ili $y = 0$ ili $z = 0$, pa se sustav svede na još jednostavniji sustav:

$$x = 0, yz = -3, y + z = 2$$

$$y = 0, xz = -3, x + z = 2$$

$$z = 0, xy = -3, x + y = 2$$

odakle dobivamo rješenja:

$$(x, y, z) \in \{(0, 3, -1), (0, -1, 3), (3, 0, -1), (-1, 0, 3), (3, -1, 0), (-1, 3, 0)\}$$

Sustavi jednadžbi s kvadratnim jednadžbama

10. Brojevi x i y zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$x + y + \frac{x}{y} = 19$$

$$\frac{x(x+y)}{y} = 60$$

Koje sve vrijednosti može poprimiti $x + y$?

Rješenje 10. zadatka : Iz druge jednadžbe možemo izraziti kvocijent x i y:

$$\frac{x}{y} \cdot (x+y) = 60$$

$$\frac{x}{y} = \frac{60}{x+y}$$

To možemo uvrstiti u prvu jednadžbu i dobiti:

$$(x+y) + \frac{60}{x+y} = 19$$

Ovdje jednadžbu množimo sa $x + y$, ali na kraju moramo provjeriti rješenja jer smo pretpostavili da $x + y \neq 0$.

$$(x+y)^2 + 60 = 19(x+y)$$

Uvodimo supstituciju $t = x + y$

$$t^2 - 19t + 60 = 0$$

Riješimo kvadratnu jednadžbu i dobijemo:

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = 15$$

Pogledajmo prvo rješenje.

$$\frac{x}{y} = \frac{60}{x+y} = 15$$

$$x = 15y$$

$$y = 4 - x$$

$$x = 15(4 - x)$$

$$16x = 60$$

$$x = \frac{15}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}$$

Dakle, $x + y = 4$ daje validna rješenja sustava.
Analogno za t_2 dobijemo realna rješenja sustava i možemo konstatirati da $x + y$ može postići vrijednosti 4 i 15.

11. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 + xy - 4y^2 = -1$$

$$4x^2 + xy - 11y^2 = -2$$

Hint (11-1) : Pomnoži prvu jednadžbu s 2.

Rješenje 11. zadatka : Množenjem prve jednadžbe s 2 dobivamo

$$2x^2 + 2xy - 8y^2 = -2$$

$$4x^2 + xy - 11y^2 = -2$$

Budući da su desne strane jednake, lijeve možemo izjednačiti

$$2x^2 + 2xy - 8y^2 = 4x^2 + xy - 11y^2$$

Sređivanjem dobivamo

$$2x^2 - xy - 3y^2 = 0$$

Ako srednji član raspišemo kao razliku možemo faktorizirati izraz

$$2x^2 + 2xy - 3xy - 3y^2 = 0$$

$$2x(x + y) - 3y(x + y) = 0$$

$$(x + y)(2x - 3y) = 0$$

Produkt faktora jednak je nuli iz čega slijedi da je jedan od faktora jednak nuli. Dakle, $x + y = 0$ ili $2x - 3y = 0$.
1. slučaj: $x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$x^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \Longrightarrow y = \mp\frac{1}{2}$$

Rješenja su $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ i $(x, y) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

2. slučaj: $2x - 3y = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}y$
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2 \Longrightarrow x = \pm 3$$

Rješenja su $(x, y) = (3, 2)$ i $(x, y) = (-3, -2)$

12. Riješite sustav jednadžbi

$$2(x^2+y^2)-3xy+2(x+y)-39=0$$

$$3(x^2+y^2)-4xy+(x+y)-50=0$$

Rješenje 12. zadatka : Uvedimo supstituciju $a=x+y$ i $b=xy$.

$$2(a^2-2b)-3b+2a-39=0$$

$$3(a^2-2b)-4b+a-50=0$$

Iz prve jednadžbe izarzimo b i uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$b=\frac{2a^2+2a-39}{7}$$

$$a^2-13a+40=0$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $a_1=5$ i $a_2=8$. Iz toga zaključimo da je $b_1=3$ i $b_2=15$.

$$x+y=5$$

$$xy=3 \Longrightarrow y=\frac{3}{x}$$

$$x+\frac{3}{x}-5=0$$

$$x^2-5x+3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$y_{1,2}=\frac{5\mp\sqrt{13}}{2}$$

13. Realni brojevi a i b zadovoljavaju ove jednakosti:

$$a^3-3ab^2=44$$

$$b^3-3a^2b=8$$

Koliko je a^2+b^2?

Hint (13-1) : Kvadrirati svaku jednadžbu i zbrojiti ih.

Rješenje 13. zadatka : Nakon kvadriranja svake jednadžbe dobivamo:

$$(a^3 - 3ab^2)^2 = 44^2$$

$$(b^3 - 3a^2b)^2 = 8^2$$

Zbrajanjem dobivamo

$$(a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = 2000$$

Kvadriramo po formuli za kvadrat zbroja i sredimo izraz

$$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 2000$$

Uočimo kub zbroja i preoblikujemo pomoću formule

$$(a^2 + b^2)^3 = 2000$$

Konačno slijedi da je $a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2000} = 10\sqrt[3]{2}$

14. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi u skupu realnih brojeva:

$$2a^2 - 2ab + b^2 = a$$

$$4a^2 - 5ab + 2b^2 = b$$

Hint (14-1) : Pomnožiti prvu jednadžbu s 2 i oduzeti jednadžbe.

Rješenje 14. zadatka : Nakon množenja prve jednadžbe s 2

$$4a^2 - 4ab + 2b^2 = 2a$$

$$4a^2 - 5ab + 2b^2 = b$$

i njihovim oduzimanjem dobivamo konačnu jednakost

$$ab = 2a - b$$

iz koje možemo iraziti b

$$ab + b = 2a$$

$$b(a + 1) = 2a$$

$$b = \frac{2a}{a + 1}$$

Uvrštavanjem izraza za b u prvu jednadžbu dobivamo

$$2a^2 - 2a\frac{2a}{a + 1} + \frac{(2a)^2}{(a + 1)^2} = a$$

$$2a^2(a + 1)^2 - 4a^2(a + 1) + 4a^2 = a(a + 1)^2$$

$$2a^4 - a^3 - a = 0$$

Ako srednji član jednakosti raspišemo kao zbroj dvaju članova, lijevu stranu jednakosti možemo faktorizirati

$$2a^4 - 2a^3 + a^3 - a = 0$$

$$2a^3(a-1) + a(a^2-1) = 0$$

$$2a^3(a-1) + a(a-1)(a+1) = 0$$

$$(a-1)(2a^3 + a(a+1)) = 0$$

$$(a-1)(2a^3 + a^2 + a) = 0$$

$$a(a-1)(2a^2 + a + 1) = 0$$

Produkt faktora jednak je nuli iz čega slijedi da je jedan od faktora jednak nuli.

1. slučaj: $a = 0$
Uvrštavanjem $a = 0$ u izraz za b dobivamo $b = 0$.
Jedno rješenje je $(a, b) = (0, 0)$

2. slučaj: $a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1 \Longrightarrow b = 1$
Drugo rješenje je $(a, b) = (1, 1)$

3. slučaj: $2a^2 + a + 1 = 0$
Kvdaratnoj jednadžbi odredimo diskriminantu

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = -7$$

Diskriminanta je manja od nule iz čega slijedi da ne postoje realna rješenja.

15. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav:

$$x + y^2 = y^3$$

$$y + x^2 = x^3$$

Hint (15-1) : Oduzmi zadane jednadžbe.

Rješenje 15. zadatka : Oduzimanjem zadanih jednadžbi dobivamo

$$y - x + x^2 - y^2 = x^3 - y^3$$

što je ekvivalentno

$$y - x + (x-y)(x+y) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

odnosno

$$(x-y)(-1 + x + y) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Slijedi daje $x + y - 1 = x^2 + xy + y^2$ ili $x - y = 0$.

1. slučaj: $x+y-1=x^2+xy+y^2$ možemo zapisati kao

$$y^2+(x-1)y+x^2-x+1=0$$

Ovu jednadžbu promatramo kao kvadratnu jednadžbu po y. Njena diskriminanta je

$$D=(x-1)^2-4(x^2-x+1)=-3x^2+2x-3$$

Diskriminanta kvadratnog trinoma $-3x^2+2x-3$ je $-32<0$, pa vrijedi da je $D<0$ za svaki realni broj x, što povlači da početna jednadžba nema realnih rješenja za y. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.
2. slučaj: $x-y=0 \Longrightarrow y=x$ i obje jednadžbe postaju $x+x^2=x^3$, tj. $x(x^2-x-1)=0$. Slijedi da je $x_1=0$ ili $(x^2-x-1)=0$.
Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja

$$x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Jedina rješenja su:

$$(x,y)\in\left\{(0,0),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

Prijedlozi za daljnje rješavanje:

https://mnm.hr/online-predavanja
Posebno predavanja Algebarski izrazi (4.), Jednadžbe i sustavi (14.) i Kvadratna jednadžba (34.).

Luckova zimska škola matematike
u Lucijanki 23. 2. 2022.

Pokušaj hvatanja kutova

Iva Tadić i Matej Vojvodić

Teorijski uvod

U ovom predavanju dvoje će se predavača okušati u hvatanju kutova (o uspješnosti pokušaja govorit će tko preživi). Kako se radi o opasnom i nepredvidljivom putovanju, valja se najprije upoznati s najbitnijim činjenicama koje treba uvijek imati na umu:

- Vršni kutovi jednaki su, kutovi s paralelnim kracima (kutovi uz presječnicu) jednaki su, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni.
- Dijeljenjem kuta pravcem na manje kutove zbroj dobivenih kutova mora biti jednak početnom kutu. Poseban primjer ovoga je da su sukuti suplementarni.
- Vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta.
- Središte trokutu upisane kružnice (koja dodiruje sve stranice) sjecište je simetrala svih kutova, a središte opisane (koja prolazi kroz sve vrhove) sjecište je simetrala svih stranica trokuta.
- Dva su trokuta sukladna (imaju iste stranice i kutove) ukoliko vrijedi bilo koji poučak o sukladnosti: SSS, SKS, KSK, SSK (dvije stranice i kut nasuprot većoj).
- Dva su trokuta slična (imaju iste kutove, a stranice su im u omjeru) ukoliko vrijedi bilo koji poučak o sličnosti: KK, SKS, SSS.
- Ukoliko pravac (tangenta) dira kružnicu, tada je okomit na radijus u točki dodira.
- Ukoliko uzmemo bilo koju tetivu kružnice, simetrala te dužine prolazi kroz središte kružnice.
- Tetivni je četverokut svaki četverokut ABCD kojem se može opisati kružnica. Svaki od sljedećih uvjeta dovoljan je da se pokaže da je četverokut tetivan i ukoliko pokažete bilo koji, smijete koristiti sve ostale:
  - simetrale stranica četverokuta ABCD sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
  - $\angle ABC + \angle ADC = 180$
  - $\angle BCD + \angle DAB = 180$
  - $\angle ABD = \angle DCA$
  - $\angle ADB = \angle BCA$
  - $\angle BAC = \angle CDB$
  - $\angle CAD = \angle DBC$

Lagani zadaci

1. Dokažite da je vanjski kut trokuta jednak zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta.

Rješenje 1. zadatka : Pokažimo najprije za kut kod vrha $\angle A$, a onda možemo analogno pokazati i za sve ostale kutove. Kako je $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = 180$, onda mora vrijediti $|\angle B| + |\angle C| = 180 - |\angle A|$. Kako je vanjski kut kod A po definiciji sukut $\angle A$, onda su očito te dvije veličine jednake.

2. Dokažite da je srednjica trokuta paralelna trećoj stranici i jednaka njezinoj polovici.

Rješenje 2. zadatka : Trokuti su slični po SKS (jer se dvije stranice po definiciji odnose kao 2:1, te dijele zajednički kut između stranica). To povlači da se i treća stranica odnosi kao 2:1, odnosno pokazali smo da je srednjica jednaka polovici stranice iznad koje je. Iz sličnosti također dobivamo da su kutovi jednaki, pa imamo kutove uz presječnicu usporednih pravaca, odnosno srednjica je paralelna stranici iznad koje je.

3. Zadana je kružnica, točka T izvan nje i iz T dvije tangente na kružnicu. Dokažite da su dirališta jednako udaljena od T.

Rješenje 3. zadatka : Trokuti koje označavaju središte kružnice, točka T i točka dodira su sukladni po SSK: pravi kut u točki dodira, zajednička stranica ST i stranice koje su duljine radijusa (od S do točke dodira). Dakle, onda i dirališta moraju biti jednako udaljena od T.

4. Neka je I središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Pokaži da je $\angle BIC = 90 + \dfrac{\angle BAC}{2}$.

Rješenje 4. zadatka : Promatrajući trokut $\triangle BIC$ dobivamo $|\angle BIC| + |\angle ICB| + |\angle CBI| = 180$. Primjetimo da kako je I središte upisane kružnice, onda I dijeli kut na dva jednaka dijela, tj. $\angle ICB = \frac{\angle ACB}{2}$ i $\angle CBI = \frac{\angle CBA}{2}$. Iz početnog trokuta znamo da je $|\angle BAC| + |\angle ACB| + |\angle CBA| = 180 \implies |\angle ACB| + |\angle CBA| = 180 - |\angle BAC| \implies \frac{|\angle ACB| + |\angle CBA|}{2} = 90 - \frac{|\angle BAC|}{2}$. Uvrštavanjem u ono što smo dobili prije dobivamo $|\angle BIC| + 90 - \frac{|\angle BAC|}{2} = 180 \implies |\angle BIC| = 90 + \frac{|\angle BAC|}{2}$.

5. Dokažite da je četverokut paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

Rješenje 5. zadatka : Pokažimo najprije da se paralelogramu dijagonale raspolavljaju: neka je S sjecište dijagonala. Trokuti ABS i DCS su sukladni po KSK jer su kutovi $\angle ABS = \angle CDS$ i $\angle BAS = \angle DCS$ jer se radi o presječnici paralelnih pravaca, a stranice AB i CD su jednake po definiciji paralelograma. Dakle, po sukladnosti mora vrijediti i $|AS| = |SC|$ i $|BS| = |SD|$. Drugi smjer bi bio da se dvije dijagonale raspolavljaju, tj. $|AS| = |SC|$ i $|BS| = |SD|$. Kako se radi o vršnom kutu $\angle ASB = \angle CSD$, vrijedi da su trokuti sukladni po SKS. Kako su zato stranice četverokuta AB i CD jednake, (i analogno možemo pokazati $|BC| = |DA|$), vrijedi da je četverokut paralelogram.

6. Zadan je pravilni mnogokut $A_1A_2A_3 \dots A_n$ kome je vanjski kut 11 puta manji od unutarnjeg kuta. Izračunaj veličinu kuta između dijagonala $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_1A_4}$.

Rješenje 6. zadatka : Označimo traženi kut kao x, unutarnji kut mnogokuta kao α, a vanjski kao β. Znamo da je zbroj $\alpha + \beta = 180$. Pošto je $\alpha = 11\beta$, onda $\beta = \frac{180}{12}$ tj. 15. Uočimo sad da je trokut $\triangle A_1A_2A_3$ jednakokračan, gdje kut između krakova iznosi α. Onda kut $\angle A_2A_3A_1$ iznosi $\frac{\beta}{2}$. Povučemo kut $\angle A_1A_4A_2$ koji je (zbog simetrije) sukladan traženom kutu. Na isti način kao i prije znamo da je kut $\angle A_3A_2A_4$ isto $\frac{\beta}{2}$. Sjecište dužina $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$ označimo sa S. Onda su trokuti $\triangle A_2SA_3$ i A_1SA_4 jednakokračni s kutom između krakova koji iznosi α. Onda je $x = \frac{\beta}{2}$ tj. 7.5.

7. Neka je $\triangle ABC$ trokut u kojem je $\angle CAB = 20$ i neka je D polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $\angle CDB = 40$, odredite veličinu kuta $\angle ABC$.

Rješenje 7. zadatka : Kako je D polovište $\overline{AB}$, onda je $|AD| = |DB|$. Kako je $\angle CDB$ zapravo vanjski kut kuta $\angle CDA$, pa je zbroj kutova $|\angle DAC| + |\angle ACD| = |\angle CDB|$. Iz toga možemo dobiti $|\angle ACD| = 20$, pa zato trokut $\triangle ACD$ jednakokračan, tj. $|CD| = |AD|$. Dakle, kako je $|AD| = |CD| = |DB|$, onda i trokut $\triangle BCD$ mora biti jednakokračan, pa je zato $40 + 2 \times |\angle DBC| = 180$, tj. $|\angle DBC| = 70$.

8. Zadana je kružnica sa središtem S i neka njezina tetiva $\overline{AB}$. Pokažite da je središnji kut nad tom tetivom dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta. *(poučak o središnjem i obodnom kutu)*

Rješenje 8. zadatka : Docrtajmo proizvoljnu točku C tako da je $\angle ACB$ obodni nad $\overline{AB}$. Želimo pokazati $\angle ACB = \angle ASB$. Docrtajmo CS. Postoji tri jednakokračna trokuta (zbog radijusa kružnice koji je ujedno i duljina krakova). Vrijedi da je $|\angle SAC| + |\angle ACB| + |\angle CBS| + (|\angle SBA| + |\angle SAB|) = 180$ (zbroj kutova trokuta $\triangle ABC$). Zbog jednakokračnih trokuta, ovo možemo zapisati kao $2 \times |\angle ABC| = 180 - (|\angle SBA| + |\angle SAB|)$, što možemo zapisati kao $2 \times |\angle ABC| = |\angle ASB|$ iz zbroja kutova trokuta $\triangle ASB$.

9. Zadan je $\triangle ABC$ i tangenta na njemu opisanu kružnicu u točki B. Dokažite da je tada kut između te tangente i tetive $\overline{BC}$ jednak obodnom kutu $\angle BAC$. *(kut između tangente i tetive)*

Rješenje 9. zadatka : Docrtajmo središte opisane kružnice $\triangle ABC$ i nazovimo ga S, te izaberimo neku proizvoljnu točku T na tangenti (kako bi mogli imenovati kutove). Trivijalno je $\angle SBT = 90$. Neka je $\alpha = \angle CBT$, tada je $\angle SBC = 90 - \alpha$. Kako je $\triangle SBC$ jednakokračan, onda je $\angle SBC = \angle SCB$, i vrijedi $\angle BSC = 180 - 2 \times (90 - \alpha) = 2 \times \alpha$. Kako je $\angle BSC$ središnji kut obodnog kuta $\angle BAC$, dobivamo $\angle BAC = \alpha$ što je i trebalo pokazati.

10. Zadan je četverokut ABCD kojem se dijagonale sijeku pod pravim kutom. Ukoliko su kutovi $\angle BAC = 40$, $\angle ACD = 50$ i $\angle ADB = 30$, odredi kutove $\angle ADC$ i $\angle CBA$.

Rješenje 10. zadatka : Ključno je primijetiti da je četverokut iz zadatka tetivan. Neka je S sjecište dijagonala. Vrijedi da je $\angle SBA = 50$ iz zbroja kutova trokuta ABS. Dakle, vrijedi $\angle DBA = \angle DCA$, što je dovoljno da zaključimo da je četverokut $ABCD$ tetivan. Sada preko obodnih kutova nad ostalim tetivama možemo zaključiti sve ostale kutove. Rješenje je $\angle ADC = 70$ i $\angle CBA = 110$.

Umjereni zadaci

11. Neka su O središte opisane kružnice i H ortocentar $\triangle ABC$. Pokaži da je $\angle BAH = \angle CAO$.

Rješenje 11. zadatka : Ukoliko spustimo visinu iz A na BC, odmah vidimo kako je $\angle BAH = 90 - \beta$ zbog pravog kuta kod nožišta visine. Slično možemo zaključiti kako je $|\angle AOC| = 2 \times |\angle ABC| = 2 \times \beta$ jer se radi o središnjem kutu nad AC. Kako je $|AO| = |CO|$, iz zbroja kutova $\triangle AOC$ slijedi $\angle CAO = 90 - \beta$ što je i trebalo pokazati.

12. Neka se simetrale susjednih kutova (bilo kakvog) konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku redom u točkama E, F, G i H. Dokažite da je četverokut $EFGH$ tetivan.

Rješenje 12. zadatka : Neka je E sjecište simetrala kutova kod A i B. Tada je $\angle EAB = \frac{\alpha}{2}$ te $\angle EBA = \frac{\beta}{2}$, i stoga je $\angle AEB = 180 - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Analogno pokazujemo $\angle BFC = 180 - \frac{\beta+\gamma}{2}$, $\angle CGD = 180 - \frac{\gamma+\delta}{2}$ te $\angle DHA = 180 - \frac{\delta+\alpha}{2}$. Zbroj nasuprotnih kutova četverokuta $EFGH$ je stoga $180 - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180 - \frac{\gamma+\delta}{2} = 360 + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 360 - 180 = 180$, što četverokut čini tetivnim.

13. Točke A, B, C, D i E leže redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC| + |\angle CDE|$.

Rješenje 13. zadatka : Kako je svaki od kutova u zadatku tupi, onda kad govorimo o njemu središnjem kutu govorimo zapravo o izbočenom kutu (> 180). Kad promatramo središnje kutove zadanim ($|\angle ASC| + |\angle CSE|$) vidimo da se radi o kutovima koji zbrojeni daju 540 jer se ispruženi kut $\angle ASE = 180$ dva puta ponavlja, te je zbroj preostalih komadića upravo 180. Dakle, kako je zbroj središnjih kutova 540, onda je zbroj obodnih 270.

14. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut pri čemu je $BCDE$ kvadrat kojem je središte upisane kružnice O, a $\angle EAB = 90$. Pokaži da je pravac AO simetrala kuta $\angle BAE$.

Rješenje 14. zadatka : Četverokut $EABO$ je tetivan jer je zbroj kutova $|\angle EAB| + |\angle BOE| = 180$. Dakle, samo je potrebno gledati kutove nad tetivama EO i BO, a kako su tetive jednako duge, tada i kutovi nad njima moraju biti jednake veličine, tj. $|\angle EAO| = |\angle BAO| = 45$.

15. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od 60. Ako je točka S središte kružnice, dokaži da je trokut $\triangle BCS$ jednakostraničan.

Rješenje 15. zadatka : Dovoljno je pokazati da su dva kuta trokuta 60 jer je onda preostali očito također 60. Označimo najprije $\angle CAD = \alpha$ i $\angle BDA = \beta$. Iz uvjeta zadatka i zbroja kuta u trokutu slijedi $\alpha + \beta = 60$.

Kako je $ABCD$ tetivan, slijedi $\angle CAD = \angle CBD = \alpha$, i $\angle BDA = \angle BCA = \beta$. Kako je trokut BDS jednakokračan, vrijedi $\angle DBS = \angle BDS = \beta$, te analogno zaključujemo o trokutu CSA, tj. $ACS = \alpha$. Vrijedi $\angle BCS = \angle BCA + \angle ACS = \alpha + \beta = 60$. Analogno pokazujemo $\angle CBS = 60$, čime smo pokazali da je trokut BCS jednakostraničan.

16. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka su P, Q na luku AB. Neka je M presjek pravaca AP i BQ, a N presjek pravaca AQ i BP. Dokažite da je pravac MN okomit na AB.

Rješenje 16. zadatka : Prezentirat ćemo filozofsko rješenje: promijenimo redoslijed konstrukcije. Neka je ABM trokut i neka su mu povučene sve visine. Tada su po konstrukciji točke P i Q nožišta visina na AM i BM, što N čini ortocentrom. Dakle, onda je MN visina zadanog trokuta, pa je sigurno okomita na AB.

17. Neka su D, E i F redom nožišta visina iz točaka A, B i C trokuta $\triangle ABC$. Neka je H ortocentar. Pokaži da je H središte upisane kružnice trokuta $\triangle DEF$. *(ortički trokut)*

Rješenje 17. zadatka : Ključno je primijetiti mnoge tetivne četverokute koje postoje. Konkretno, pokazat ćemo da je $\angle HDE = \angle HDF$, tj. da je DH simetrala kuta EDF, a analogno se pokazuje i za EH i FH što H čini središtem upisane kružnice.

Očito je $\angle FBH = \angle ABE = 90 - \alpha$. Želimo pokazati kako je $BDHF$ tetivan, što uistinu i jest jer je zbroj nasuprotnih kutova (pravih kod D i F) jednak 180, pa možemo zaključiti da je $\angle FBH = \angle FDH = 90 - \alpha$. Analogno se pokazuje za $CDHE$ čime dobivamo $\angle EDH = 90 - \alpha$, tj. $\angle FDH = \angle EDH$ što smo i htjeli pokazati.

Rješenje možete pronaći i u (Chen, EGMO : 8).

Teški zadaci

18. Zadan je trokut $\triangle ABC$ kojem je H ortocentar. Pokaži da točka osnosimetrična točki H preko BC leži na opisanoj kružnici trokuta $\triangle ABC$. Pokaži da točka centralno simetrična točki H preko polovišta $\overline{BC}$ također leži na opisanoj kružnici trokuta $\triangle ABC$. *(refleksije ortocentra)*

Rješenje 18. zadatka : Zadatak je preuzet iz (Chen, EGMO : 9), lema 1.17. Rješenje: https://artofproblemsolving.com/community/c451884h1460830_geometry_9_egmo_117.

19. Neka je I središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Pravac AI ponovo siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki L. Neka je I_A točka centralno simetrična točki I preko L:

a) pokaži da je L središte kružnice na kojoj leže točke B, C, I i I_A.

b) pokaži da je I_A središte A-pripisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.

(I_A tada leži na sjecištu simetrala vanjskih kutova vrhova B i C) *(lema o trozupcu)*

Rješenje 19. zadatka : Lemu također možete pronaći pod nazivom *The Incenter/Excenter Lemma*. Jedan od dokaza možete pronaći na https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Incenter/excenter_lemma. Dokaz možete pronaći i u (Chen, EGMO : 10).

20. Neka su D, E i F redom nožišta visina iz točaka A, B i C trokuta $\triangle ABC$. Neka je P bilo koji presjek pravca EF i opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Sjecište pravaca BP i DF je Q. Pokaži da je $|\overline{AP}| = |\overline{AQ}|$. *(IMO shortlist 2010. G1)*

Rješenje 20. zadatka : Službeno rješenje možete naći na: https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf, a kraće na: https://artofproblemsolving.com/community/c151709h1472875_2010_imo_shortlist_g1

21. Neka je zadana tetiva PQ kojoj je M polovište $\overline{PQ}$. Neka su AB i CD neke tetive koje prolaze kroz M. Neka je X sjecište AD i PQ, a Y sjecište BC i PQ.

Dokaži da je M polovište $\overline{XY}$. *(Butterfly theorem)*

Rješenje 21. zadatka : Na https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_theorem ili na https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Butterfly_Theorem

Prijedlozi za daljnje rješavanje:

https://mnm.hr/online-predavanja

Posebno predavanja Sukladnost i sličnost (6.), Karakteristične točke trokuta i Tetivni četverokuti.

Osim toga, od preporučamo knjigu Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Evan Chen).

Luckova zimska škola matematike
u Lucijanki 24. 2. 2022.

Diofantske jednadžbe
Lukas Baltas i Matej Vojvodić

Teorijski uvod

Diofantske su jednadžbe jednadžbe s dvije ili više nepoznanica koje rješavamo u skupu prirodnih ili cijelih brojeva. Ne postoji univerzalan način rješavanja svih diofantskih jednadžbi koje se pojavljuju na natjecanjima, ali postoje određene ideje koje su vrlo često korisne u rješavanju.

Linearne diofantske jednadžbe

Teorem 1: Diofantska jednadžba oblika $ax + by = 0$ gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$ ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja, takvih da su $(x, y) = \left(\frac{tb}{M(a,b)}, \frac{ta}{M(a,b)}\right)$ (zadanih uz pomoć $t \in \mathbb{Z}$)

Ovakva linearna diofantska jednadžba zove se i homogena.

Teorem 2: Diofantska jednadžba oblika $ax + by = c$ gdje su $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$ ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako $M(a, b)$ dijeli c.

Tada su sva rješenja oblika zbroja jednog partikularnog i skupa rješenja homogenog.

Primjer 1.a) Riješimo homogenu diofantsku jednadžbu $3x + 5y = 0$.

Rješenje primjera: Izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge. Budući da je x cijeli broj, y mora biti djeljiv s 3, tj. y je oblika $y = 3t$ gdje je t neki cijeli broj. Iz toga dobivamo da je $x = -5t$. Dobili smo da su rješenja početne jednadžbe svi uređeni parovi $(-5t, 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$

Primjer 1.b) Riješimo diofantsku jednadžbu $3x + 5y = 8$.

Rješenje primjera: Pokušajmo pronaći neki par (x_0, y_0) koji zadovoljava jednadžbu. Lako uočimo da je to uređen par $(1, 1)$ što nam je zapravo partikularno rješenje naše diofantske jednadžbe. Promatrajmo sada homogenu jednadžbu 3x + 5y = 0. Iz prethodnog primjera znamo da su rješenja te jednadžbe svi uređeni parovi $(-5t, 3t)$, gdje je $t \in \mathbb{Z}$.

Iz Teorema 2. zaključujemo da su rješenja opće jednadžbe parovi $(1 - 5t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Metoda faktorizacije

Primjer 2. Riješimo diofantsku jednadžbu $xy + x - 3y - 6 = 0$.

Rješenje primjera: Zadana jednadžba zapravo je jednaka: $(y + 1)(x - 3) = 3$. Dakle, dovoljno je riješiti samo slučajeve kada je jedna zagrada jednaka ± 1, a druga ± 3.

Konkretno, rješenja su $(x, y) = (2, 4), (0, 6), (-4, 2), (-2, 0)$

Primjer 3. $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$.

Rješenje primjera: Zapišimo jednadžbu kao: $(2x - 3y)(3x - 2y) = 4$. Daljnjim rješavanjem dobivamo $(x, y) = (-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)$.

Metoda kvocijenata

Primjer 4. Riješimo diofantsku jednadžbu $xy + 2y = x$.
Rješenje primjera: $y = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$, sada vidimo da je $x + 2 \in (1, -1, 2, -2)$ pa je $x \in \{-1, -3, 0, -4\}$ i $y \in \{-1, 3, 0, 2\}$.

Primjer 5. Riješimo diofantsku jednadžbu: $xy + 3y^2 = 11$.
Rješenje primjera: $x = \frac{-3y^2+11}{y} = -3y + \frac{11}{y}$;pa je $y \in \{1, -1, 11, -11\}$, što daje rješenja $x \in \{8, -8, -32, 32\}$.

Metoda posljednje znamenke

Primjer 6. Riješimo diofantsku jednadžbu $x^2 + 10y = 1234567$.
Rješenje primjera: Kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da $10y$ završava znamenkom 0, zadnja znamenka od $x^2 + 10y$ može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 7, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Primjer 7. Riješimo diofantsku jednadžbu $x^2 + 5y = 37191834641769123$.
Rješenje primjera: Budući da kvadrat cijelog broja završava sa znamenkom 0, 1, 4, 5, 6, ili 9,a broj $5y$ sa znamenkom 0 ili 5, slijedi da zbroj na lijevoj strani završava s 0, 1, 4, 5, 6, ili 9, a nikako s 3. Dakle, zadana diofantska jednadžba nema rješenja.

Metoda kongruencija

Primjer 8. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) takvih da vrijedi: $x^2 + y^2 + 1 = x^2y^2$.
Rješenje primjera: Promatrajmo jednadžbu modulo 3. Ukoliko su i x i y djeljivi s 3, tada dobivamo $0 + 0 + 1 \equiv 0 \cdot 0 \pmod 3$. Ukoliko je samo jedan djeljiv, tada vrijedi $1 + 0 + 1 \equiv 1 \cdot 0 \pmod 3$. Ukoliko ni jedan nije djeljiv, dobivamo $1 + 1 + 1 \equiv 1 \cdot 1 \pmod 3$. Trivijalno je pokazati da ni jedna od ovih jednadžbi nema rješenja.

Primjer 9. Odredite sva prirodna rješenja jednadžbe: $x^2 - 4y = 1995$.
Rješenje primjera: Vidimo da desna strana jednadžbe daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Zaključujemo da i lijeva strana jednadžbe mora dati ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Budući da je $4y$ očito djeljivo sa 4, x^2 mora dati ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Ali lako se uvjerimo da za svaki prirodni broj x^2 daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju sa 4. Konkretno, dovoljno je provjeriti za brojeve od 1 do 4, pošto oni pokrivaju sve ostatke pri djeljenju s 4. Dakle, zaključujemo da jednadžba nema prirodnih rješenja.

Metoda nejednakosti

Primjer 10. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $a+b+c=abc$.
Rješenje primjera: Pošto je jednadžba potpuno simetrična, bez smanjenja općenitosti neka je $a \leq b \leq c$. Tada je $abc = a+b+c <= 3c$, odnosno $ab <= 3$, pa razlikujemo tri slučaja: 1. a = 1, b = 1 (uvrštavanjem te vrijednosti u početnu jednadžbu dobijemo kontradikciju $2 = 0$); 2. a = 1, b = 2 (dobivamo $c = 3$); 3. a = 1, b = 3 (dobivamo $c = 2$ što je kontradikcija s $b \leq c$). Dakle, jedino rješenje je $(1, 2, 3)$ i sve permutacije tog skupa.

Primjer 11. Dokažite da izraz $n^2 + n + 1$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, ne može biti kvadrat cijelog broja.
Rješenje primjera: Primijetimo da zbog $n \in \mathbb{N}$ tj. $n > 0$ vrijedi $n^2 + n + 1 > n^2 + 0 + 1 > n^2$. S druge strane, slično zaključujemo i $n^2 + n + 1 < (n^2 + n + 1) + n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. No kako su n i $n+1$ su 2 uzastopna prirodna broja, a $n^2 + n + 1$ strogo između njihovih kvadrata, taj broj nikako ne može biti kvadrat nekog prirodnog broj.

Lagani zadaci

1. Nađi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takvih da vrijedi:
$6^a + 5^b = 3737 \ldots 3747$ (ukupno se 37 puta ponavlja 37).
Rješenje 1. zadatka : Zadnja znamenka broja 6^a je sigurno 6, a zadnja znamenka 5^b je sigurno 5. Dakle, njihovim zbrajanjem sigurno ne možemo dobiti broj koji završava sa znamenkom 7.

2. Nađi sva cjelobrojna rješenja za: $x^2 + 37^2 = y^2$.
Rješenje 2. zadatka : Vrijedi $y^2 - x^2 = 37^2$, odnosno $(y-x)(y+x) = 37^2$. Rješavanjem pripadajućih sustava dobivamo rješenja $(x, y) = (0, \pm 37), (\pm 684, \pm 685)$.

3. Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{7}{xy} = 1$.
Rješenje 3. zadatka : Množenjem obje strane s xy (jer $x, y \neq 0$) dobivamo $y + 4x + 7 = xy \Longrightarrow xy - 4x - y + 4 = 7 + 4 \Longrightarrow (x-1)(y-4) = 11$. Rješenja su $(x, y) = (12, 5), (2, 15), (-10, 3)$, a uređeni par $(0, 13)$ nije rješenje jer ne ispunjava uvjet $x \neq 0$.

4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2022 kojima je zbroj neparnih djelitelja jednak 24?
Rješenje 4. zadatka : Lagano je pokazati da 24 možemo dobiti samo kao $1+23$ i $1+3+5+15$. Dakle, svi takvi brojevi biti će oblika 15×2^k i 23×2^k. Brojeva prvog oblika ima 8, a drugog 7, pa je ukupno 15 takvih brojeva.

5. Nađi sve prirodne brojeve (x, y, z) koji zadovoljavaju: $3(xy + yz + zx) = 4xyz$.
Rješenje 5. zadatka : Početna jednadžba je ekvivalentna s $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{3}$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y \leq z$, a iz toga dobijemo $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{1}{z}$. Dalje slijedi $\dfrac{3}{x} \geq \dfrac{4}{3}$, pa je $x \in \{1, 2\}$. Analizirajući ta 2 slučaja dobijemo rješenja $(1, 4, 12)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 2, 3)$ i sve njihove permutacije.

Umjereni zadaci

6. Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu: $x^2 + x = 2^a$.
Rješenje 6. zadatka : Jednadžbu zapišemo kao $x(x+1) = 2^a$. Kako su x i $x+1$ relativno prosti, ne mogu oboje biti djeljivi s 2. Zato možemo zaključiti da je manji od njih (odnosno x) jednak 1, a veći jednak 2^a. Dakle, jedino rješenje jest $x = 1$, $a = 1$.

7. Nađite cjelobrojna rješenja jednadžbe: $5^x + y^4 = 194482$.
Rješenje 7. zadatka : Ako je $x < 0$ tada 5^x nije cijeli broj, a kako y^4 i 194482 to jesu, slijedi da u ovom slučaju nema rješenja. Ako je $x = 0$ onda je $y^4 = 194481$, što uistinu ima cjelobrojna rješenja: $y = 21$ i $y = -21$. Ako je $x > 0$ tada 5^x završava znamenkom 5, pa budući da y^4 nužno završava nekom od znamenaka 0, 1, 5, 6 pa slijedi da $5^x + y^4$ mora završavati nekom od znamenaka 5, 6, 0, 1. Kako 194482 završava znamenkom 2 slijedi da u ovom slučaju nema rješenja. Dakle, rješenja su $(x, y) = (0, 21)$ i $(0, -21)$.

8. Riješi u skupu prirodnih brojeva $x^2 - y! = 2001$
Rješenje 8. zadatka : Promatramo koje ostatke može poprimite jednadžba pri djeljenju s 9. 6! je djeljiv s 9, pa je za svaki $y \geq 6$, $y!$ djeljiv s 9. 2001 je djeljiv s 3, što znači da i x^2 mora biti djeljiv s 3, no onda je i x djeljiv s 3 što znači da je x^2 djeljiv s 9. Onda znamo da je desna strana djeljiva s 9, no lijeva je djeljiva samo s 3, što nije moguće. Zaključujemo da je $y \leq 5$. Direktnim uvrštavanjem zaključujemo da je jedino 2001 + 4! = 2025 kvadrat prirodnog broja, pa je jedino rješenje $(x, y) = (25, 4)$

9. Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je: $4 \cdot 3^{2m} + 5 = n^2$.
Rješenje 9. zadatka : Kada je $m \geq 1$, desna strana je djeljivo s 3, pa lijeva strana daje isti ostatak kao 5 pri dijeljenju s 3, a 5 daje ostatak 2. Zato ostatak pri dijeljenju sa 3 desne strane mora biti 2. No, kvadrat ne može davati ostatak 2 pri dijeljenju s 3.

Jedina mogućnost je $m = 0$. Uvrštavanjem dobijemo $n^2 = 4 \cdot 1 + 5 = 9 = 3^2$, pa je jedino rješenje $(0, 3)$.

10. Nađi sve parove prirodnih brojeva (n, m) za koje vrijedi: $(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$.
Rješenje 10. zadatka :

$$(m^2+n)(m+n^2) = (m+n)^3 \Longrightarrow m^3 + m^2n^2 + mn + n^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$$

$$\Longrightarrow m^2n^2 + nm = 3m^2n + 3mn^2 \Longrightarrow mn(mn + 1 - 3m - 3n) = 0 \Longrightarrow mn(m-3)(n-3) = 8$$

Rješavanjem svih sustava dobivamo parove $(n, m) = (11, 4), (4, 11), (7, 5), (5, 7)$.

11. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $3^x - 2^y = 5$?
Rješenje 11. zadatka : Možemo lagano provjeriti ima li jednadžba rješenja za $y = 1$ ili $y = 2$. Za $y = 2$ stvarno dobivamo rješenje $x = 2$. Za $y > 2$, jednadžbu možemo zapisati kao $2^y = 3^x - 5$, pri čemu je lijeva strana djeljiva s 8. No, raspisivanjem potencija broja 3 shvaćamo da 3^x može davati samo ostatke 1 i 3 pri djeljenju s 8, odnosno $3^x - 5$ ostatke 4 i 6, pa nikada neće biti točno djeljivo s 8. Dakle, jednadžba ima samo jedno rješenje: $(x, y) = (2, 2)$

12. Nađi sve parove prirodnih brojeva n i m za koje vrijedi: $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = m^2$
Rješenje 12. zadatka : $\iff 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 4 = (2m)^2$. Pokušajmo sada smjestiti lijevu stranu između dva kvadrata: $(2n^2 + n)^2 = 4n^4 + 4n^3 + n^2 < 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 4$. Slično $(2n^2 + n + 1)^2 = 4n^4 + n^2 + 1 + 2(2n^3 + 2n^2 + n) = 4n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n + 1$. Nije posve očito da je ovaj kvadrat veći od lijeve strane. Ideja bi mogla biti da sada pokažemo $5n^2 + 2n + 1 > 4n^2 + 4n + 4 \implies n^2 > 2n + 3 \implies n > 3$. Dakle, za svaki $n > 3$ sigurno neće postojati rješenja, pa preostaje provjeriti samo $n \in \{1, 2, 3\}$. Jedino prirodno rješenje je $(n, m) = (3, 11)$.

13. Nađi sve $n \in N$ za koje je $n^4 + 4^n$ prosti broj.
Hint (13-1) : Faktoriziraj $a^4 + 4b^4$.
Rješenje 13. zadatka : Ako je n paran, sa sigurnošću možemo tvrditi da su oba pribrojnika parna pa zato i zbroj mora biti paran, a tada rezultat sigurno neće biti prosti broj.

Ako je $n > 1$ i neparan, možemo ga zapisati kao $2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), a kada uvrstimo dobijemo $(2k+1)^4 + 4^{(2k+1)} = (2k+1)^4 + 4 \cdot 4^{2k} = (2k+1)^4 + 4 \cdot 2^{4k} = (2k+1)^4 + 4 \cdot (2^k)^4$. Primijenimo Sophie Germain faktorizaciju, pri čemu dobivamo faktore $((2k+1)^2 + 2(2^k)^2 - 2^{k+1}(2k+1))((2k+1)^2 + 2(2^k)^2 + 2^{k+1}(2k+1))$. Kako su oba faktora > 1 i prirodna nije moguće da je traženi broj prost. Dakle, ni tada nećemo dobiti rješenje.

Preostaje riješiti trivijalan slučaj $n = 1$ kada je vrijednost izraza 5, što je uistinu prosti broj! Stoga je $n = 1$ jedino rješenje!

Teži zadaci

14. Riješi u skupu cijelih brojeva $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$
Rješenje 14. zadatka : Primijetimo da je uz supstituciju $t = x^3$, dobivena jednadžba $t^2 + 3^t + 1 = y^4 \implies t^2 + 3t + (1 - y^4) = 0$ kvadratna jednadžba u varijabli t pa možemo primijeniti formulu za kvadratnu jednadžbu $t1, 2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 4(y^4 - 1)}}{2}$.
Diskriminanta treba biti kvadrat nekog cijelog broja $4y^2 + 5 = c^2$, $c \in \mathbb{Z}$. Pretpostavimo da je $y \geq 0$ jer za svako rješenje y postoji rješenje $-y$, pa jedno od njih mora biti pozitivno.

Pokušavamo broj $4y^2 + 5$ smjestiti između kvadrata. Sljedeći kvadrat veći od $4y^2 = (2y)^2$ je $(2y + 1)2 = 4y2 + 4y + 1$ što je za $y \geq 2$ strogo veće od $4y2 + 5$ koji se nalazi između dva susjedna kvadrata, pa ne može i sam biti kvadrat.

Došli smo do kontradikcije pa y mora biti 0 ili 1. Za $y = 0$, diskriminanta je jednaka 5 što nije kvadrat pa t neće biti racionalan. Za $y = 1$, diskriminanta je jednaka 9 pa je $t1, 2 = \dfrac{-3 \pm 3}{2}$, tj. $t1 = 0$, i $t2 = -3$. $x^3 = -3$ nema rješenja u cijelim brojevima, pa je jedino rješenje $x^3 = 0 \implies x = 0$ i za njega dobivamo $y = \pm 1$. Dakle, rješenja su $(x, y) = (0, 1), (0, -1)$.

15. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe: $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$
Rješenje 15. zadatka : Uvedimo supstituciju $t = x + 4$, sada sa lijeve strane dobivamo dvije razlike kvadrata. Daljnjim rješavanjem dobijemo $(t^2 - 4^2)(t^2 - 3^2) = y^2$, uvrštavanjem nove supstitucije $k = t^2$, dobivamo $k^2 - 25k + 144 = y^2$, raspisivanjem rješenja ove kvadratne dobivamo da je diskriminanta $625 - 576 + 4y^2$ te ona mora biti kvadrat cijelog broja, slijedi $49 + 4y^2 = z^2$ pa je $49 = (z - 2y)(z + 2y)$. Rješenja su $(y, z) = (0, \pm 7), (\pm 12, \pm 25)$ (ukupno 6 parova rješenja).

Sada se moramo vratiti kroz supstitucije kako bi dobili stvarne vrijednosti x. Ako je $y = 0$, tada je $k = 9$ ili $k = 16$. Ako je $k = 9$, onda je $t = \pm 3$, odnosno $x = -1$ ili $x - 7$. Ako je $k = 16$, onda je $t = \pm 4$, odnosno $x = 0$ ili $x = -8$. Ako je $y = \pm 12$, tada je $k = 0$ ili $k = 25$. Ako je $k = 0$, onda je $t = 0$, odnosno $x = -4$. Ako je $k = 25$, onda je $t = \pm 5$, odnosno $x = 1$ ili $x = -9$.

Dakle, sva rješenja su $(x, y) = (0, 0), (-1, 0), (-7, 0), (-8, 0), (-4, 12), (-4, -12), (1, 12), (1, -12), (-9, 12), (-9, -12)$, njih 10.

16. Nađi sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi: $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$

Rješenje 16. zadatka : Očito vrijedi $y \geq 0$ jer je kvadrat nenegativan. Očito vrijedi $(x^2-y^2)^2 = ((x+y)(x-y))^2 \geq (2y-1)^2$ ukoliko $x \neq y$, onda mora vrijediti i $16y + 1 \geq (2y-1)^2 \iff y \leq 5$. Isprobavanjem svih mogućih vrijednosti za y, dobivamo rješenja $(x, y) = (\pm 1, 0), (\pm 4, 3), (\pm 4, 5)$.

17. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$

Rješenje 17. zadatka : Možemo jednadžbu zapisati kao $z^2 + 1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$. Ukoliko je x ili y neparan, tada bi desna strana bila djeljiva s 4, pa bi z^2 morao davati ostatak 3 pri djeljenu s 4 što je nemoguće. Kako je $x^2, y^2 > 0$, i x, y su parni, tada desna strana ima neki faktor oblika $4k + 3$, a poznato je da to nije moguće. Pozivamo čitatelja da pokuša sam dokazati tu tvrdnju (pogledajte dokaz na primjer ovdje ako ne uspijete).

Nešto teži zadatak koji smo slučajno ubacili...

18. Nađi sve parove prirodnih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju: $7^a + 2 = b^2$

Rješenje 18. zadatka : Predavači nisu još smislili dobro rješenje zadatka, no sigurni smo da ćete vi smisliti bolje rješenje! Naš pokušaj:

Ako je $a = 2k$, tada je moguće raspisati razliku kvadrata $2 = (b - 7^k)(b + 7^k)$. Možemo zaključiti $b + 7^k > b - 7^k$, tj. $b + 7^k = 2$ i $b - 7^k = 1$ ili $b + 7^k = -1$ i $b - 7^k = -2$. Ovi sustavi jednadžba naravno nema cijelih rješenja.

No, ako je $a = 2k + 1$, samo je potrebno raspisati zadatak kao $7^{2k+1} + 1 = b^2 - 1$, te možemo faktorizirati obje strane na $(7+1)(7^{2k} - 7^{2k-1} + \cdots + 1) = (b-1)(b+1)$. Zagrade na lijevoj strani jednadžbe ne mogu dijeliti faktore jer je prva zagrada jednaka 8, a druga neki neparan broj. S druge strane, $\gcd(b-1, b+1) = \gcd(b-1, 2) = \{1, 2\}$.

Problem nastaje u tome što druga zagrada s lijeve strane nije potpuno faktorizirana (jedino što zapravo možemo zaključiti je da nije djeljiva s 2), pa ne možemo promatrati sustave u kojima bi izjednačavali zagrade. No, moguće je doći do rješenja $(b, k) = (3, 0)$, tj. rješenja početnog zadatka $(a, b) = (1, 3)$.

Dio rasprave (i konačno rješenje) možete naći na https://artofproblemsolving.com/community/c6h2840189_some_tricky_number_theory.

Prijedlozi za daljnje rješavanje:

https://mnm.hr/online-predavanja

Posebno predavanja Diofantske jednadžbe (37.), Djeljivost (1.) i Kongruencije (3.).

Luckova zimska škola matematike
u Lucijanki 25. 2. 2022.

Princip ekstrema
Jakov Ljubičić i Leonarda Pribanić

Teorijski uvod

Jedan od problema pri rješavanju zadataka je da može biti puno stvari koje treba pratiti i pamtiti. Zadatak može imati niz s beskonačno mnogo elemenata ili geometrijsku konstrukciju s puno pravaca i kružnica. Kao dobri matematičari, trebali bismo uvijek nastojati organizirati tu masu stvari. Fundamentalna taktika princip je ekstrema:

Nađimo svojstvo elemenata problema prema kojem elemente možemo poredati. U takvom poretku elemenata, promatrajmo najveći ili najmanji jer za njega možda postoje zanimljiva svojstva.

Tipična struktura rješenja koje koristi princip ekstrema je sljedeća:
Pretpostavi da ono što želiš dokazati ne vrijedi. Zatim gledaj neki minimalni (ili maksimalni) element i razvij argument koji stvara manji (ili veći) element, što je kontradikcija.

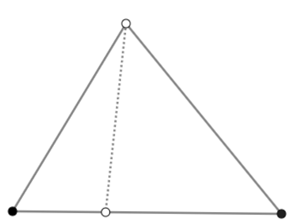
Korisno je napomenuti (možda evidentnu) činjenicu da, ako je skup konačan, mora imati najmanji i najveći element. Ako je skup beskonačan, to ne mora vrijediti, pa se često koristi tzv. "Well-Ordering Principle" koji kaže da svaki neprazni skup nenegativnih prirodnih brojeva ima najmanji element.

Lagani zadaci

1. Neka su A i B konačni skupovi crnih i bijelih točaka u ravnini, redom, sa svojstvom da svaka dužina koja spaja točke iste boje sadrži točku suprotne boje. Dokažimo da sve točke iz oba skupa leže na istom pravcu.

Hint (1-1) : Pretpostavimo suprotno.
Hint (1-2) : Točke koje ne leže na istom pravcu moraju tvoriti barem jedan trokut.
Hint (1-3) : Promatrajmo trokut najmanje površine.

Rješenje 1. zadatka : Pretpostavimo da ne leže sve točke na istom pravcu. Onda one tvore barem jedan trokut. Promatrajmo trokut najmanje površine. Dva vrha tog trokuta su iste boje, pa je na stranici omeđenom s ta dva vrha točka suprotne boje. Ali to stvara manji trokut - kontradikcija!



2. Na zabavi se nalazi 1000 ljudi. Neki su se rukovali. Dokažimo da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

Hint (2-1) : Pretpostavimo suprotno.
Hint (2-2) : Svako se može rukovati s najmanje 0, a najviše 999 ljudi.
Hint (2-3) : Promatrajmo osobe koje su se rukovale s najviše i najmanje ljudi.

Rješenje 2. zadatka : Pretpostavimo da tvrdnja zadatka ne vrijedi. Dakle, ne postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.
S obzirom da se osoba ne može rukovati sama sa sobom, svatko se rukovao s najviše 999, a najmanje 0 ljudi. To znači da postoji 1000 različitih vrijednosti za mogući broj rukovanja. Kako se svaka od 1000 osoba rukovala s različitim brojem ljudi, vrijedi da za svaki broj i od 0 do 999, postoji osoba koja se rukovala s i ljudi.
Ali, ako postoji osoba koja se rukovala s 0 ljudi, onda ne može postojati osoba koja se rukovala s 999 ljudi (tj. sa svim ljudima), pa smo dobili kontradikciju.

3. Konačan broj realnih brojeva poredan je na kružnicu tako da se između svaka dva broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažimo da su svi brojevi na kružnici jednaki.

Hint (3-1) : Promatrajmo najveći broj na kružnici.
Hint (3-2) : Ako je $x = \frac{a+b}{2}$, onda jedan od a, b mora biti veći od x, a drugi manji.

Rješenje 3. zadatka : Promatrajmo najveći broj na kružnici, nazovimo ga x. On je aritmetička sredina svoja dva susjedna broja. Dakle, broj koji mu je s jedne strane mora biti manji ili jednak x, a broj koju mu je s drugi strane mora biti veći ili jednak x. Kako smo pretpostavli da je x najveći, broj koji mu je veći ili jednak mora mu biti jednak. Sada i onaj koji mu je manji ili jednak mora mu biti jednak. To proširujemo na cijelu kružnicu i dobivamo da svi brojevi moraju biti jednaki.

4. Beskonačno mnogo prirodnih brojeva poredano je na kružnicu tako da se između svaka dva broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažimo da su svi brojevi na kružnici jednaki.

Hint (4-1) : Well-Oredering Priniple
Hint (4-2) : Dokaz iz prethodnog zadatka može se analogno napisati i ako promatramo najmanji, a ne najveći broj.

Rješenje 4. zadatka : Prema Well-Oredring Principle, na kružnici postoji najmanji broj, nazovimo ga x. On je aritmetička sredina svoja dva susjedna broja. Dakle, broj koji mu je s jedne strane mora biti manji ili jednak x, a broj koju mu je s drugi strane mora biti veći ili jednak x. Kako smo pretpostavili da je x najmanji, broj koji mu je manji ili jednak mora mu biti jednak. Sada i onaj koji mu je veći ili jednak mora mu biti jednak. To proširujemo na cijelu kružnicu i dobivamo da svi brojevi moraju biti jednaki.

5. Konačno nenegativnih realnih brojeva poredano je na kružnicu tako da se između brojeva a i b nalazi broj $\sqrt{ab}$. Dokažimo da su svi brojevi na kružnici jednaki.

Rješenje 5. zadatka : $\sqrt{ab}$ naziva se geometrijskom sredinom brojeva a i b.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a \geq b$. Vrijedi $a \geq \sqrt{ab} \geq b$ (pokažite to). Nadalje, ako $a \geq \sqrt{ab} = b$, vrijedi $a = b$ (pokažite i to).
Promatrajmo najmanji broj na kružnici i nazovimo ga x. On je geometrijska sredina svojih susjeda, pa jedan od susjeda mora biti manji ili jednak od x. Ne može biti manji jer smo pretpostavili da je x najmanji na kružnici, dakle mora biti jednak x. Sada imamo da je i drugi susjed od x jednak x (dokazali smo to u prethodnom paragrafu). Dakle, oba susjedna od x su jednaka x, pa su svi brojevi na kružnici jednaki x.

6. Riješimo sustav u skupu $\mathbb{R}$:

$$(x+y)^3 = z$$
$$(y+z)^3 = x$$
$$(z+x)^3 = y$$

Hint (6-1) : Sustav je simetričan, pa bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je x najveći od tri nepoznanice.
Hint (6-2) : Vrijedi $x \geq y$, pa vrijedi i $(y+z)^3 \geq (z+x)^3$.

Rješenje 6. zadatka : Primijetimo da je sustav *simetričan*, tj. zamjenom oznaka bilo koje dvije nepoznanice dobivamo isti sustav. Dakle, za neku nepoznanicu smijemo pretpostaviti da je najveća jer ako nije najveća zamjenom imena te dvije nepoznanice dobivamo isti sustav i rješenje i dalje vrijedi.
Dakle, bez smanjena općenitosti pretpostavimo da je x najveći od ta 3 broja, tj. $x \geq y$, $x \geq z$.
Iz $x \geq y$ imamo $(y+z)^3 \geq (z+x)^3$. Dakle $y+z \geq z+x$, odnosno $y \geq x$. Ali vrijedi $x \geq y$, pa moramo imati $x = y$.
Ponavljanjem gornjeg postupka za $x \geq z$ dobivamo $x = z$.
Sada imamo $x = y = z$ i uvrštavanjem toga u bilo koju od tri početne jednadžbe dobivamo $8x^3 = x$.
Dobivamo da su rješenja sljedeća:

$$x = y = z = 0$$
$$x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$x = y = z = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Umjereni zadaci

7. Riješimo sustav u skupu ${\mathbb{R}^+}_0$:

$$a + b = c^2$$
$$b + c = d^2$$
$$c + d = a^2$$
$$d + a = b^2$$

Hint (7-1) : Sustav je cikličan pa BSO možemo pretpostaviti $a \geq b, c, d$.
Hint (7-2) : Vrijedi $a \geq b$, pa $a^2 \geq b^2$.

Rješenje 7. zadatka : Ovaj sustav jednadžbi je *cikličan*, jer svakom rotacijom varijabli $((a, b, c, d) \rightarrow (b, c, d, a) \rightarrow (c, d, a, b) \rightarrow (d, a, b, c))$ dobivamo iste jednadžbe. U cikličnom sustavu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti najveći ili najmanji element (ali ne oboje!). Pretpostavimo da je a najveći element. Sada imamo $a \geq b \implies a^2 \geq b^2$. Dakle, $c + d \geq d + a$, odnosno $c \geq a$. Ali pretpostavili smo da je a najveći, pa mora vrijediti i $a \geq c$. Dakle, vrijedi $c = a$. Sada je $c^2 = a^2$, pa $a+b = c+d \implies a+b = a+d \implies b = d$. Onda imamo $b+c = d+c \implies d^2 = a^2 \implies d = a$. Zaključujemo $a = b = c = d$. Uvrštavanjem toga u neko od početnih jednadžba imamo $2a = a^2$, pa su rješenja $a = b = c = d = 0$ i $a = b = c = d = 2$.

8. U tablici $n \times n$ napisani su svi brojevi od 1 do n^2. Dokažimo da postoje dva susjedna polja koja se razlikuju za barem $n + 1$. Polja su susjedna ako dijele vrh.

Hint (8-1) : Promotrimo najkraći put na ploči od najmanjeg do najvećeg broja, odnosno od 1 do n^2.
Hint (8-2) : Koliko je najviše dug taj put?
Hint (8-3) : Pretpostavimo da se svaka dva polja na tom putu razlikuju za najviše n.
Hint (8-4) : Koliko smo ukupnu razliku prošli na putu?

Rješenje 8. zadatka : Promotrimo najkraći put na ploči od najmanjeg do najvećeg broja, odnosno od 1 do n^2. Taj put može biti dug najviše $n - 1$ koraka. Pretpostavimo da se nikoja dva polja na tom putu ne razlikuju za više ili jednako od $n + 1$, odnosno svaka dva susjedna polja na tom putu se razlikuju za najviše n. Onda je razlika koju smo prešli ukupno $(n - 1) \cdot n = n^2 - n$. Ali, moramo proći razliku od $n^2 - 1$, te vrijedi $n^2 - 1 > n^2 - n$. Dakle, nismo prešli dovoljno veliku razliku, pa dolazimo do kontradikcije i zaključujemo da na našem putu moraju postojati dva polja koja se razlikuju za baremn $n + 1$.

9. U ravnini stoji nekoliko ljudi tako da su udaljenosti među njima sve međusobno različite. U nekom trenutku svi ljudi istovremeno pucaju u osobu koja im je najbliža. Dokažimo da

- postoje dvoje ljudi koji su pucali jedan u drugog
- ne postoji zatvoreni mnogokut ljudi koji su se međusobno pucali
- nitko nije primio više od 5 metaka
- ako ih je bilo neparno, barem je jedan preživio
  (Za ovaj podzadatak dobro je znati matematičku indukciju)

Redoslijed točaka odgovara hintovima/rješenjima za pojedini podzadatak.

- **Hint (9-1) :** Promatrajmo najmanju udaljenost između osoba.

- **Hint (9-2) :** Ako takav poligon postoji, on mora imati najdulju stranicu.
  Hint (9-3) : Najdulja stranica je dulja od obje svoje susjedne stranice

- **Hint (9-4) :** Pretpostavimo da je netko primio barem 6 metaka.
  Hint (9-5) : Promatrajmo kuteve koji zatvaraju putanje pucnjeva u osobu koja je primila 6 metaka.

- **Hint (9-6) :** Koristimo matematičku indukciju po broju ljudi.
  Hint (9-7) : Promatrajmo par koji je najbliži. U koga oni pucaju i tko puca u njih?

Rješenje 9. zadatka :

- Od svih međusobnih udaljenosti među ljudima postoji ona najmanja, neka je to udaljenost između A i B. Tada je to i najmanja od udaljenosti između A i nekog drugog, i najmanja među udaljenostima od B do nekog drugog, pa su A i B pucali jedan u drugog.

- Pretpostavimo da takav poligon postoji. Tada bi on imao najdulju stranicu, neka su u njenim vrhovima osobe C i D (pretpostavimo da je C pucao u D). Ta je stranica dulja od obiju svojih susjednih stranica. Dakle udaljenost od C do D veća je od udaljenosti između C i njegovog drugog susjeda u poligonu, što znači da je $|CD|$ nije najmanja udaljenost od C do nekog od ostalih. Dakle, C je pucao u nekog drugog pa takav poligon ne postoji.

- Pretpostavimo da je netko primio barem 6 metaka i nazovimo tu osobu A, a ljude koji su pucali u njega B, C, D, E, F, G u smjeru kazaljke na satu (to znači da podrazumijevamo npr. $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ itd.). Tada vrijedi $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAE + \angle EAF + \angle FAG + \angle CAB = 360$, pa je barem jedan od tih 6 kuteva manji ili jednak 60. Pretpostavimo da je to $\angle BAC$. Budući da su sve udaljenosti među ljudima različite, jednakostranični trokuti ne postoje, pa je jedan od kuteva $\angle ABC$ i $\angle BCA$ veći od $\angle BAC$. Pretpostavimo da je $\angle ABC > \angle BAC$. U trokutu vrijedi pravilo da je veća stranica uvijek nasuprot većem kutu, dakle vrijedi $|AC| > |BC|$. Iz toga slijedi da $|AC|$ nije najmanja među udaljenostima od C do nekog drugog, pa C nije pucao u A. Dakle, nitko nije primio više od 5 metaka.

- Zadatak rješavamo matematičkom indukcijom. Baza za $n = 1$, odnosno za $2n + 1 = 3$ riješena je u prvom dijelu zadatka (postoje dvojica koji su pucali jedan u drugog, dakle treći sigurno preživljava). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve konfiguracije $2n + 1$ ljudi za neki prirodan broj n. Korak uključuje promatranje najbližeg para u ravnini s $2n+3$. Oni su pucali jedan u drugog. Ako je još netko pucao u taj par, tada su na njih dvoje potrošena 3 metka, i za ostalih $2n + 1$ ostalo je samo $2n$ metaka, pa je netko preživio. U suprotnom, taj par možemo zanemariti jer ne utječe ni na koji način na ostalih $2n+1$ ljudi. Tako se vraćamo u neku konfiguraciju $2n + 1$ ljudi i time smo gotovi. Dakle, netko je sigurno preživio.

10. Zadano je konačno točaka u ravnini tako da za bilo koje tri točke A, B, C vrijedi da je površina trokuta ABC manja od 1. Dokažimo da sve točke leže unutar ili na stranicama trokuta površine manje od 4.

Hint (10-1) : Promatrajmo trokut ΔABC najveće površine.
Hint (10-2) : Gledamo trokut kojemu su AB, BC, CA srednjice. Kolika je njegova površina?
Hint (10-3) : Pretpostavimo da postoji točka izvan trokuta kojemu su AB, BC, CA srednjice.
Hint (10-4) : Je li ta točka vrh nekog trokuta površine veće od ΔABC?

Rješenje 10. zadatka : Promatrajmo trokut najveće površine, neka je to ΔABC. Promotrimo trokut kojem su AB, BC i CA srednjice i nazovimo ga ΔXYZ. Površina tog trokuta točno je 4 puta veća od površine trokuta ΔABC (dokažite ovo!), dakle nije veća od 4, a mi tvrdimo da su sve točke iz skupa unutar tog trokuta. Pretpostavimo suprotno, da se točka D nalazi izvan trokuta. Tada se ona nalazi s druge strane barem jednog od pravaca XY, YZ i XZ. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se nalazi s druge strane pravca XY, koji je paralelan s AB. Tada je površina trokuta ΔABD veća od površine trokuta ΔABC (imaju zajedničku stranicu AB, a ΔABD ima dulju visinu. To je u suprotnosti s pretpostavkom da ΔABC ima najveću površinu. Dakle, takva točka D ne postoji i sve se nalaze unutar trokuta ΔXYZ.

11. Na beskonačnoj šahovskoj ploči u svakom se polju nalazi jedan prirodni broj. Svaki broj jednak je aritmetičkoj sredini svojih susjeda. Dokažimo da su svi brojevi na ploči jednaki.

Hint (11-1) : Ovaj zadatak je sličan četvrtom zadatku.
Hint (11-2) : Promatrajmo minimalni element na ploči.

Rješenje 11. zadatka : Primijetimo da je aritmetička sredina četiri broja veća ili jednaka najmanjem od tih brojeva i manja ili jednaka od najvećeg od tih brojeva. Skup brojeva na ploči podskup je skupa prirodnih brojeva pa ima minimalni element. On je aritmetička sredina svojih četiriju susjeda, pa je veći ili jednak najmanjem od tih brojeva (u slučaju jednakosti sva su 4 broja jednaka). Kao i u četvrtom zadatku, slijedi da su mu svi susjedi jednaki, a tada i svi brojevi na ploči.

12. U ravnini se nalazi skup točaka takav da je svaka točka polovište neke dužine čije su krajnje točke također iz tog skupa. Dokažimo da je taj skup točaka beskonačan.

Hint (12-1) : Konačan skup bi imao najveći element.

Rješenje 12. zadatka : Pretpostavimo suprotno, da je točaka konačno mnogo. Tada postoji najveća od svih međusobnih udaljenosti dviju točaka, neka je to udaljenost između točaka A i B. Neka je B polovište dužine CD. Tada postoje 2 slučaja: trokuti ΔABC i ΔABD su oba pravokutni ili je jedan od njih tupokutan ($\angle ABC + \angle ABD = 180$, pa su oni ili oba pravi, ili je jedan tup, jedan šiljast). U prvom slučaju je AC hipotenuza, a AB kateta pravokutnog trokuta ΔABC, pa je $|AC| > |AB|$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $|AB|$ najveća udaljenost među točkama. U drugom slučaju, neka je ΔABC taj tupokutan trokut. Tada je AC stranica nasuprot tupom kutu, pa opet vrijedi $|AC| > |AB|$. Kontradikcija, dakle skup točaka ne može biti konačan.

Teški zadaci

13. (St. Petersburg Mathematical Olympiad 1996) Konačan broji prirodnih brojeva napisan je na ploču. U jednom koraku biramo bilo koja dva broja a i b, brišemo ih, te umjesto njih zapisujemo najveći zajednički djelitelj od a i b i najmanji zajednički višekratnik od a i b. Dokažimo da nakon konačnog broja poteza brojevi na ploči prestaju se mijenjati.

Rješenje 13. zadatka : The Art and Craft of Problem Solving, Paul Zeitz, str. 77

14. (All-Russian Olympiad 1996) Palindrom je niz znakova koji je isti kad se čita s lijeva na desno i s desna na lijevo, npr. "1771" ili "anavolimilovana". Mogu li svi brojevi od 1 do n, ($n > 1$), zapisani jedan za drugim tvoriti palindrom za neki n?

Rješenje 14. zadatka : https://artofproblemsolving.com/community/c6h530361p3026641 (#4).

15. (IMO 1994) Neka su m i n prirodni brojevi. Neka su $a_1, a_2, ..., a_m$ različiti brojevi iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ takvi da za bilo koja dva indeksa i, j, za koje vrijedi $1 \leq i \leq j \leq m$ i $a_i + a_j \leq n$, postoji indeks k takav da $a_i + a_j = a_k$. Pokaži da $\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$.

Rješenje 15. zadatka : https://artofproblemsolving.com/community/c6h18569p124924 (#8)

Prijedlozi za daljnje rješavanje:

https://mnm.hr/online-predavanja

Posebno predavanja Princip ekstrema (25.), Dirichletov princip (5.), a pomoći vam mogu i predavanja Matematička indukcija (7.), Što je dokaz (9.) te Uvod u nejednakosti (11.).

Pogovor

Veliko hvala svima koji su sudjelovali u izradi ovih materijala: Lukasu Baltasu, Ivanu Bevandi, Mateju Ištuku, Vatroslavu Jakopcu, Jakovu Ljubičiću, Leonardi Pribanić, Maji Škrlin, Ivi Tadić i Mateju Vojvodiću. Posebno hvala prof. Ljiljani Centrih-Lovrić na lekturi, te našoj profesorici i mentorici Maji Zelčić!

Nadamo se da će vam ova knjiga pomoći u pripremi za županijsko natjecanje, a kasnije i za državno ili olimpijade. Veliko nam je zadovoljstvo da se možemo uključiti u rad s nadarenim učenicima kao bivši natjecatelji.

Ozbiljan rad na redovnoj nastavi obogaćen dodatnom nastavom matematike, Zimskim i Ljetnim školama matematike donosi rezultate: ove je godine od 23 učenika koji su sudjelovali na školskom Natjecanju iz matematike čak 14 prošlo na županijsko Natjecanje, što smatramo velikim uspjehom.

Od „škole na kraju grada“, koja je jedva upisivala jedan ili dva matematička razreda, postali smo nezaobilazni protivnici na natjecanjima mnogo većim i poznatijim matematičkim gimnazijama (na primjer V. i XV. gimnazija koje upisuju osam prirodoslovno-matematičkih razreda, i to uglavnom učenika s prosjekom 5.0), a tek tri godine upisujemo po tri matematička razreda - trenutni maturanti zadnja su generacija u kojoj su upisana samo dva matematička razreda.

Veliko hvala i svima vama koji ste uspjeli doći do kraja ove knjige - provjerite kod vašeg profesora hrvatskog jezika broji li se kao lektira! Pazite samo da ne dobijete negativnu ocjenu iz provjere čitanosti...

GLVforces

Sponsored by GLV & Đurđa

Trenutni i bivši učenici Gimnazije Lucijana Vranjanina
Kontaktirajte nas na glv.forces@gmail.com