



## Treće kolo 2021./2022.

1. Za koliko prirodnih brojeva  $n$  vrijedi da je  $n$  i broj koji je trostruko manji od broja  $n$  i broj koji je trostruko veći od broja  $n$  prirodan i peteroznamenkast?

<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
3 999	1 112	3 333	1 111	

Rješenje:

$n$  – prirodan broj;  $n : 3$  – broj trostruko manji od broja  $n$ ;  $n \cdot 3$  – broj trostruko veći od broja  $n$

Najmanji od njih je broj  $n : 3$  i on mora biti peteroznamenkast što znači da najmanje može biti jednak 10 000.

Tada je broj  $n$  jednak 30 000. Pogledajmo ostale slučajeve:

$n : 3$	$n$	$n \cdot 3$
10 000	30 000	90 000
10 001	30 003	90 009
10 002	30 006	90 018
...	...	...

Primijetimo da je broj  $n \cdot 3$  višekratnik broja 9 i da mora biti peteroznamenkast. Najveći takav broj je 99 999.

Tada je  $n$  trostruko manji od njega i jednak je  $99\,999 : 3 = 33\,333$ , a  $n : 3$  trostruko manji od  $n$  i jednak  $33\,333 : 3 = 11\,111$ .

$n : 3$	$n$	$n \cdot 3$
10 000	30 000	90 000
10 001	30 003	90 009
10 002	30 006	90 018
...	...	...
11 110	33 330	99 990
11 111	33 333	99 999

Dakle, za višekratnike broja 3 od 30 000 do 33 333 vrijedi da je broj koji je trostruko manji od broja  $n$  i broj koji je trostruko veći od broja  $n$  prirodan i peteroznamenkast. Takvih je brojeva jednako kao prirodnih brojeva od 10 000 do 11 111, dakle 1 112 (što je vidljivo iz prve kolone tablice).

Točan odgovor je **B**.

2. Na koliko načina broj 500 možemo napisati kao umnožak triju prirodnih brojeva? Napomena: umnoške s istim faktorima smatramo jednakima ( $1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 1 \cdot 3$ ).

A. manje od 11	B. 11	C. 12	D. više od 12	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------------	----------	----------	------------------	------------------------------------

Rješenje:

Broj 500 rastavimo na proste faktore.

$$500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Ne zaboravimo da u umnošku možemo napisati i neograničen broj faktora 1.

Podijelimo faktore u tri skupine tako da poredamo od najmanjeg do najvećeg faktora.

Ako je prvi faktor 1, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 500. Broj rastava broja 500 na dva faktora jednak je polovici broja njegovih djelitelja.

<i>prvi faktor</i>	<i>drugi faktor</i>	<i>treći faktor</i>
1	1	500
1	2	250
1	4	125
1	5	100
1	10	50
1	25	20

Ako je prvi faktor 2, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 250. Broj rastava broja 250 na dva faktora jednak je polovici broja njegovih djelitelja. Ali, rastav  $2 \cdot 1 \cdot 250$  već imamo i ne smijemo ga opet napisati. To je vidljivo i iz toga da u tom rastavu faktori nisu poredani od najmanjeg ka najvećem.

<i>prvi faktor</i>	<i>drugi faktor</i>	<i>treći faktor</i>
2	2	125
2	5	50
2	10	25

Ako je prvi faktor 4, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 125. Postoji samo jedan rastav broja 125 na dva faktora koji nisu manji od 4.

<i>prvi faktor</i>	<i>drugi faktor</i>	<i>treći faktor</i>
4	5	25

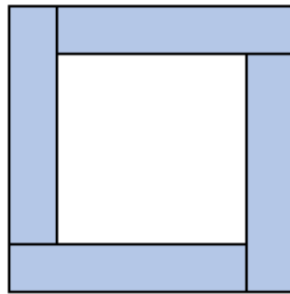
Ako je prvi faktor 5, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 100. Postoje dva rastava broja 100 na dva faktora koji nisu manji od 5.

<i>prvi faktor</i>	<i>drugi faktor</i>	<i>treći faktor</i>
5	5	20
5	10	10

Dakle, ukupno postoji 12 mogućnosti da broj 500 napišemo kao umnožak triju prirodnih brojeva.

Točan odgovor je C.

3. Od četiri jednake pločice složen je kvadrat kao na slici kojem je duljina vanjskog ruba 64 cm. Kolika je duljina kraće stranice jedne pločice ako je površina ograđenog bijelog dijela  $144 \text{ cm}^2$ ?

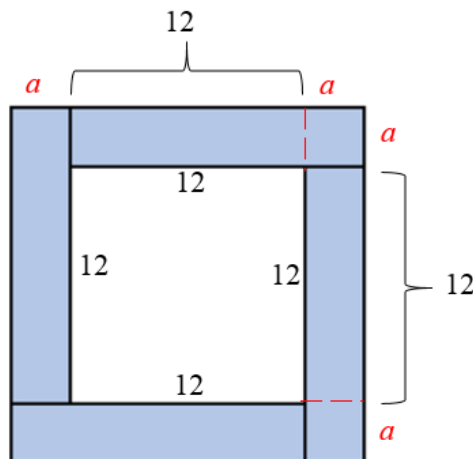


A. nije moguće odrediti	B. 4 cm	C. 3 cm	D. 2 cm	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------------------------	------------	------------	------------	------------------------------------

Rješenje:

Primijetimo da je ograđeni bijeli dio kvadrat. Ako je njegova površina  $144 \text{ cm}^2$ , zaključujemo da je duljina stranice tog kvadrata jednaka broju koji pomnožen sam sa sobom daje 144. Budući je  $12 \cdot 12 = 144$  stranica bijelog kvadrata duga je 12 cm.

Pogledajmo što čini vanjski rub danog lika. Nepoznatu duljinu kraće stranice označimo s  $a$ .



Duljina stranice vanjskog lika jednaka je  $12 + 2a$ .

Budući da je riječ o kvadratu, duljina cijelog ruba vanjskog lika je 4 puta veća od duljine stranice. To znači da je duljina jedne stranice  $64 \text{ cm} : 4 = 16 \text{ cm}$ .

Izjednačimo:

$$12 + 2a = 16$$

$$2a = 4$$

$$a = 4 : 2$$

$$a = 2 \text{ cm}$$

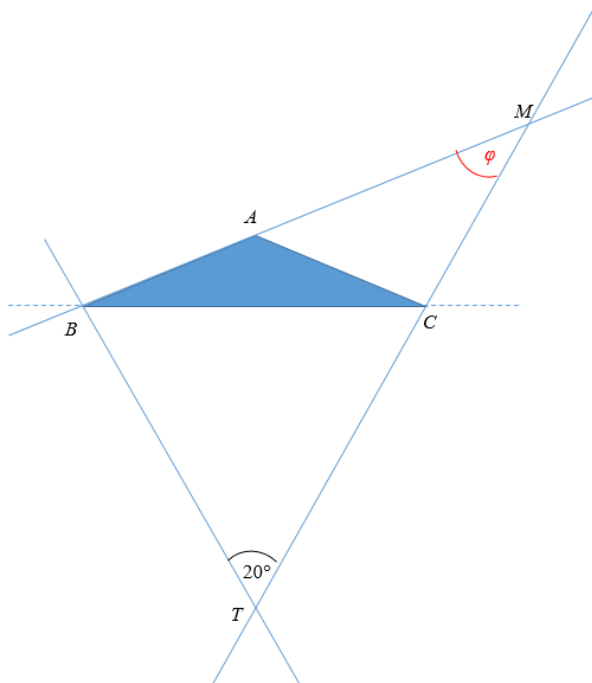
Točan odgovor je **D**.

4. Simetrale vanjskih kutova uz osnovicu  $\overline{BC}$  jednakokračnog trokuta  $ABC$  sijeku se u točki  $T$  pod kutom veličine  $20^\circ$ . Kolika je veličina kuta pod kojim pravac  $CT$  siječe pravac na kojem leži krak  $\overline{AB}$ ?

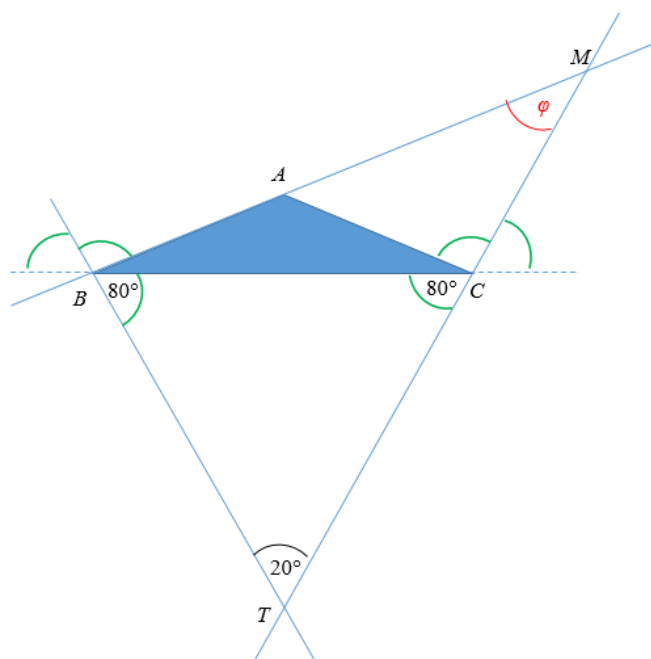
<b>A.</b> nije moguće odrediti	<b>B.</b> $80^\circ$	<b>C.</b> $60^\circ$	<b>D.</b> $40^\circ$	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---

Rješenje:

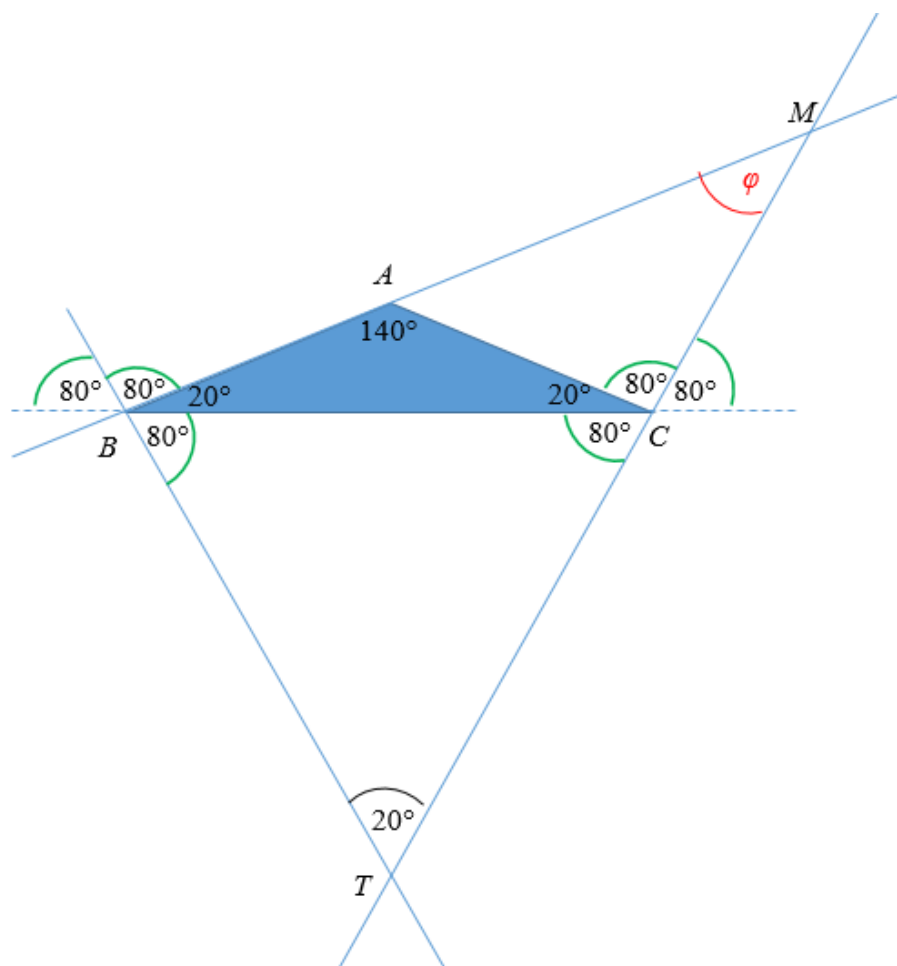
Skicirajmo.



Trokut  $BCT$  je jednakokračan pa su mu kutovi uz osnovicu jednaki  $\frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$ . Uočimo sve kutove s njima sukladne (vršni kutovi, kutovi na koje je simetrala podijelila kut).



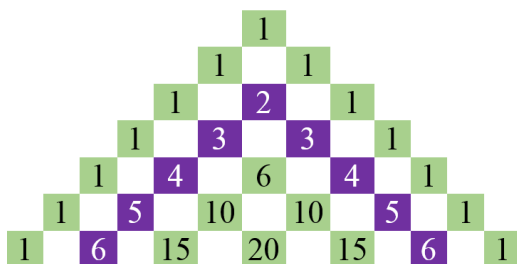
Sada možemo izračunati sve kutove trokuta (zbroj kutova u trokutu je  $180^\circ$ ).



Iz trokuta  $BCM$  zaključujemo da je  $\varphi = 180^\circ - 20^\circ - 100^\circ = 60^\circ$ .

Točan odgovor je C.

5. Ante je crtao toranj kao na slici. Prestao je crtati nakon što se u tornju nalazila 21 jedinica. Tada je zbrojio sve brojeve u svim redovima koji se nalaze neposredno lijevo ili neposredno desno od jedinica. Koliki je zbroj znamenaka tako dobivenog broja?

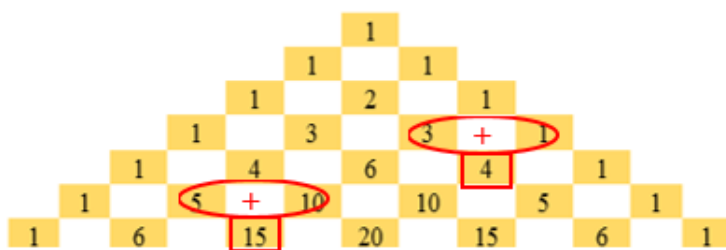


<p>A.</p> <p style="text-align: center;">14</p>	<p>B.</p> <p style="text-align: center;">7</p>	<p>C.</p> <p style="text-align: center;">9</p>	<p>D.</p> <p style="text-align: center;">ništa od navedenoga</p>	<p>E.</p> <p style="text-align: center;">ne želimo odgovoriti na pitanje</p>
---	--	--	--	--

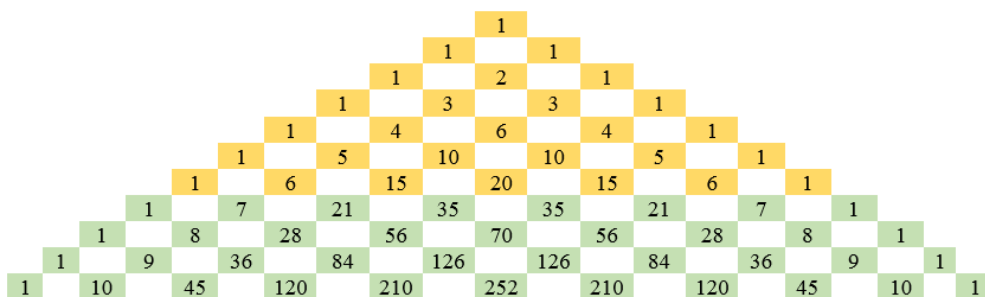
Rješenje:

U tornju je 13 jedinica, što znači da ih nedostaje  $21 - 13 = 8$ . S obzirom na to da se s obje strane retka nalazi jedinica, trebamo dopisati  $8 : 2 = 4$  retka tornja.

Uočimo pravilnost građenja tornja. Obrubljen je s jedinicama, a preostali brojevi jednaki su zbroju brojeva koji se nalaze lijevo i desno iznad njega. Primjerice,  $3 + 1 = 4$  ili  $5 + 10 = 15$ .



Nadopunimo još 4 retka tornja.



Preostalo nam je zbrojiti:

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2$$

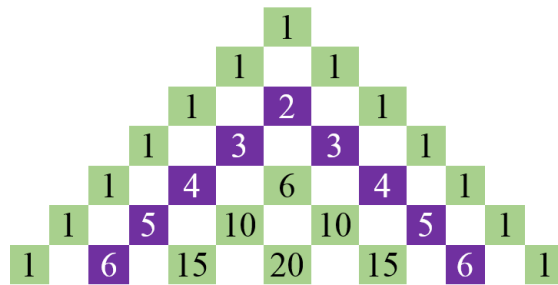
$$+ 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 2 = 13 \cdot 8 + 2 = 106$$

Zbroj znamenaka broja 106 je  $1 + 0 + 6 = 7$ . Primijetimo da nije bilo nužno crtati cijeli novi toranj već samo zaključiti koji će se brojevi nalaziti lijevo i desno od jedinica.

Točan odgovor je **B**.

6. Ante je crtao toranj kao na slici. Prestao je crtati nakon što se u tornju nalazila 101 jedinica. Tada je zbrojio sve brojeve u svim redovima koji se nalaze neposredno lijevo ili neposredno desno od jedinica. Koliki je zbroj znamenaka tako dobivenog broja?



<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b>
18	17	19	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

U tornju je 13 jedinica, što znači da ih nedostaje  $101 - 13 = 88$ . S obzirom na to da se s obje strane retka nalazi jedinica, trebamo dopisati  $88 : 2 = 44$  retka tornja.

Uočimo da će se desno od prve jedinice u retku nalaziti broj:

- 7 u 1. dopisanom retku
- 8 u 2. dopisanom retku
- 9 u 3. dopisanom retku ...

Zaključujemo da će se u 44. dopisanom retku desno od prve jedinice nalaziti broj  $44 + 6 = 50$ . Budući da želimo zbrojiti sve brojeve u svim redovima koji se nalaze neposredno lijevo ili neposredno desno od jedinica, moramo odrediti zbroj:

$$\begin{aligned}
 & 50 + 49 + 48 + \dots + 4 + 3 + 2 \\
 & \underline{+ 3 + 4 + 5 + \dots + 49 + 50} \\
 & 53 + 53 + 53 + \dots + 53 + 53 + 2 = 53 \cdot 48 + 2 = 2\,544 + 2 = 2\,546
 \end{aligned}$$

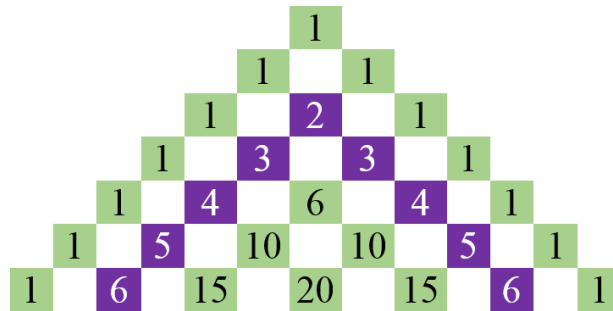
Traženi zbroj smo mogli odrediti i na drugi način. Primjerice:

$$2 + 2 \cdot (3 + 4 + \dots + 49 + 50) = 2 + 2 \cdot 53 \cdot 24 = 2 + 2\,544 = 2\,546$$

Zbroj znamenaka broja 2 546 je  $2 + 5 + 4 + 6 = 17$ .

Točan odgovor je **B**.

7. Ante je crtao toranj kao na slici. Prestao je crtati nakon što se u tornju nalazila 101 jedinica. Tada je pomnožio sve brojeve u svim redovima koji se nalaze neposredno lijevo ili neposredno desno od jedinica. S koliko nula završava dobiveni umnožak?



A. 24	B. 20	C. 22	D. ništa od navedenoga	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	----------	----------	---------------------------	------------------------------------

Rješenje:

Kao u prethodnom zadatku zaključujemo da smo dobili umnožak:

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50$$

S obzirom na to da za taj umnožak moramo odrediti s koliko nula završava prisjetimo se da će biti onoliko nula koliko je faktora 10 u tom umnošku. Budući je  $10 = 2 \cdot 5$  zaključujemo da moramo prebrojati sve petice (dvojki imamo više nego petica) koje se kriju kao faktori u tom umnošku. Napišimo sve višekratnike broja 5:

$$50, 45, 40, 35, 30, 25, 20, 25, 10, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.$$

Višekratnika broja 5 u promatranom umnošku je 19. Međutim, u nekim višekratnicima se kriju dviju petice. To su 50, 25, 25 i 50. To znači da je ukupan broj faktora 5 u promatranom umnošku  $19 + 4 = 23$ .

Točan odgovor je **D**.