Treće kolo 2021./2021.

1. Koliko ima troznamenkastih brojeva koji su djeljivi bar s jednim od brojeva 6 i 8?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
262	225	243	224	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Troznamenkasti brojevi djeljivi sa 6:

$$102 = 6 \cdot 17,\ 108 = 6 \cdot 18,\ 114 = 6 \cdot 19, \ldots, 996 = 6 \cdot 166$$

- takvih je brojeva 166 – 16 = 150.

Troznamenkasti brojevi djeljivi s 8:

$$104 = 8 \cdot 13,\ 112 = 8 \cdot 14,\ 120 = 8 \cdot 15, \ldots, 992 = 8 \cdot 124$$

- takvih je brojeva 124 – 12 = 112.

Troznamenkasti brojevi djeljivi s 24:

$$120 = 24 \cdot 5,\ 144 = 24 \cdot 6,\ 168 = 24 \cdot 7, \ldots, 984 = 24 \cdot 41$$

- takvih je brojeva 41 – 4 = 37.

Ako zbrojimo broj troznamenkastih brojeva djeljivih sa 6 i broj troznamenkastih brojeva djeljivih s 8, tada smo dva puta brojali broj troznamenkastih brojeva djeljivih s 24. Stoga je broj troznamenkastih brojeva koji su djeljivi bar s jednim od brojeva 6 i 8 jednak:

$$150 + 112 - 37 = 225.$$

Točan odgovor je **B**.

2. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $x^2 - y^2 = 2022$?

A.	B.	C.	D.	E.
0	4	8	beskonačno	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$x^2 - y^2 = 2022 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) = 2022$$

Iz činjenice da je umnožak paran broj zaključujemo da je bar jedan faktor paran.

Ako je $x + y$ paran, onda su x i y iste parnosti iz čega slijedi da je i $x - y$ paran. To znači da je umnožak s lijeve strane jednakosti djeljiv s 4. Analogno bi zaključili i da smo pretpostavili da je njihova razlika parna.

S obzirom na to da broj 2022 nije djeljiv s 4 zaključujemo da dana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Točan odgovor je **A.**

3. Koja je posljednja znamenka tisućitog člana danog niza?

$$123,\ 123 \cdot 3,\ 123 \cdot 3^2,\ 123 \cdot 3^3, \ldots$$

A.	B.	C.	D.	E.
1	3	7	9	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Primijetimo da su posljednje znamenke danih brojeva u nizu jednake posljednjim znamenkama niza:

3	$3 \cdot 3$	$3 \cdot 3^2$	$3 \cdot 3^3$	$3 \cdot 3^4$	$3 \cdot 3^5$	$\ldots$
3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	$\ldots$
3	9	7	1	3	9	$\ldots$

Dobili smo periodičan niz 3, 9, 7, 1 duljine perioda 4. Budući je $1\,000 = 4 \cdot 250$, do tisućitog člana niza ponovit će se 250 puta period iz čega zaključujemo da će tisućiti član niza biti 1.

Točan odgovor je **A.**

4. Koji je od danih brojeva najmanji?

$$a = 10^{2022} - 10^{2020},\ b = 8\cdot 10^{2021} - 10^{2020},\ c = 10^{2022} + 10^{2021} \text{ i } d = 7\cdot 10^{2021} + 10^{2020}$$

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
a	b	c	d	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Da bismo ih mogli usporediti prikažimo dane brojeve preko iste potencije 10^{2020}.

$$a = 10^{2022} - 10^{2020} = 10^2\cdot 10^{2020} - 10^{2020} = 10^{2020}\left(10^2 - 1\right) = 99\cdot 10^{2020}$$

$$b = 8\cdot 10^{2021} - 10^{2020} = 8\cdot 10\cdot 10^{2020} - 10^{2020} = 10^{2020}\left(80 - 1\right) = 79\cdot 10^{2020}$$

$$c = 10^{2022} + 10^{2021} = 10^2\cdot 10^{2020} + 10\cdot 10^{2020} = 10^{2020}\left(10^2 + 10\right) = 110\cdot 10^{2020}$$

$$d = 7\cdot 10^{2021} + 10^{2020} = 7\cdot 10\cdot 10^{2020} + 10^{2020} = 10^{2020}\left(70 + 1\right) = 71\cdot 10^{2020}$$

Očito je $d < b < a < c$.

Točan odgovor je **D**.

5. Koliko raznostraničnih trokuta postoji kojima su duljine stranica neki od danih brojeva?

$a=10^{2022}-10^{2020}$, $b=8\cdot10^{2021}-10^{2020}$, $c=10^{2021}+10^{2020}$, $d=10^{2022}+10^{2021}$ i $e=7\cdot10^{2021}+10^{2020}$

A.	B.	C.	D.	E.
10	5	8	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Prikažimo dane brojeve preko iste potencije 10^{2020}.

$$a=10^{2022}-10^{2020}=10^2\cdot10^{2020}-10^{2020}=10^{2020}\left(10^2-1\right)=99\cdot10^{2020}$$

$$b=8\cdot10^{2021}-10^{2020}=8\cdot10\cdot10^{2020}-10^{2020}=10^{2020}\left(80-1\right)=79\cdot10^{2020}$$

$$c=10^{2021}+10^{2020}=10\cdot10^{2020}+10^{2020}=10^{2020}\left(10+1\right)=11\cdot10^{2020}$$

$$d=10^{2022}+10^{2021}=10^2\cdot10^{2020}+10\cdot10^{2020}=10^{2020}\left(10^2+10\right)=110\cdot10^{2020}$$

$$e=7\cdot10^{2021}+10^{2020}=7\cdot10\cdot10^{2020}+10^{2020}=10^{2020}\left(70+1\right)=71\cdot10^{2020}$$

Za duljine stranica trokuta mora vrijediti nejednakost trokuta tj. zbroj svake dvije stranice mora biti veći od duljine treće stranice.

Primijetimo da je dovoljno promotriti sve mogućnosti kada brojevi 110, 99, 79, 71 i 11 mogu biti stranice raznostraničnog trokuta.

najdulja stranica	srednja po duljini stranica	najkraća stranica	provjera najdulja < srednja + najkraća
110	99	79	110 < 99 + 79
	99	71	110 < 99 + 71
	99	11	110 = 99 + 11
	79	71	110 < 79 + 71
	79	11	110 > 79 + 11
	71	11	110 > 71 + 11
99	79	71	99 < 79 + 71
	79	11	99 > 79 + 11
	71	11	99 > 71 + 11
79	71	11	79 < 71 + 11

Postoji 5 raznostraničnih trokuta kojima su duljine stranica neki od danih brojeva.

Točan odgovor je **B**.

6. Kolika je udaljenost težišta i središta upisane kružnice jednakokračnog trokuta kojem su duljina osnovice i duljina visine na osnovicu 4 cm?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\frac{7}{3}-\sqrt{5}$ cm	$3-\sqrt{5}$ cm	$\frac{5}{3}-\sqrt{5}$ cm	ništa od navedenog	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Skicirajmo jednakokračan trokut *ABC* s težištem i središtem trokutu upisane kružnice (sjecište simetrala kutova).

$a = v_a = 4$ cm

$$\Rightarrow |AC| = b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Polumjer upisane kružnice izračunat ćemo preko površine trokuta.

$$P_\Delta = \frac{av_a}{2} = 8\,\text{cm}^2,$$

$$s = \frac{a+2b}{2} = \frac{4+4\sqrt{5}}{2} = 2+2\sqrt{5}\,\text{cm}$$

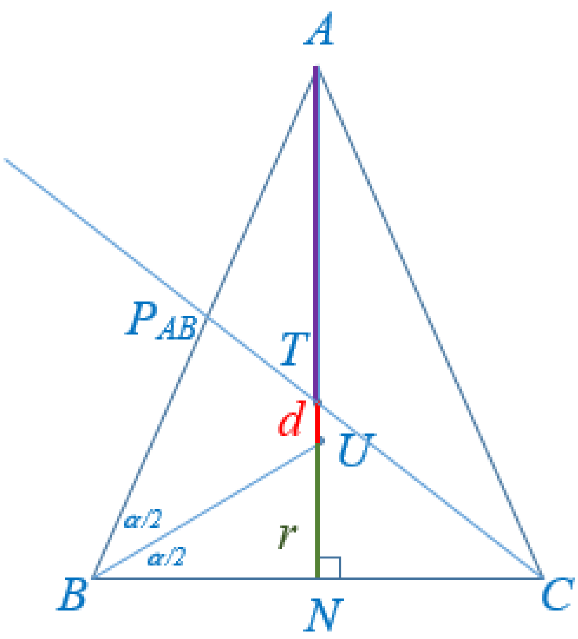
$$P_\Delta = rs \quad \Rightarrow \quad r = \frac{P_\Delta}{s} = \frac{8}{2+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1 \text{ cm}$$

Težište T dijeli težišnicu u omjeru 1 : 2 od stranice ka vrhu, pa je $|TN| = \frac{1}{3}t_a = \frac{1}{3}v_a = \frac{4}{3}$ cm

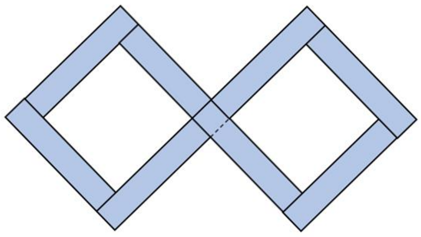
$$|TN| = \frac{4}{3} = 1.\dot{3} > 1.23 \approx \sqrt{5}-1 = r = |UN|$$

$$d = |TN| - |UN| = \frac{4}{3} - \left(\sqrt{5}-1\right) = \frac{7}{3} - \sqrt{5} \text{ cm}$$

Točan odgovor je **A**.



7. Od osam jednakih pločica pravokutnog oblika složen je lik kao na slici. Vanjska duljina ruba tog lika je 120 cm, a površina svakog ograđenog bijelog kvadrata 144 cm^2. Kolika je duljina kraće stranice jedne pločice?

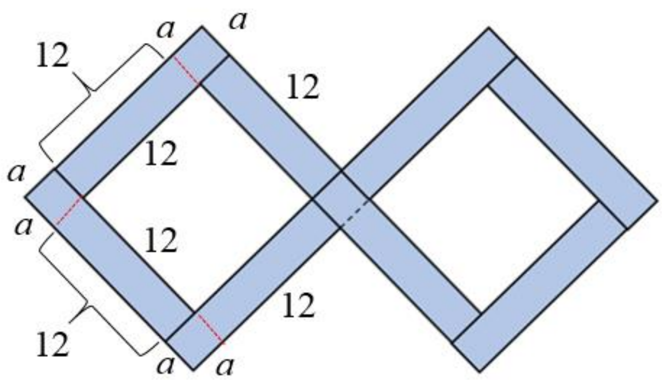


A. nije moguće odrediti	**B.** 4 cm	**C.** 3 cm	**D.** 2 cm	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Budući da je površina svakog ograđenog bijelog kvadrata 144 cm^2 zaključujemo da je duljina stranice bijelog kvadrata jednaka 12 cm.

Pogledajmo od čega se sastoji vanjski rub danog lika. Duljinu kraće stranice pločice označimo s *a*.

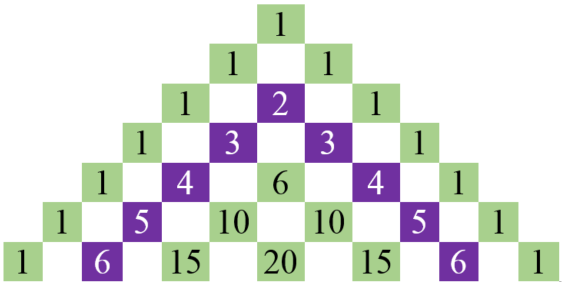


Lijevi dio lika ima vanjski rub duljine $4 \cdot 12 + 6a = 48 + 6a$. S obzirom na to da je lik simetričan, duljina vanjskog ruba mu je $2 \cdot (48 + 6a) = 96 + 12a$.

Nakon što izjednačimo dobiveni izraz s 120 cm dobivamo da je a = 2 cm.

Točan odgovor je **D**.

8. Ante je crtao toranj kao na slici. Prestao je crtati nakon što se u tornju nalazila 101 jedinica. Tada je zbrojio sve brojeve u svim redovima koji se nalaze neposredno lijevo ili neposredno desno od jedinica. Koliki je zbroj znamenaka tako dobivenog broja?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
18	17	19	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

U tornju je 13 jedinica, što znači da ih nedostaje 101 – 13 = 88. S obzirom na to da se s obje strane retka nalazi jedinica, trebamo dopisati 88 : 2 = 44 retka tornja.

Uočimo da će se desno od prve jedinice u retku nalaziti broj:

- 7 u 1. dopisanom retku
- 8 u 2. dopisanom retku
- 9 u 3. dopisanom retku …

Zaključujemo da će se u 44. dopisanom retku desno od prve jedinice nalaziti broj 44 + 6 = 50. Budući da želimo zbrojiti sve brojeve u svim redovima koji se nalaze neposredno lijevo ili neposredno desno od jedinica, moramo odrediti zbroj:

$$\begin{array}{l} \ \ 50 + 49 + 48 + \ldots + 4 + 3 + 2 \\ \underline{+\ 3 + 4 + 5 + \ldots + 49 + 50} \\ \ \ 53 + 53 + 53 + \ldots + 53 + 53 + 2 = 53 \cdot 48 + 2 = 2\,544 + 2 = 2\,546 \end{array}$$

Traženi zbroj smo mogli odrediti i na drugi način. Primjerice:

$$2 + 2 \cdot (3 + 4 + \ldots + 49 + 50) = 2 + 2 \cdot 53 \cdot 24 = 2 + 2\,544 = 2\,546$$

Zbroj znamenaka broja 2 546 je 2 + 5 + 4 + 6 = 17.

Točan odgovor je **B**.

9. Parabola ime tjeme u (1, 1) i odsječak na osi ordinata joj je 3. Koliki je nagib tangente na tu parabolu koja ju dodiruje u točki (2, 3)?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
3.5	4	4.5	5	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Parabola s tjemenom u (1, 1): $y-1=a(x-1)^2$

Odsječak na osi ordinata joj je 3 pa prolazi točkom (0, 3): $3-1=a(0-1)^2 \quad \Rightarrow \quad a=2$

Parabola ima jednadžbu: $y=2(x-1)^2+1$

Tangenta koju tražimo je pravac koji prolazi točkom (2, 3): $y-3=k(x-2)$

Da bi taj pravac bio tangenta on mora s parabolom imati jednu zajedničku točku. Riješimo sustav njihovih jednadžbi.

$$k(x-2)+3=2(x-1)^2+1 \quad \Rightarrow \quad kx-2k+3=2x^2-4x+3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-(4+k)x+2k=0$$

Izračunajmo diskriminantu kvadratne jednadžbe.

$$D=(4+k)^2-4\cdot 4k=16+8k+k^2-16k=(4-k)^2$$

Jednadžba će imati jedno rješenje akko je diskriminanta jednaka 0, pa zaključujemo da je k = 4.

Točan odgovor je **B**.

10. Koliko rješenja jednadžbe $\sin 2x+\cos 3x=4$ zadovoljava svojstvo $|x|<4\pi$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
0	2	4	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

S obzirom na to da su sinus i kosinus ograničene su funkcije i njihova maksimalna vrijednost je 1, zbroj $\sin 2x+\cos 3x$ ne može nikada biti jednak 4. Dana jednadžba nema rješenja.

Točan odgovor je **A**.