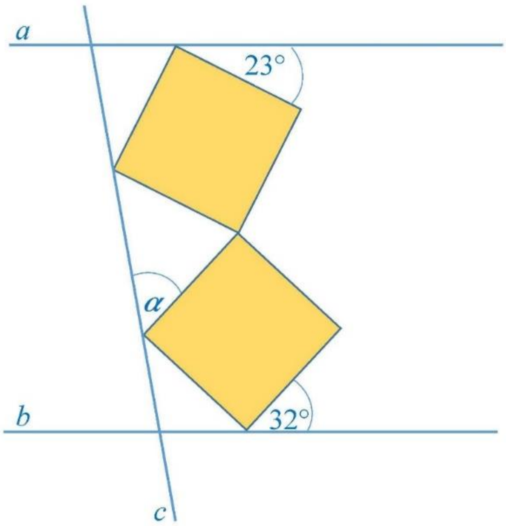
Jesensko kolo 2021./2021.

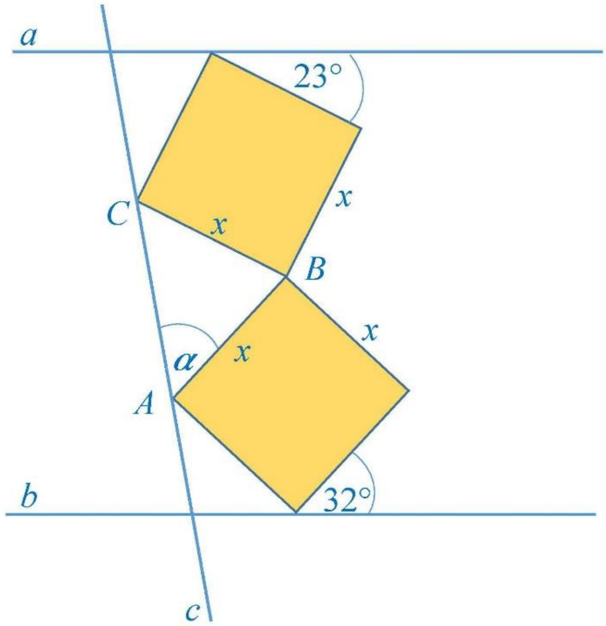
1. Na slici pravci a i b usporedni su, a kvadrati sukladni. Koliki je α ?



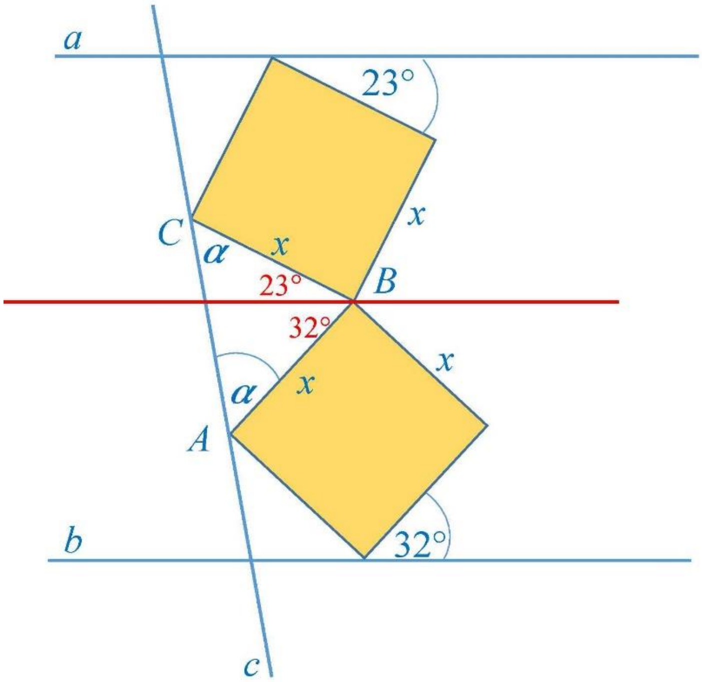
A. 65°	**B.** 62°30′	**C.** 60°	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

S obzirom da su kvadrati sukladni, trokut *ABC* je jednakokračan.



Povucimo paralelu s pravcima *a* i *b* točkom *B*. Sada imamo kutove s paralelnim kracima pa vrijedi:



Zbrojimo kutove u trokutu *ABC*.

$$2\,\alpha + 23° + 32° = 180°,$$

Dobivamo da je $\alpha = 62°30'$.

Točan odgovor je B.

2. Koliki je polumjer opisane kružnice jednakokračnog trokuta kojem je duljina osnovice i duljina visine na osnovicu 4 cm?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2.5 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$\sqrt{5}$ cm	ništa od navedenog	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Skicirajmo jednakokračan trokut *ABC* sa središtem trokutu opisane kružnice (sjecište simetrala stranica).

$a = v_a = 4$ cm

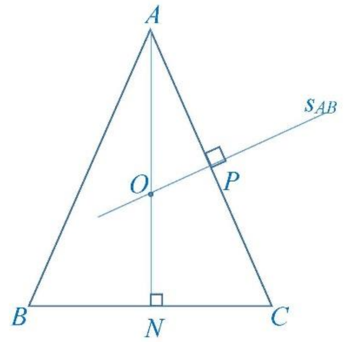
$$\Rightarrow\ |AC| = b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$$

Trokuti *ANC* i *APO* su slični (po KK), pa su duljine stranica proporcionalne.

$$\frac{|AO|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AN|}$$

$$\Rightarrow\ \frac{R}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{v_a} \quad \Rightarrow\ \frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow\ R = \frac{5}{2}\ \text{cm}$$

Točan odgovor je A.



3. Koliko su udaljena središta upisane i opisane kružnice jednakokračnog trokuta kojem je duljina osnovice i duljina visine na osnovicu 4 cm?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\frac{1}{2}-\sqrt{5}$ cm	$\frac{5}{2}-\sqrt{3}$ cm	$\frac{5}{2}-\sqrt{5}$ cm	ništa od navedenog	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Polumjer upisane kružnice trokutu *ABC* naći ćemo iz površine.

$$P = \frac{av_a}{2} = 8\,\text{cm}^2,$$

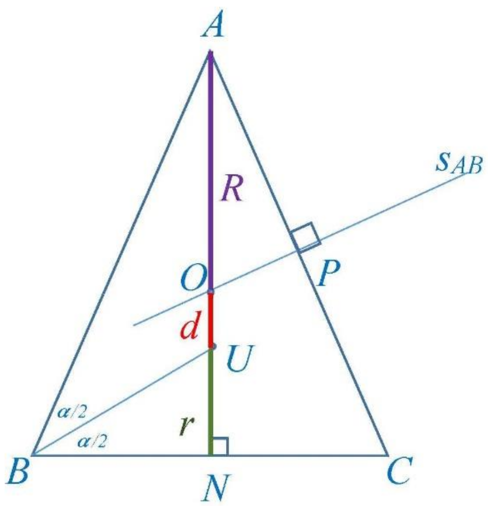
$$P = rs \quad \Rightarrow \quad r = \frac{P}{s} = \frac{8}{\frac{1}{2}\left(4+4\sqrt{5}\right)} = \sqrt{5}-1\ \text{cm}$$

Polumjer *R* opisane kružnice izračunali smo u zadatku 2.

$$R + r = \frac{5}{2} + \sqrt{5} - 1 = \frac{3}{2} + \sqrt{5} > 4 = v_a$$

$$d = v_a - (R + r) = 4 - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{5}\right) = \frac{5}{2} - \sqrt{5}\ \text{cm}$$

Točan odgovor je C.

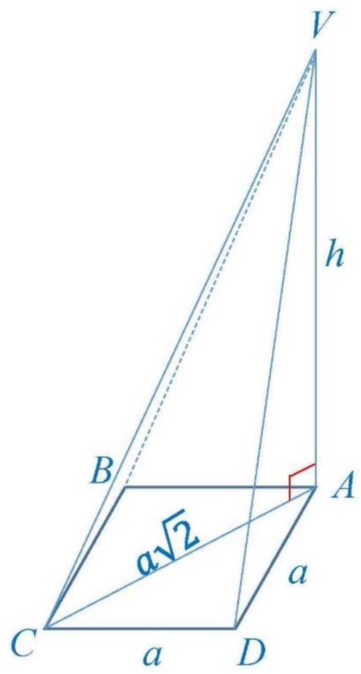


4. Baza je piramide *ABCDV* kvadrat *ABCD*. Ortogonalna projekcija vrha *V* na ravninu baze je točka *A*. Ako je duljina visine piramide dvostruko veća od duljine osnovnog brida, koliki je kosinus kuta što ga zatvaraju bočni bridovi $\overline{CV}$ i $\overline{DV}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{30}}{6}$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Skicirajmo danu piramidu.

Kosinus kuta što ga zatvaraju bočni bridovi $\overline{CV}$ i $\overline{DV}$ naći ćemo iz trokuta *CDV* nakon što izračunamo duljine bridova $\overline{CV}$ i $\overline{DV}$.



Iz pravokutnog trokuta *DAV* slijedi:

$$|DV| = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

Iz pravokutnog trokuta *CAV* slijedi:

$$|CV| = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{2a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{6}$$

Iz trokuta *CDV* kosinusovim poučkom dobivamo:

$$a^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2 + \left(a\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{6} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(a\sqrt{5}\right)^2 + \left(a\sqrt{6}\right)^2 - a^2}{2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{6}} = \frac{10a^2}{2\sqrt{30}a^2} = \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Točan odgovor je C.

5. Baza piramide *ABCDEFV* pravilni je šesterokut *ABCDEF*. Ortogonalna projekcija vrha *V* na ravninu baze je točka *A*. Ako je duljina visine piramide dvostruko veća od duljine osnovnog brida, koliki je kosinus kuta što ga zatvaraju bočni bridovi $\overline{EV}$ i $\overline{FV}$?

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{13\sqrt{7}}{70}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{11\sqrt{35}}{70}$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Skicirajmo danu piramidu.

Kosinus kuta što ga zatvaraju bočni bridovi $\overline{EV}$ i $\overline{FV}$ naći ćemo iz trokuta *EVF* nakon što izračunamo duljine bridova $\overline{EV}$ i $\overline{FV}$.

Iz pravokutnog trokuta *FAV* sijedi:

$$|FV| = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

Iz pravokutnog trokuta *EAV* sijedi:

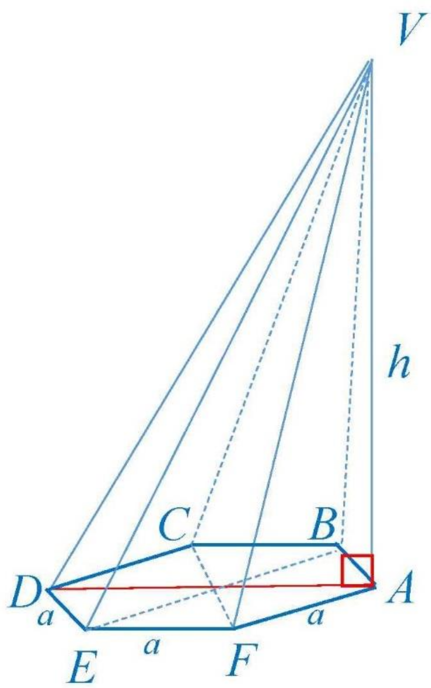
$$|EV| = \sqrt{(2v_a)^2 + h^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$$

Iz trokuta *EVF* kosinusovim poučkom dobivamo:

$$a^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2 + \left(a\sqrt{7}\right)^2 - 2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{7} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(a\sqrt{5}\right)^2 + \left(a\sqrt{7}\right)^2 - a^2}{2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{7}} = \frac{11a^2}{2\sqrt{35}a^2} = \frac{11}{2\sqrt{35}} = \frac{11\sqrt{35}}{70}$$

Točan odgovor je C.



6. Ako je $\sin x \cdot \cos x = b$, koliko je $\sin^4 x + \cos^4 x$?

A.	B.	C.	D.	E.
$1+2b^2$	$1-2b$	$1+2b$	$1-2b^2$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje:

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2\left(\sin x \cdot \cos x\right)^2 \\ &= 1 - 2b^2\end{aligned}$$

Točan odgovor je D.

7. Koliko rješenja jednadžbe $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$ zadovoljava nejednadžbu $x^2<9$?

A. manje od 4	**B.** 4	**C.** 5	**D.** više od 5	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: $x^2<9 \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow -3<x<3$

$$2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0 \Rightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow 3x=\pi+2k\pi \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$$

ili $$3x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow 3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x_2=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Pogledajmo koja rješenja zadovoljavaju uvjet $-3<x<3$.

$$-3<\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi<3 \Rightarrow -9<\pi+2k\pi<9 \Rightarrow -9-\pi<2k\pi<9-\pi \Rightarrow -\frac{9+\pi}{2\pi}<k<\frac{9-\pi}{2\pi} \Rightarrow k\in\{-1,0\}$$

$$-3<-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi<3 \Rightarrow -27<-\pi+6k\pi<27 \Rightarrow -27+\pi<6k\pi<27+\pi \Rightarrow -\frac{27-\pi}{6\pi}<k<\frac{27+\pi}{6\pi} \Rightarrow k\in\{-1,0,1\}$$

Točan odgovor je C.

8. Koliko rješenja jednadžbe $4\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-4\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+5=0$ zadovoljava nejednadžbu $x^2<9$?

A. manje od 4	**B.** 4	**C.** 5	**D.** više od 5	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: $4\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-4\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+5=0 \Rightarrow 4\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-4\left(1-\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+5=0$

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=t \Rightarrow 4t-4\left(1-t^2\right)+5=0 \Rightarrow 4t^2+4t+1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, što je riješeno u zadatku 7.

Točan odgovor je C.

9. Koliko cijelih brojeva x zadovoljava nejednakost $\frac{(x^4-10x^2+9)(\log^2 x^2+1)}{(\sin 3x-1)(\cos \pi x+1)} \ge 0$?

A.	B.	C.	D.	E.
beskonačno	3	6	2	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje: Početni uvjeti:

1) $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

2) $\sin 3x - 1 \neq 0 \Rightarrow \sin 3x \neq 1 \Rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos \pi x + 1 \neq 0 \Rightarrow \cos \pi x \neq -1 \Rightarrow \pi x \neq \pi + 2k\pi \Rightarrow x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ x ne može biti neparan cijeli broj

Primijetimo da je za sve x iz uvjeta:

$\log^2 x^2 = (\log x^2)^2 \ge 0$

$\sin 3x \in [-1, 1\rangle \Rightarrow \sin 3x - 1 \in [-2, 0\rangle \Rightarrow \sin 3x - 1 < 0$

$\cos \pi x \in \langle -1, 1] \Rightarrow \cos \pi x + 1 \in \langle 0, 2] \Rightarrow \cos \pi x + 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{\log^2 x^2 + 1}{(\sin 3x - 1)(\cos \pi x + 1)} \le 0$$

Dakle, mora biti $x^4 - 10x^2 + 9 \le 0$.

$$x^4 - 10x^2 + 9 \le 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) \le 0 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 9 \Rightarrow 1 \le |x| \le 3$$

Kako želimo prebrojati samo cjelobrojna rješenja $\Rightarrow$ $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Ali, početne uvjete 1) i 3) zadovoljavaju samo $x \in \{-2, 2\}$.

Točan odgovor je D.