Zimsko kolo 2021./2022.

1. U jednakokračnom trokutu krak je 5 puta dulji od osnovice. Njegov opseg jednak je opsegu jednakostraničnog trokuta i manji je od 100 cm. Koliko takvih jednakokračnih trokuta postoji ako su duljine stranica obaju trokuta iskazane u centimetrima prirodni brojevi?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
3	6	9	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

U jednakokračnom trokutu je krak b pet puta dulji od osnovice a pa vrijedi da je $b = 5a$.

Opseg tog jednakokračnog trokuta je:

$$O = a + 2b = a + 2 \cdot 5a = a + 10a = 11a.$$

Njegov opseg jednak je opsegu jednakostraničnog trokuta duljine stranice n:

$$11a = 3n.$$

S obzirom na to da su a i n u centimetrima prirodni brojevi, zaključujemo iz gornje jednakosti da je a višekratnik broja 3 i n višekratnik broja 11.

Pogledajmo sve mogućnosti za duljine stranica u centimetrima vodeći računa o tome da je opseg trokuta manji od 100 cm.

n	$O = 3n = 11a$	$a = (11a) : 3$	$O < 100$ cm
11	33	3	da
22	66	6	da
33	99	9	da
44	132	12	ne

Postoje tri jednakokračna trokut s danim svojstvom.

Točan odgovor je **A.**

2. Za koliko prirodnih brojeva n vrijedi da je i broj koji je dvostruko manji od broja n i broj koji je dvostruko veći od broja n prirodan i četveroznamenkast?

A. 5 000	**B.** 1 500	**C.** 4 000	**D.** 2 000	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

n – prirodan broj

$n : 2$ – broj dvostruko manji od broja n

$n \cdot 2$ – broj dvostruko veći od broja n

Najmanji od njih je broj $n : 2$ i on mora biti četveroznamenkast što znači da najmanje može biti jednak 1 000. Tada je broj n jednak 2 000. Pogledajmo ostale slučajeve:

$n : 2$	n	$n \cdot 2$
1 000	2 000	4 000
1 001	2 002	4 004
1 002	2 004	4 008
…	…	…

Primijetimo da je broj $n \cdot 2$ višekratnik broja 4 i da mora biti četveroznamenkast. Najveći takav broje je 9 996. Tada je n dvostruko manji od njega i jednak je 9 996 : 2 = 4 998, a $n : 2$ dvostruko manji od n i jednak 4 998 : 2 = 2 499.

$n : 2$	n	$n \cdot 2$
1 000	2 000	4 000
1 001	2 002	4 004
1 002	2 004	4 008
…	…	…
2 498	4 996	9 992
2 499	4 998	9 996

Dakle, za parne brojeve n od 2 000 do 4 998 vrijedi da je broj koji je dvostruko manji od broja n i broj koji je dvostruko veći od broja n prirodan i četveroznamenkast. Takvih je brojeva jednako kao prirodnih brojeva od 1 000 do 2 499, dakle 1 500 (što je vidljivo iz prve kolone tablice).

Točan odgovor je **B**.

3. Na koliko načina broj 200 možemo napisati kao umnožak triju prirodnih brojeva? Napomena: umnoške s istim faktorima smatramo jednakima ($1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 1 \cdot 3$).

A. manje od 11	**B.** 11	**C.** 12	**D.** više od 12	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Broj 200 rastavimo na proste faktore.

$$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Ne zaboravimo da u umnošku možemo napisati i neograničen broj faktora 1.

Podijelimo faktore u tri skupine tako da poredamo od najmanjeg do najvećeg faktora.

Ako je prvi faktor 1, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 200. Broj rastava broja 200 na dva faktora jednak je polovici broja njegovih djelitelja.

prvi faktor	*drugi faktor*	*treći faktor*
1	1	200
1	2	100
1	4	50
1	5	40
1	8	25
1	10	20

Ako je prvi faktor 2, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 100. Broj rastava broja 100 na dva faktora jednak je polovici broja njegovih djelitelja. Ali, rastav $2 \cdot 1 \cdot 100$ već imamo i ne smijemo ga opet napisati. To je vidljivo i iz toga da u tom rastavu faktori nisu poredani od najmanjeg ka najvećem.

prvi faktor	*drugi faktor*	*treći faktor*
2	2	50
2	4	25
2	5	20
2	10	10

Ako je prvi faktor 4, tada je umnožak drugog i trećeg faktora 50. Postoji samo jedan rastav broja 50 na dva faktora koji nisu manji od 4. Slično je i brojem 5.

prvi faktor	*drugi faktor*	*treći faktor*
4	5	10
5	5	8

Dakle, ukupno postoji 12 mogućnosti da broj 200 napišemo kao umnožak triju prirodnih brojeva.

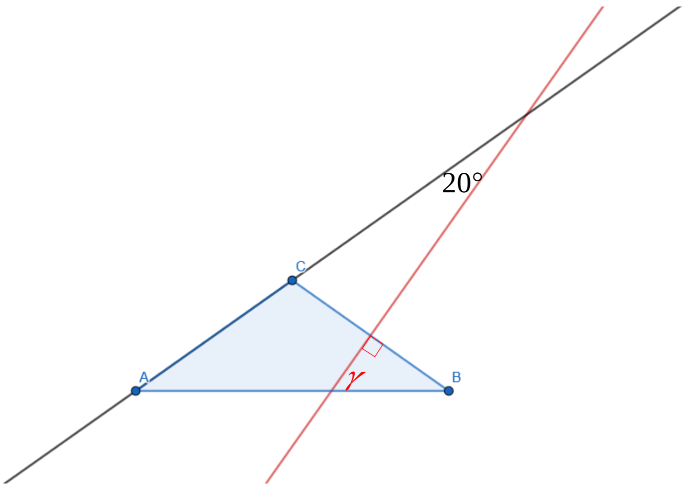
Točan odgovor je **C**.

4. U tupokutnom jednakokračnom trokutu simetrala jednog kraka siječe pravac na kojem leži drugi krak pod kutom veličine 20°. Kolika je veličina manjeg kuta pod kojim ta simetrala siječe osnovicu trokuta?

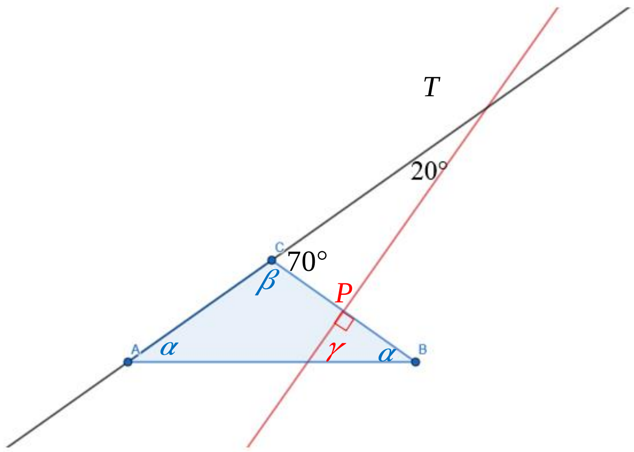
A. 20°	**B.** 70°	**C.** 55°	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Skicirajmo zadano.



Simetrala dužine okomita je na nju i prolazi njenim polovištem. Označimo polovište s P, a presjek simetrale i pravca AC s T. Trokut PTC je pravokutan pa je veličina kuta PCT jednaka $90° - 20° = 70°$.



Sada možemo izračunati veličine kutova trokuta.

$$\beta = 180° - 70° = 110°$$

$$2\alpha + \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 180° - 110° = 70° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 35°$$

Veličina traženog kuta je $\gamma = 90° - 35° = 55°$.

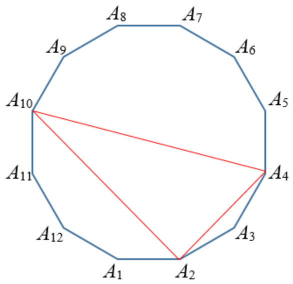
Točan odgovor je **C**.

5. Zadan je pravilan 12-erokut. Koliko postoji trokuta čiji su vrhovi ujedno vrhovi tog 12-erokuta?

A.	B.	C.	D.	E.
manje od 200	između 200 i 300	između 300 i 400	više od 400	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

Skicirajmo pravilni 12-erokut $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$ i odaberimo jedan trokut čiji su vrhovi ujedno i vrhovi 12-erokuta.



Vrhovi trokuta su $A_2 A_4 A_{10}$.

Svakom izboru tri točke od 12 vrhova odgovara jedan trokut. Dakle, problem se sveo na to da prebrojimo na koliko načina od 12 točaka možemo izabrati 3.

Prvu točku možemo izabrati na 12, drugu na 11, a treću na 10 načina. Izbor sve tri točke možemo napraviti na $12 \cdot 11 \cdot 10$ načina. Ali, u tom broju načina je važno koja je točka na prvom, koja na drugom i koja na trećem mjestu. Na primjer, među svim tim načinima nalaze se:

$$A_2 A_4 A_{10}, \qquad A_2 A_{10} A_4,$$
$$A_4 A_2 A_{10}, \qquad A_4 A_{10} A_2,$$
$$A_{10} A_2 A_4, \qquad A_{10} A_4 A_2.$$

Međutim, ovih 6 izbora vrhovi su istog trokuta.

Zaključujemo da je broj $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\,320$ šest puta veći od broja trokuta, pa je broj trokuta $1\,320 : 6 = 220$.

Točan odgovor je **B**.