

## Jesensko kolo 2020./2021.

1. Koliko se parnih brojeva nalazi u nizu 344, 345, 346, ..., 902, 903?

<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
559	279	280	560	

Rješenje:

- U danom nizu nalazi se  $903 - 343 = 560$  uzastopnih brojeva. Pola od njih je parno, pa je broj parnih brojeva  $560 : 2 = 280$ . Točan odgovor je **C**.

2. Mama krajem rujna, u svojoj omiljenoj prodavaonici, kupuje jednokratne maske za lice za svoju četveročlanu obitelj za cijeli listopad. Maske su pakirane po 10 komada, a cijena paketa je 29.99 kn. Svaki član obitelji za svaki od 22 radna dana treba bar jednu masku. Koliko najmanje novca mama treba izdvojiti da bi kupila zalihu maski za cijeli listopad?

<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
263.12 kn	269.91 kn	251.16 kn	275.08 kn	

Rješenje:

- S obzirom da je obitelj četveročlana i da svaki član obitelji za svaki od 22 radna dana treba bar jednu masku, ukupan broj maski koji mama treba kupiti je  $22 \cdot 4 = 88$ .
- Maske su pakirane po 10 komada, pa je potrebno kupiti 9 paketa.
- Kako je cijena jednog paketa 29.99 kn, potrebno je  $29.99 \cdot 9 = 269.91$  kn.
- Ukupnu cijenu možemo izračunati i tako da primijetimo da je cijena jednog paketa za 1 lp manja od 30 kn, pa će nas 9 takvih paketa stajati  $9 \cdot 30 = 270$  kn umanjeno za 9 lp, dakle 269.91 kn.
- Točan odgovor je **B**.

3. Ivan je zamislio šestoznamenkasti broj manji od 500 000 kojem je prva znamenka slijeva parna. Znamenke tog broja različite su. Znamenka desetstisućice dvostruko je veća od znamenke jedinice i trostruko veća od znamenke desetice. Zbroj znamenaka tisućice i stotice je 8. Koliki je zbroj svih znamenaka tog šestoznamenkastog broja?

A.	B.	C.	D.	E.
25	22	23	15	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Razmotrimo dane podatke:

- broj manji od 500 000 kojem je prva znamenka slijeva parna, dakle ona može biti 2 ili 4,
- znamenka desetstisućice dvostruko je veća od znamenke jedinice i trostruko veća od znamenke desetice iz čega zaključujemo da znamenka desetstisućice mora biti djeljiva sa 6. Jedina znamenka djeljiva sa 6 je 6, što znači da je znamenka jedinice 3, a znamenka desetice 2.
- znamenke tog broja različite su pa prva znamenka tog broja mora biti 4.

Zaključili smo da je traženi broj oblika  $\overline{46ab23}$ . Zbroj znamenaka tisućice i stotice jednak je 8 pa vrijedi  $a + b = 8$ .

Primijetimo da postoji nekoliko brojeva koji zadovoljavaju dana svojstva (460823, 461723, 467123 i 468023), ali svima je zbroj znamenaka jednak  $4 + 6 + 8 + 2 + 3 = 23$ . Točan odgovor je **C**.

4. Koliko troznamenkastih brojeva  $a$  zadovoljava jednakost  $1325 \cdot a = b \cdot b$  za neki prirodni broj  $b$ ?

A.	B.	C.	D.	E.
17	4	16	3	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj 1325 rastavimo na proste faktore. Tada vrijedi:  $5 \cdot 5 \cdot 53 \cdot a = b \cdot b$ .

Broj s desne strane umnožak je prirodnog broja samog sa sobom, pa i broj s lijeve strane jednakosti moramo moći zapisati u tom obliku. Odatle zaključujemo da  $a$  mora biti djeljiv s 53. Dakle,  $a = 53 \cdot k \cdot k$ , pri čemu je  $k$  prirodan broj.

S obzirom da tražimo koliko troznamenkastih brojeva  $a$  zadovoljava dano svojstvo, to su brojevi:

$53 \cdot 2 \cdot 2 = 212$ ,  $53 \cdot 3 \cdot 3 = 477$  i  $53 \cdot 4 \cdot 4 = 848$ . Točan odgovor je **D**.

5. a) Koliki je ostatak pri dijeljenju s 5 broja  $12344567878901 - 2345634567 + 5678967890$ ?

A.	B.	C.	D.	E.
1	2	3	4	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

~ Promotrimo što se događa sa ostatkom pri dijeljenju nekim brojem kada zbrojimo, oduzmemo ili pomnožimo dva dana broja.

~ Uzmimo primjerice brojeve  $a = 123$  i  $b = 457$  i promatrajmo njihove ostatke pri dijeljenju sa 4:

$$a = 4 \cdot 30 + 3 \quad \text{i} \quad b = 4 \cdot 114 + 1$$

$$a + b = 4 \cdot 30 + 3 + 4 \cdot 114 + 1 = 4 \cdot (30 + 114) + 3 + 1 = 4 \cdot 144 + 3 + 1 = 4 \cdot 144 + 4 = 4 \cdot 145$$

$$a - b = 4 \cdot 30 + 3 - (4 \cdot 114 + 1) = 4 \cdot (30 - 114) + 3 - 1 = -4 \cdot 84 + 3 - 1 = -4 \cdot 84 + 2$$

$$a \cdot b = (4 \cdot 30 + 3) \cdot (4 \cdot 114 + 1) = 4 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 114 + 4 \cdot 30 + 4 \cdot 3 \cdot 114 + 3 \cdot 1 = 4 \cdot 14\,052 + 3$$

~ Kada zbrajamo, oduzimamo ili množimo dva broja, tada se i njihovi ostaci pri dijeljenju nekim brojem zbrajaju, oduzimaju ili množe.

~ Dakle, za dana tri broja u zadatku dovoljno nam je ustvrditi koliki ostatak daju pri dijeljenju s 5 i samo te ostatke izračunati:

$$1 - 2 + 0 = -1$$

~ Znamo da ostaci pri dijeljenju brojem 5 mogu biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Što znači ostatak  $-1$  koji smo dobili?

~ Broj  $23 = 4 \cdot 6 - 1$ , ali i  $23 = 4 \cdot 5 + 3$ , što znači da prilikom dijeljenja brojem 4 ostatak  $-1$  odgovara ostatku  $4 - 1 = 3$ .

~ Analogno, prilikom dijeljenja s 5:

- ostatak  $-1$  odgovara ostatku  $5 - 1 = 4$ ,
- ostatak  $-2$  odgovara ostatku  $5 - 2 = 3$ ,
- ostatak  $-3$  odgovara ostatku  $5 - 3 = 2$ ,
- ostatak  $-4$  odgovara ostatku  $5 - 4 = 1$ .

~ Točan odgovor je **D**.

5. b) Koliki je ostatak pri dijeljenju s 5 broja  $(12345 + 12345678 + 12345678901) \cdot (-23456 - 34567 + 56789 - 67890)$ ?

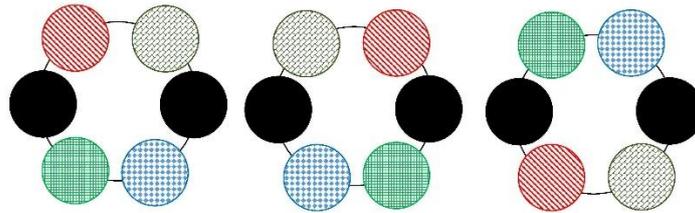
A.	B.	C.	D.	E.
0	1	2	4	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

~ Uzimajući u obzir objašnjenje prethodnog zadatka, ostatak danog broja pri dijeljenju s 5 bit će:

$$(0 + 3 + 1) \cdot (-1 - 2 + 4 - 0) = 4 \cdot 1 = 4, \text{ pa je točan odgovor } \mathbf{D}.$$

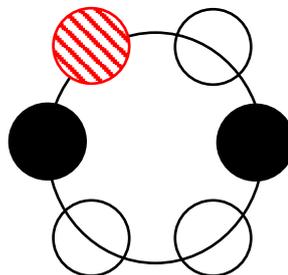
6. Marica želi nanizati ogrlicu od dviju jednakih crnih i četiriju različitih šarenih perli. Na koliko načina to može napraviti ako želi da su crne perle jedna nasuprot drugoj? Napomena: ogrlicu možemo okrenuti i prevrnuti pa su rasporedi na slici jednaki.



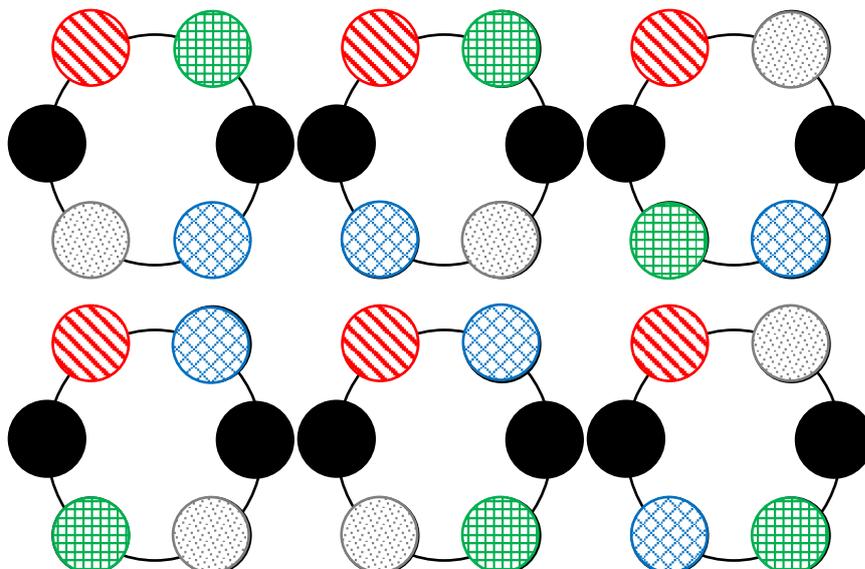
<p><b>A.</b></p> <p>8</p>	<p><b>B.</b></p> <p>12</p>	<p><b>C.</b></p> <p>6</p>	<p><b>D.</b></p> <p>24</p>	<p><b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje</p>
---------------------------	----------------------------	---------------------------	----------------------------	--

Rješenje:

S obzirom da ogrlicu možemo okrenuti i prevrnuti sigurno je možemo dovesti u položaj gdje su crne perle lijevo i desno (moraju biti nasuprotne). Osim toga uočimo crvenu perlu i postavimo ogrlicu u položaj na slici:

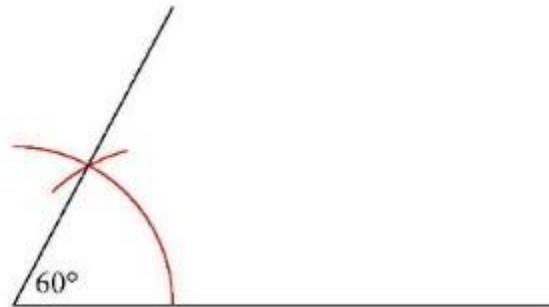


Preostale tri boje tada možemo složiti na 6 načina:



Točan odgovor je C.

7. Prilikom konstrukcije kuta veličine  $60^\circ$  ravnalom i šestarom, moramo šestarom nacrtati dva luka (kao na slici). Koliko najmanje lukova moramo nacrtati ako želimo ravnalom i šestarom konstruirati jednakokrčan trokut s kutom veličine  $120^\circ$  i duljinom kraka 3 cm?

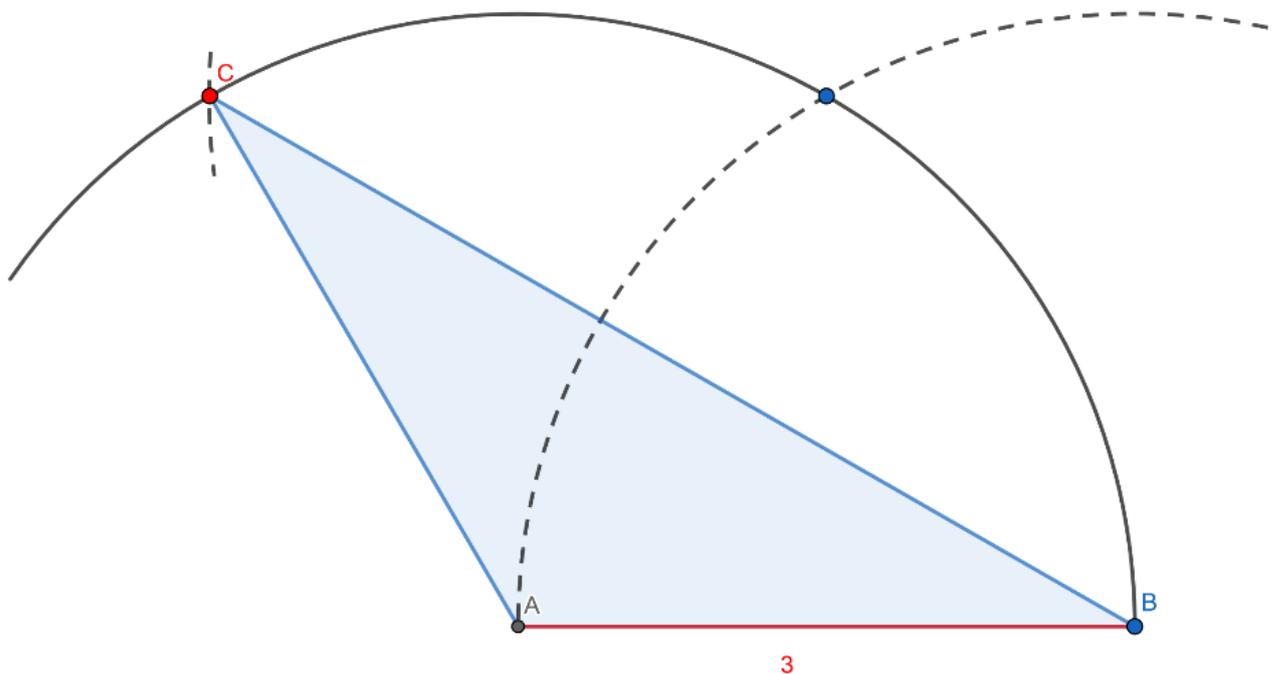


A. više od 5	B. 5	C. 4	D. manje od 4	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------	---------	---------	------------------	---------------------------------------

Rješenje:

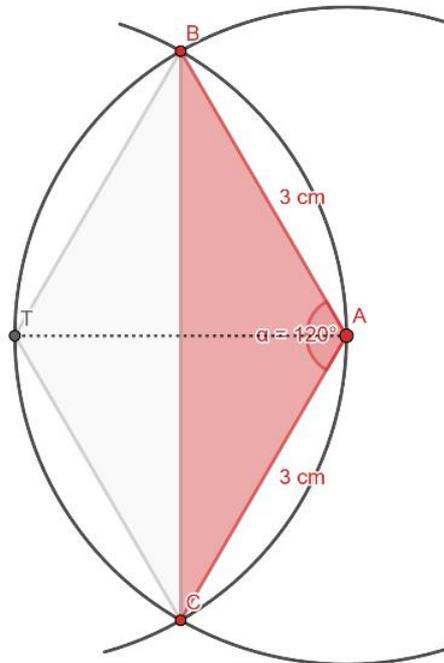
Pogledajmo konstrukciju s 3 luka:

- nacrtamo dužinu  $\overline{AB}$  duljine 3 cm,
- iz točke A konstruiramo luk duljine 3 cm
- ne mijenjajući otvor šestara iz točke B naneseo luk istog polumjera
- iz dobivene točke presjeka dvaju lukova još jednom naneseo isti luk
- presjek prvog i trećeg luka je vrh C traženog trokuta



Konstrukcija s 2 luka:

- iz točke  $T$  nacrtamo luk polumjera 3 cm,
- na tom luku odaberemo neku točku  $A$  i iz nje nacrtamo luk polumjera 3 cm (koji prolazi kroz točku  $T$ ),
- presječne točke ta dva luka označimo s  $B$  i  $C$ ,
- trokut  $ABC$  je jednakokrčan s kutom veličine  $120^\circ$  i duljinom kraka 3 cm.



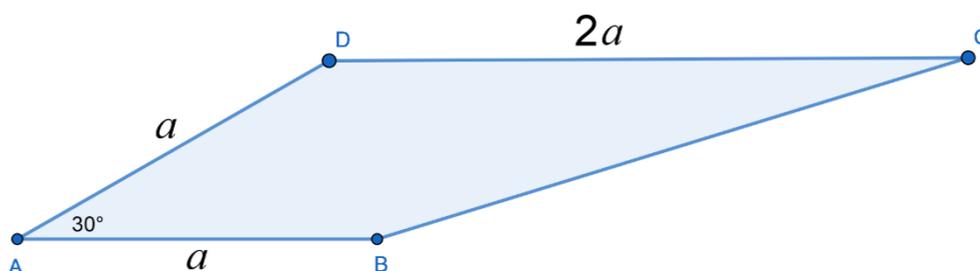
Točan odgovor je **D**.

8. U trapezu  $ABCD$  osnovica  $\overline{AB}$  dvostruko je kraća od osnovice  $\overline{CD}$  i jednako duga kao krak  $\overline{AD}$ . Ako je šiljast kut trapeza uz vrh  $A$  veličine  $30^\circ$ , kolika je veličina kuta trapeza uz vrh  $B$ ?

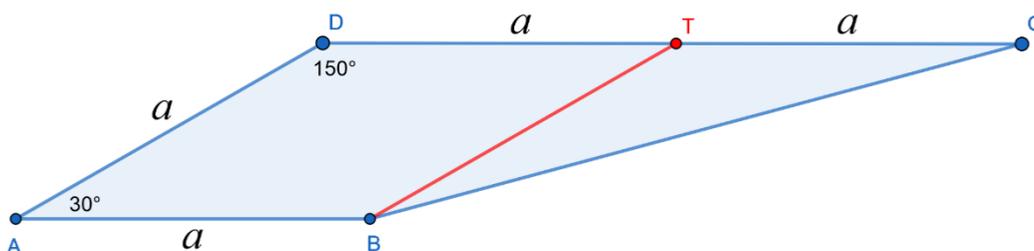
<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
150°	120°	165°	135°	

Rješenje:

Skicirajmo dani trapez:



Da bismo iskoristili činjenicu da je osnovica  $\overline{AB}$  dvostruko kraća od osnovice  $\overline{CD}$ , označimo polovište dužine  $\overline{CD}$  s  $T$  i spojimo tu točku s vrhom  $B$ .



Četverokut  $ABTD$  je romb (jer je  $\overline{AB}$  paralelna i jednako duga kao  $\overline{DT}$  i  $|AD|=|DT|$ ). Stoga zaključujemo da je  $|BT|=a$  pa je trokut  $BCT$  jednakokratan. Veličine kutova uz osnovicu tog trokuta su jednake i njihov zbroj je  $30^\circ$  (tj. jednak veličini kuta  $DTB$ ), dakle  $|\angle CBT|=15^\circ$ . Veličina traženog kuta uz vrh  $B$  je  $15^\circ + 150^\circ = 165^\circ$ .

Točan odgovor je **C**.

9. Zbroj je svaka tri uzastopna polja 2020. Koliki je zbroj znamenaka broja koji se nalazi u desetom polju?

		111					555							
--	--	-----	--	--	--	--	-----	--	--	--	--	--	--	--

<b>A.</b> 15	<b>B.</b> 18	<b>C.</b> 13	<b>D.</b> ništa od navedenog	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------	-----------------	-----------------	------------------------------	---

Rješenje:

Da bismo jednostavnije objasnili rješenje zadatka, uvedimo oznake kao na slici:

		111	A	B	C	D	555	E	F = ?					
--	--	-----	---	---	---	---	-----	---	-------	--	--	--	--	--

Vrijedi  $111 + A + B = 2020$  iz čega slijedi da je  $A + B = 1909$ .

Ali i  $A + B + C = 2020$  pa zaključujemo da je  $1909 + C = 2020$ , tj  $C = 111$ .

Jer je  $C + D + 555 = 2020$ , dobivamo da je  $D = 2020 - 111 - 555 = 1354$ .

		111	A	B	111	1354	555	E	F					
--	--	-----	---	---	-----	------	-----	---	---	--	--	--	--	--

Sada lako izračunamo sva preostala polja. Očito se brojevi 111, 1354 i 555 ponavljaju periodički. Na desetom polju nalazit će se broj 1354. Njegov zbroj znamenaka je  $1 + 3 + 5 + 4 = 13$ .

Točan odgovor je C.