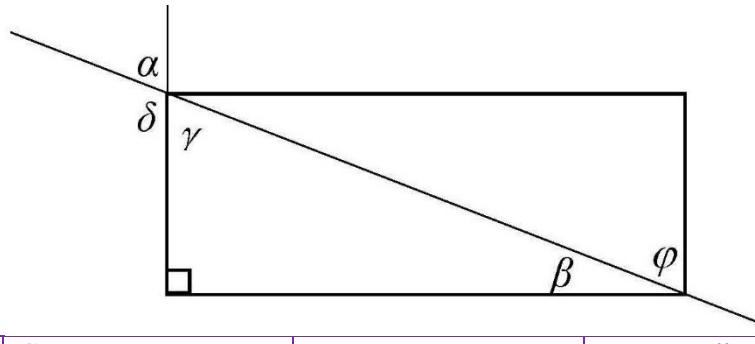




Jesensko kolo 2020./2021.

1. Koliko je napisanih tvrdnji točno?

- δ i γ su sukuti
- $\alpha + \beta = 90^\circ$
- α i β su kutovi s okomitim kracima
- $\gamma = \varphi$
- α i φ su kutovi uz presječnicu
- δ i φ su suplementarni
- δ je izbočen
- α i β su komplementarni



A. 8	B. 7	C. 6	D. 5	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

↳ Promotrimo tvrdnje:

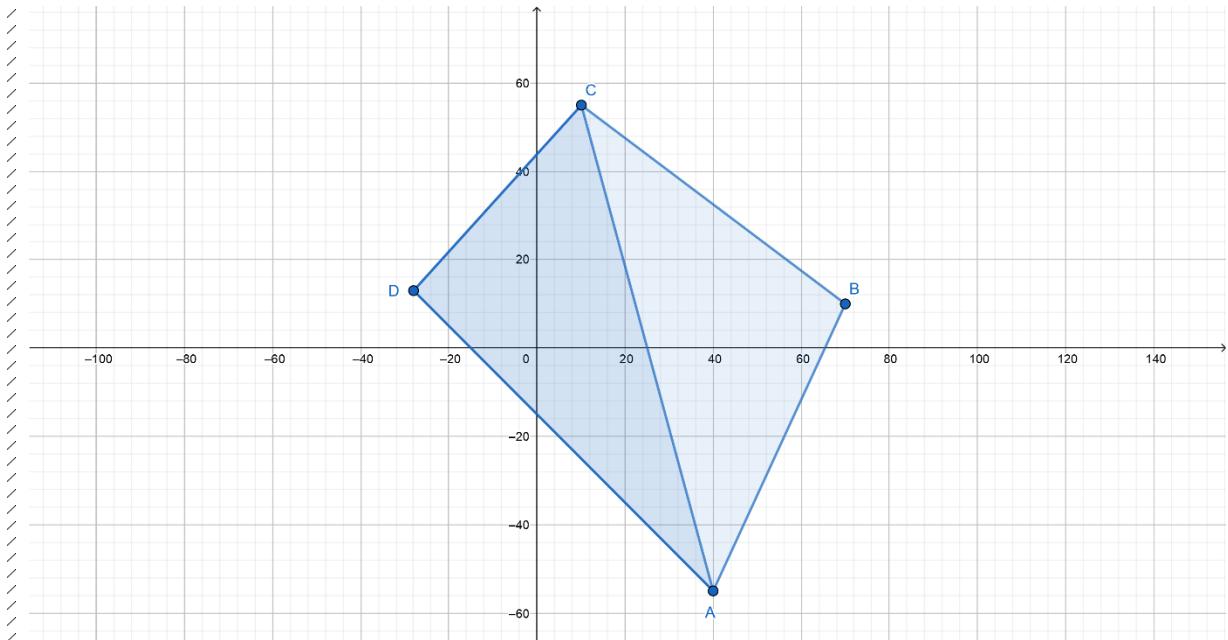
- δ i γ su sukuti (DA, susjedni kutovi, zbroj njihovih veličina je 180°)
- $\alpha + \beta = 90^\circ$ (DA, $\alpha = \varphi$ i $\varphi + \beta = 90^\circ$)
- α i β su kutovi s okomitim kracima (NE, jer im je jedan krak zajednički)
- $\gamma = \varphi$ (DA, kutovi uz presječnicu)
- α i φ su kutovi uz presječnicu (DA, jer su stranice pravokutnika paralelne)
- δ i φ su suplementarni (DA, $\gamma = \varphi$ i $\gamma + \delta = 180^\circ$)
- δ je izbočen (NE, tup je)
- α i β su komplementarni (DA, $\alpha = \varphi$ i $\varphi + \beta = 90^\circ$)

↳ Točno je 6 tvrdnji. Točan odgovor je C.

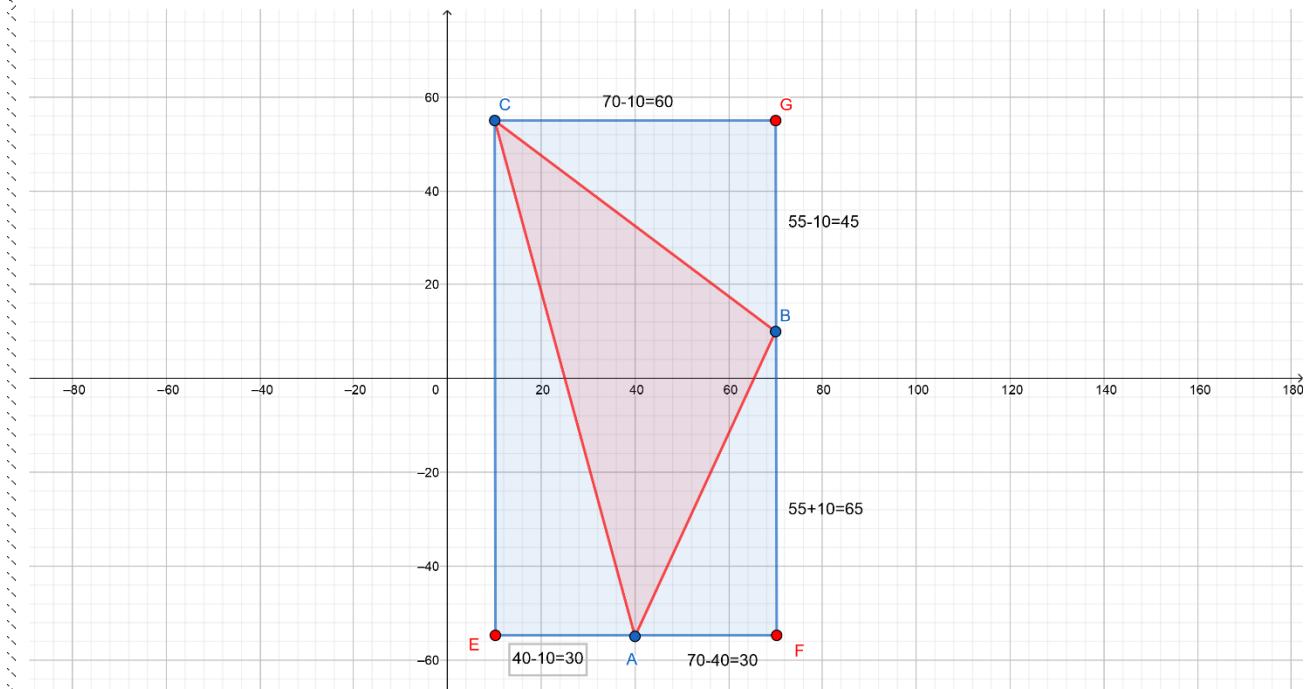
2. Dane su točke $A(40, -55)$, $B(70, 10)$, $C(10, 55)$ i $D(-28, 13)$. Za koliko je površina trokuta ACD manja od površine četverokuta $ABCD$?

A. za manje od 2500	B. za 2570	C. za 2625	D. za više od 2700	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
------------------------	---------------	---------------	-----------------------	--

Rješenje:



S obzirom da je pitanje Za koliko je površina trokuta ACD manja od površine četverokuta $ABCD$ trebamo izračunati površinu trokuta ABC . Najjednostavnije ćemo to napraviti ako iz površine četverokuta $CEFG$ izbacimo pravokutne trokute koji okružuju trokut ABC .



$$P_{ABC} = 60 \cdot 110 - \frac{30 \cdot 65}{2} - \frac{45 \cdot 60}{2} - \frac{30 \cdot 110}{2} = 2625. \text{ Točan odgovor je C.}$$

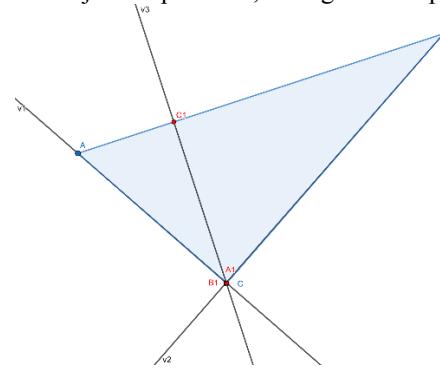
3. Kada trokutu nacrtamo visine i nožišta, što ne možemo dobiti?

A. trokut koji ima ukupno dva različita nožišta	B. trokut koji na svakoj stranici ima nožište	C. trokut koji na dvjema stranicama ima nožište, a jedno nožište izvan trokuta	D. trokut čije je jedno nožište na stranici, a ostala dva su izvan trokuta	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---	---	--	--	------------------------------------

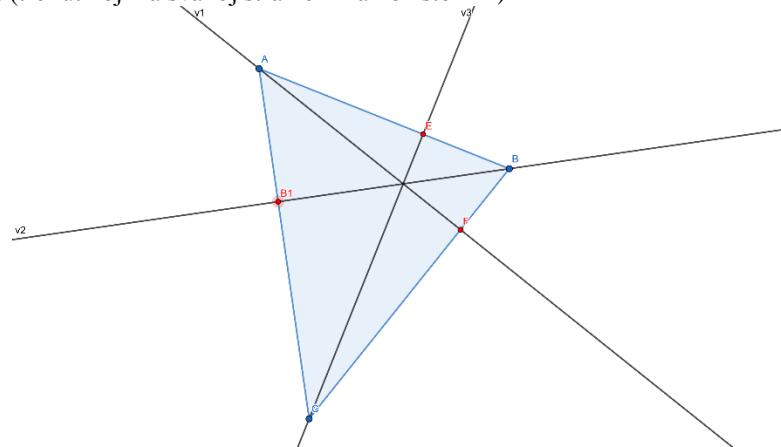
Rješenje:

Pogledajmo visine i nožišta kod različitih vrsta trokuta:

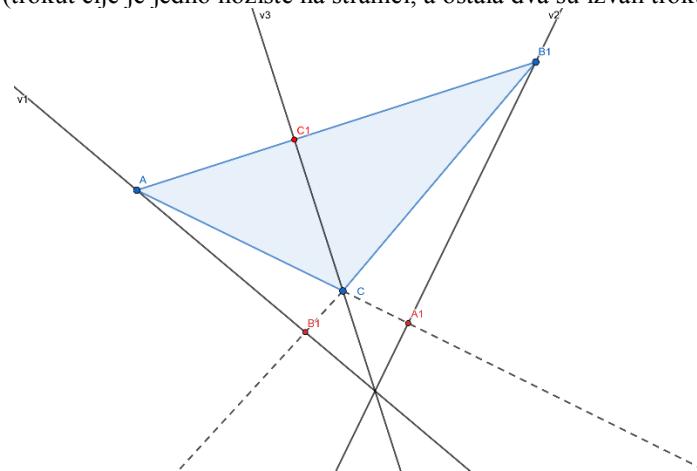
- pravokutan trokut (jedno nožište je na hipotenuzi, a drugo u vrhu pravog kuta - A)



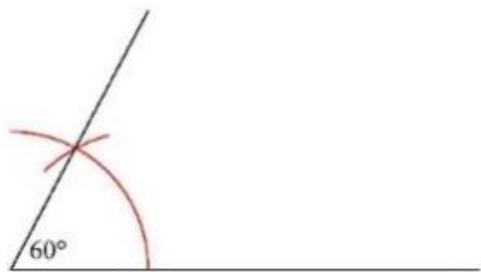
- šiljastokutan trokut (trokut koji na svakoj stranici ima nožište – B)



- tupokutan trokut (trokut čije je jedno nožište na stranici, a ostala dva su izvan trokuta – D)

Točan odgovor je **C**.

4. Prilikom konstrukcije kuta veličine 60° ravnalom i šestarom, moramo šestarom nacrtati dva luka (kao na slici). Koliko najmanje lukova moramo nacrtati ako želimo ravnalom i šestarom konstruirati jednakokračan trokut s kutom veličine 120° i duljinom kraka 3 cm?

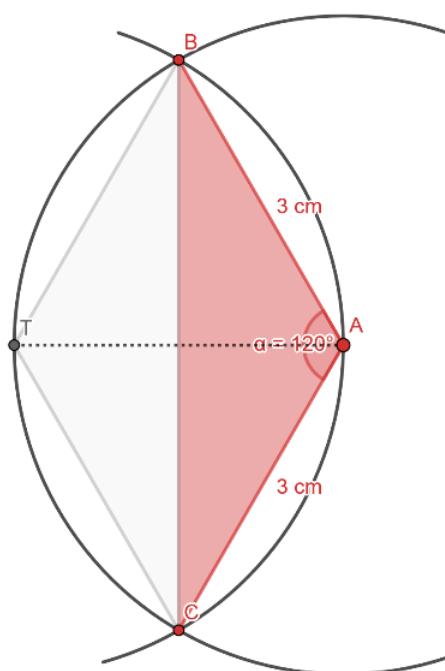


A. 5	B. 4	C. 3	D. ništa od navedenog	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	--------------------------	------------------------------------

Rješenje:

Konstrukcija:

- iz točke T nacrtamo luk polumjera 3 cm,
- na tom luku odaberemo neku točku A i iz nje nacrtamo luk polumjera 3 cm (koji prolazi kroz točku T),
- presječne točke ta dva luka označimo s B i C ,
- trokut ABC je jednakokračan s kutom veličine 120° i duljinom kraka 3 cm.



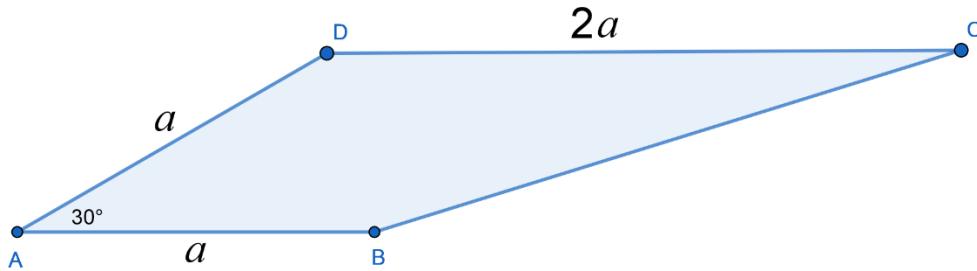
Trebala su nam 2 luka pa je točan odgovor **D**.

5. U trapezu $ABCD$ osnovica \overline{AB} dvostruko je kraća od osnovice \overline{CD} i jednako duga kao krak \overline{AD} . Ako je šiljast kut trapeza uz vrh A veličine 30° , kolika je veličina kuta trapeza uz vrh B ?

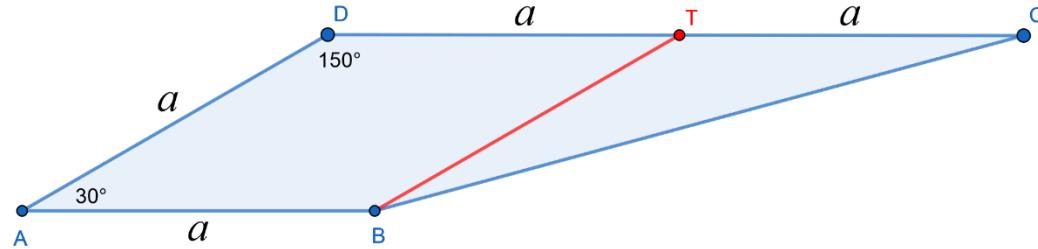
A. 150°	B. 120°	C. 165°	D. 135°	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	---

Rješenje:

Skicirajmo dani trapez:



Da bismo iskoristili činjenicu da je osnovica \overline{AB} dvostruko kraća od osnovice \overline{CD} , označimo polovište dužine \overline{CD} s T i spojimo tu točku s vrhom B .



Četverokut $ABTD$ je romb (jer je \overline{AB} paralelno i jednako dugo kao \overline{DT} i $|AD|=|DT|$). Stoga zaključujemo da je $|BT|=a$ pa je trokut BCT jednakokračan. Veličine kutova uz osnovicu tog trokuta su jednake i njihov zbroj je 30° (tj. jednak veličini kuta DTB), dakle $|\angle CBT|=15^\circ$. Veličina traženog kuta uz vrh B je $15^\circ + 150^\circ = 165^\circ$.

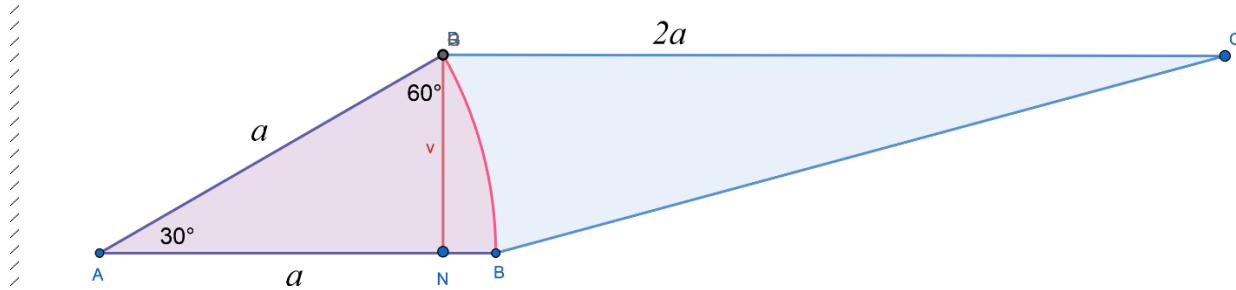
Točan odgovor je **C**.

6. U trapezu $ABCD$ osnovica \overline{AB} dvostruko je kraća od osnove \overline{CD} i jednako duga kao krak \overline{AD} . Šiljasti kut trapeza uz vrh A veličine je 30° . Ako sa središtem u točki A opišemo krug koji prolazi točkom B , koliki smo dio površine trapeza prekrili?

A. $\frac{\pi}{9}$	B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$	C. $\frac{\pi}{10}$	D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------------	--------------------------------	------------------------	--------------------------------	------------------------------------

Rješenje:

Skicirajmo dane podatke:



Da bismo izračunali koliki smo dio površine trapeza prekrili, moramo naći njegovu površinu i površinu kružnog isječka.

Visina trapeza je $\frac{a}{2}$ (kraća kateta trokuta s kutovima 30° - 60° - 90°) pa je površina trapeza

$$P_{ABCD} = \frac{a + 2a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}.$$

Kut kružnog isječka je 30° i polumjer mu je a , stoga je njegova površina $P = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot r^2 \pi = \frac{a^2 \pi}{12}$.

$$\text{Odgovor na pitanje u zadatku je omjer } \frac{P}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2 \pi}{12}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\pi}{9}.$$

Točan odgovor je A.

7. a) Ako je koronavirusom prvi dan zaražena jedna osoba, a znamo da će svaka zaražena osoba tijekom idućeg dana zaraziti još najmanje tri svoja kontakta ukoliko ne poštuje samoizolaciju, koliko će se najmanje osoba zaraziti tijekom petog dana?

A. 64	B. 192	C. 256	D. 81	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	-----------	-----------	----------	------------------------------------

7. b) Ako je koronavirusom prvi dan zaražena jedna osoba, a znamo da će svaka zaražena osoba tijekom idućeg dana zaraziti još najmanje tri svoja kontakta ukoliko ne poštuje samoizolaciju, koji dan će ukupan broj zaraženih prijeći 1 000?

A. 6	B. 7	C. 9	D. 10	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	---------	---------	----------	------------------------------------

7. c) Ako je koronavirusom prvi dan zaražena jedna osoba, a znamo da će svaka zaražena osoba tijekom idućeg dana zaraziti još najmanje tri svoja kontakta ukoliko ne poštuje samoizolaciju, kojeg dana n će ukupan broj zaraženih prijeći m ?

A. $n > \log_3(3m)$	B. $n > \log_4(4m)$	C. $n > \log_3(m)$	D. $n > \log_4(m)$	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
------------------------	------------------------	-----------------------	-----------------------	------------------------------------

Rješenje:

↳ Promotrimo broj zaraženih po danima:

broj dana	broj novozaraženih	ukupan broj zaraženih
1	1	1
2	$1 \cdot 3 = 3$	$1 + 3 = 4$
3	$4 \cdot 3 = 12$	$4 + 12 = 16$
4	$16 \cdot 3 = 48$	$16 + 48 = 64$
5	$64 \cdot 3 = 192$	$64 + 192 = 256$
6	$256 \cdot 3 = 768$	$256 + 768 = 1\,024$
...		
n	$3 \cdot 4^{n-2}$	$3 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-2} = 4^{n-1}$

↳ Iz tablice iščitamo:

- tijekom petog dana će se zaraziti najmanje 192 osobe. Točan odgovor je B.
- ukupan broj zaraženih će prijeći 1 000 šesti dan. Točan odgovor je A.
- iz nejednadžbe $4^{n-1} > m$ slijedi $n > \log_4(m) + 1 = \log_4(4m)$. Točan odgovor je B.

8. Vito se rodio kada je Marin imao onoliko godina koliko Vito ima sada. Te godine Ivan je imao onoliko godina koliko će Vito imati za 8 godina. Ako je ove godine Ivan postao punoljetan, koliko godina ima Marin?

A. 12	B. 7	C. 9	D. 10	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	---------	---------	----------	------------------------------------

Rješenje:

Skicirajmo pregledno dane podatke:

	Vito	Marin	Ivan
prije n godina	0		
sad		x	18
za 8 godina			

Popunimo tablicu vremenskim slijedom:

	Vito	Marin	Ivan
prije n godina	0	$x - n$	$18 - n$
sad	n	x	18
za 8 godina	$n + 8$	$x + 8$	26

Sada ćemo iskoristiti činjenice:

- Vito se rodio kada je Marin imao onoliko godina koliko Vito ima sada, dakle $x - n = n$, tj. $x = 2n$.
- Te godine Ivan je imao onoliko godina koliko će Vito imati za 8 godina, pa je $18 - n = n + 8$ iz čega slijedi da je $n = 5$.

To znači da je $x = 10$. Točan odgovor je **D.**

9. Ako nastavimo ispisivati retke i stupce tablice na slici, koliko ćemo znamenaka ispisati u 135.-om retku (uključujući i prvi stupac zaglavљa tablice)?

	1	2	3	...	9	10
1	1					
2	11	22				
3	111	222	333			
...		
9	111111111	222222222	333333333	...	999999999	
10	111111111	222222222	333333333	...	999999999	101010101010101010

A. 40 095	B. 40 098	C. 39 690	D. 39 693	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
--------------	--------------	--------------	--------------	------------------------------------

Rješenje:

U 135.-om retku tablice nalazit će se:

- u zaglavljtu tablice 3 znamenke (1, 3, 5)
- u prvih 9 stupaca $135 \cdot 9 = 9$ znamenki
- od 10.-og do 99.-og stupca $135 \cdot 90 = 90$ znamenki
- od 100.-og do 135.-og stupca $135 \cdot 36 = 3$ znamenki

Ukupan broj znamenki je 40 098. Točan odgovor je **B.**

10. a) Koliki uređenih parova (m, n) cijelih brojeva zadovoljava jednadžbu $m^2 + n^2 = 25$?

A. 12	B. 8	C. 4	D. 0	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

Zbroj kvadrata dva cijela broje je 25, a to je moguće samo ako zbrajamo $0 + 25$ ili $9 + 16$.

Stoga su rješenja uređeni parovi:

$$(m, n) \in \{(0, -5), (0, 5), (-5, 0), (5, 0), (3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4), (4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)\}$$

Točan odgovor je A.

10. b) Koliko uređenih parova (m, n) cijelih brojeva zadovoljava jednadžbu $m^2 + n^2 = 21 - 4n$?

A. 12	B. 8	C. 4	D. 0	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	---------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje:

Izraz s lijeve strane jednakosti nadopunimo do zbroja kvadrata:

$$m^2 + n^2 + 4n = 21 \Rightarrow m^2 + n^2 + 4n + 4 = 21 + 4 \Rightarrow m^2 + (n+4)^2 = 25$$

Zbroj kvadrata dva cijela broje je 25, a to je moguće samo ako zbrajamo $0 + 25$ ili $9 + 16$.

Stoga vrijedi:

$$(m, n+4) \in \{(0, -5), (0, 5), (-5, 0), (5, 0), (3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4), (4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)\}$$

Rješenja su uređeni parovi:

$$(m, n) \in \{(0, -9), (0, 1), (-5, -4), (5, -4), (3, 0), (3, -8), (-3, 0), (-3, -8), (4, -1), (4, -7), (-4, -1), (-4, -7)\}$$

Točan odgovor je A.

11. Koliko četveroznamenkastih brojeva a zadovoljava jednakost $1325 \cdot a = 7 \cdot b \cdot b$ za neki prirodni broj b ?

A. 17	B. 4	C. 16	D. 5	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	---------	----------	---------	------------------------------------

Rješenje:

- Broj 1325 rastavimo na proste faktore. Tada vrijedi: $5 \cdot 5 \cdot 53 \cdot a = 7 \cdot b \cdot b$.
- Broj s desne strane jednakosti je umnožak broja 7 i kvadrata prirodnog broja, pa i broj s lijeve strane jednakosti moramo moći zapisati u tom obliku. Odатле zaključujemo:
 - a je djeljiv sa 7
 - a mora biti djeljiv i s 53 da bi broj s lijeve strane mogli zapisati u obliku $7b^2$.
 Dakle, $a = 7 \cdot 53 \cdot k^2 = 371 \cdot k^2$, pri čemu je k prirodan broj.
- S obzirom da tražimo koliko četveroznamenkastih brojeva a zadovoljava dano svojstvo, to su brojevi:
 - 371 · 4 = 1484, 371 · 9 = 3339, 371 · 16 = 5936 i 371 · 25 = 9275. Točan odgovor je **B.**

12. Ivan je zamislio šesteroznamenkasti broj manji od 500 000 kojem je prva znamenka slijeva parna. Znamenke tog broja različite su. Znamenka desettisućice dvostruko je veća od znamenke jedinice i trostruko veća od znamenke desetice. Zbroj znamenaka tisućice i stotice je 8. Koliki je zbroj svih znamenaka tog šesteroznamenkastog broja?

A. 25	B. 22	C. 23	D. 15	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	----------	----------	----------	------------------------------------

Rješenje:

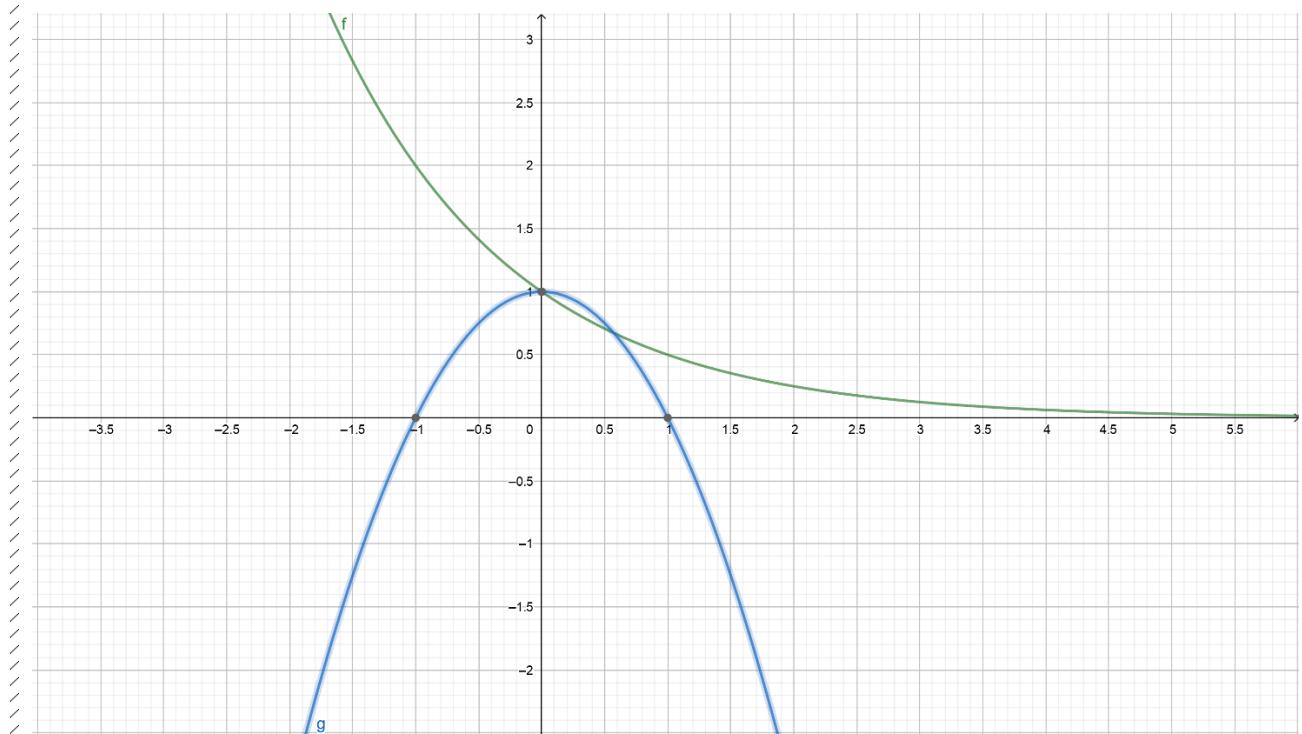
- Razmotrimo dane podatke:
 - broj manji od 500 000 kojem je prva znamenka slijeva parna, dakle ona može biti 2 ili 4,
 - znamenka desettisućice dvostruko je veća od znamenke jedinice i trostruko veća od znamenke desetice iz čega zaključujemo da znamenka desettisućice mora biti djeljiva sa 6. Jedina znamenka djeljiva sa 6 je 6, što znači da je znamenka jedinice 3, a znamenka desetice 2.
 - znamenke tog broja različite su pa prva znamenka tog broja mora biti 4.
- Zaključili smo da je traženi broj oblika $46ab23$. Zbroj znamenaka tisućice i stotice jednak je 8 pa vrijedi $a + b = 8$.
- Primijetimo da postoji nekoliko brojeva koji zadovoljavaju dana svojstva (460823, 461723, 467123 i 468023), ali svima je zbroj znamenaka jednak $4 + 6 + 8 + 2 + 3 = 23$.
- Točan odgovor je **C.**

13. Koliko pozitivnih rješenja ima jednadžba $2^{-x} + x^2 = 1$?

A. više od 2	B. 2	C. 1	D. 0	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------	---------	---------	---------	--

Rješenje:

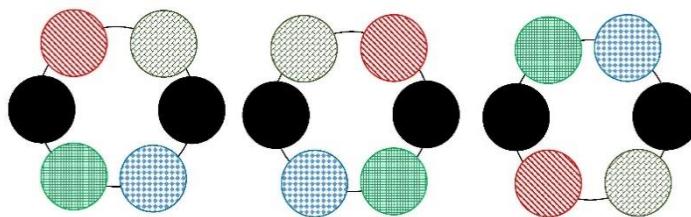
Danu jednadžbu zapišimo u obliku $2^{-x} = 1 - x^2$ i riješimo grafički.



Samo je jedno pozitivno rješenje dane jednadžbe.

Točan odgovor je **C.**

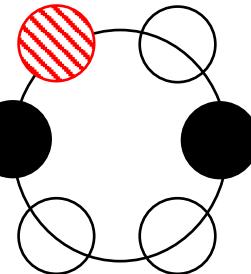
14. Marica želi nanizati ogrlicu od dviju jednakih crnih i četiriju različitih šarenih perli. Na koliko načina to može napraviti ako želi da su crne perle jedna nasuprot drugoj? Napomena: ogrlicu možemo okrenuti i prevrnuti pa su rasporedi na slici jednaki.



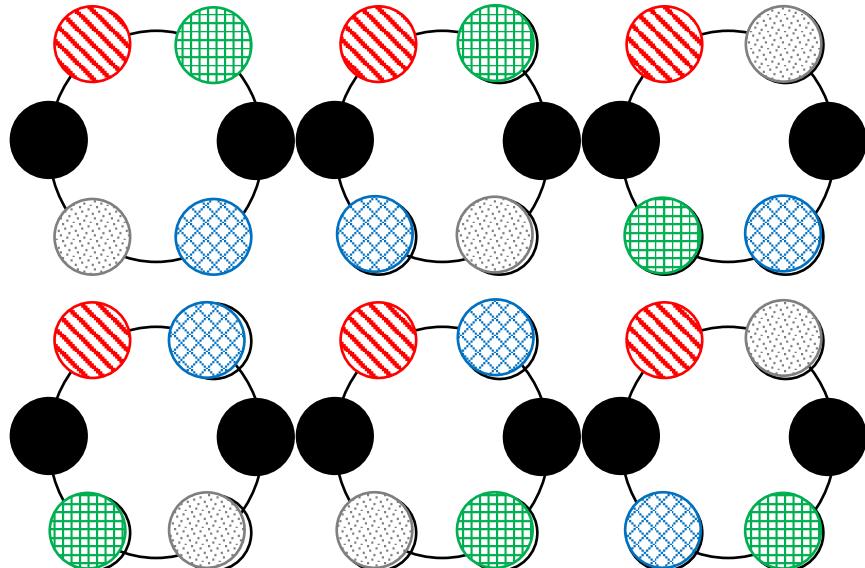
A. 8	B. 12	C. 6	D. 24	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	----------	---------	----------	--

Rješenje:

S obzirom da ogrlicu možemo okrenuti i prevrnuti sigurno je možemo dovesti u položaj gdje su crne perle lijevo i desno (moraju biti nasuprotne). Osim toga uočimo crvenu perlu i postavimo ogrlicu u položaj na slici:



Preostale tri boje tada možemo složiti na 6 načina:



Točan odgovor je C.

15. Zbroj je svaka tri uzastopna polja 2020. Koliki je zbroj znamenaka broja koji se nalazi u desetom polju?

		111				555							
--	--	-----	--	--	--	-----	--	--	--	--	--	--	--

A. 15	B. 18	C. 13	D. ništa od navedenog	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------	----------	----------	-----------------------	------------------------------------

Rješenje:

Da bismo jednostavnije objasnili rješenje zadatka, uvedimo oznake kao na slici:

		111	A	B	C	D	555	E	F =?				
--	--	-----	---	---	---	---	-----	---	---------	--	--	--	--

Vrijedi $111 + A + B = 2020$ iz čega slijedi da je $A + B = 1909$.

Ali i $A + B + C = 2020$ pa zaključujemo da je $1909 + C = 2020$, tj $C = 111$.

Jer je $C + D + 555 = 2020$, dobivamo da je $D = 2020 - 111 - 555 = 1354$.

		111	A	B	111	1354	555	E	F				
--	--	-----	---	---	-----	------	-----	---	---	--	--	--	--

Sada lako izračunamo sva preostala polja. Očito se brojevi 111, 1354 i 555 ponavljaju periodički. Na desetom polju nalazit će se broj 1354. Njegov zbroj znamenaka je $1 + 3 + 5 + 4 = 13$.

Točan odgovor je **C**.

