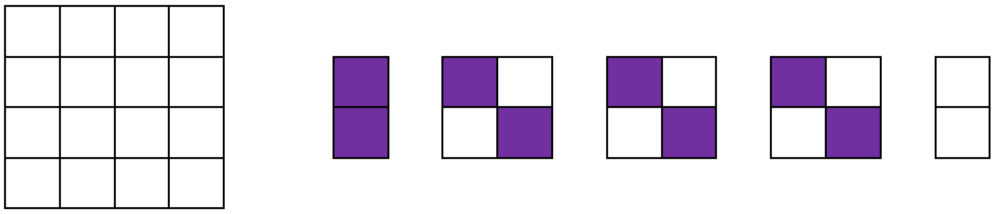
Jesensko kolo 2022./2023.

1. Bijela ploča, nacrtana lijevo dolje, pričvršćena je na zid i ne može se okretati. Petar je želi prekriti s 5 pločica, nacrtanih desno: ljubičastom i bijelom koje sadrže dva kvadrata te s tri kvadratne ploče koje sadrže po dva ljubičasta i dva bijela kvadrata. Kvadrati na ploči na zidu i na četiri pločice jednako su veliki. Koliko različitih uzoraka Petar može napraviti?

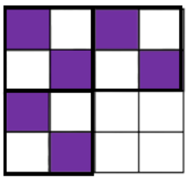


A. 128	**B.** 6	**C.** 96	**D.** 192	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

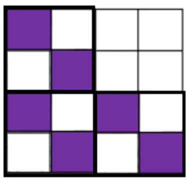
Rješenje

Nacrtajmo najprije sve moguće položaje kvadratnih ploča.

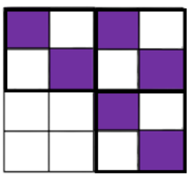
1.



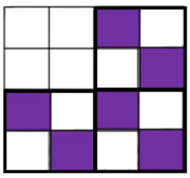
2.



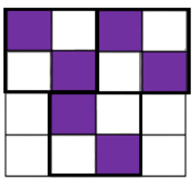
3.



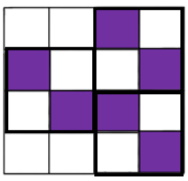
4.



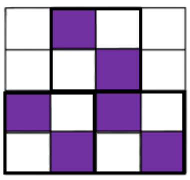
5.



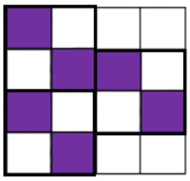
6.



7.

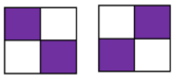


8.



U prva četiri slučaja ljubičastu i bijelu pravokutnu pločicu možemo položiti uspravno na 2 načina i vodoravno na 2 načina što je ukupno 4 načina.

Svaku kvadratnu pločicu možemo položiti na dva načina: tako da gornji lijevi kvadratić pločice bude ljubičasti ili bijeli.



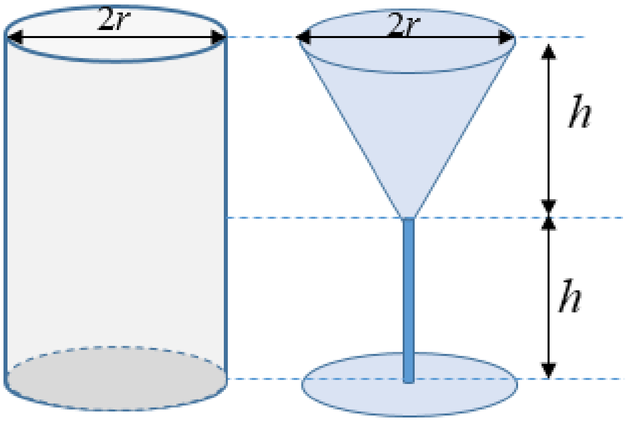
Iz navedenog slijedi da za svaki od prva tri slučaja postoji $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ moguća rasporeda.

U 5., 6., 7. i 8. slučaju pravokutne pločice mogu stajati ili uspravno ili vodoravno pa je broj mogućih rasporeda za svaki od tih slučajeva dva puta manji no u prva četiri slučaja, odnosno ima ih 16.

Zbrojimo li sve navedeno dobivamo $4 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 192$ rasporeda.

Točan odgovor je D.

2. Tekućinu iz boce u obliku valjka konobar želi uliti u čaše u obliku stošca (kao na slici). Ako je boca bila puna tekućine, koliko će čaša konobar napuniti?



A. 3	**B.** 4	**C.** 6	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

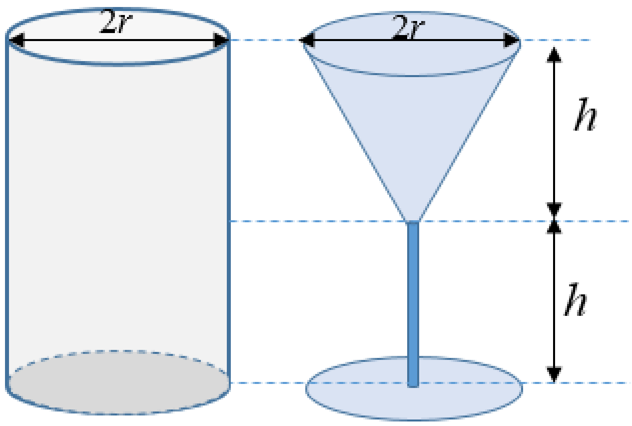
Uočimo da valjak i stožac imaju sukladne baze površine B, a visina valjka dva je puta veća od visine stošca označene h. Za njihove volumene vrijedi:

$$V_{\text{valjka}} = B \cdot 2h = 2Bh$$
$$V_{\text{stošca}} = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{1}{3}Bh$$

Tako je volumen boce jednak $6 \cdot \frac{1}{3}Bh$, odnosno 6 volumena čaše pa konobar može napraviti 6 čaša.

Točan odgovor je C.

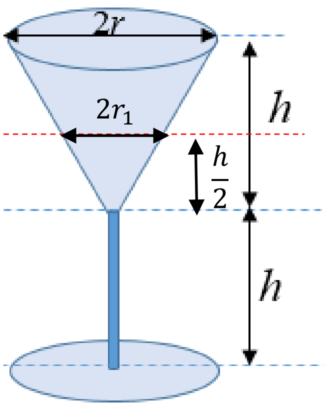
3. Tekućinu iz boce u obliku valjka konobar želi uliti u čaše u obliku stošca (kao na slici). Ako je boca bila puna tekućine, a čaše puni samo do polovice njihove visine, koliko će čaša konobar napuniti?



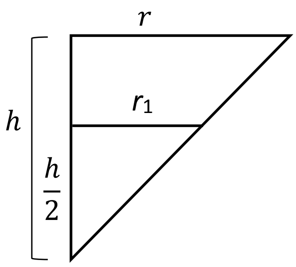
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
12	6	48	24	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Uočimo da valjak i stožac imaju sukladne baze površine B, a visina valjka dva je puta veća od visine stošca. Konobar čaše puni do polovice njihove visine.



Da bismo izračunali volumen tekućine u čaši potrebno je izračunati radijus r_1.



$$h : \frac{h}{2} = r : r_1$$

$$r_1 = \frac{r}{2}$$

Označimo površinu baze stošca kojeg ispuni tekućina s B_s, a volumen s V_s.

$$B_s = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi = \frac{r^2}{4}\pi = \frac{1}{4}B$$

$$V_s = \frac{1}{3}B_s \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}B \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{24}Bh$$

$V_s = \frac{1}{24}V$, pri čemu je V volumen valjka visine h.

Ako je volumen do pola ispunjene čaše jednak $\frac{1}{24}$ volumena boce, onda se s tekućinom iz boce iste visine mogu do pola napuniti 24 čaše, a s tekućinom iz boce dvostruko veće visine 48 čaša.

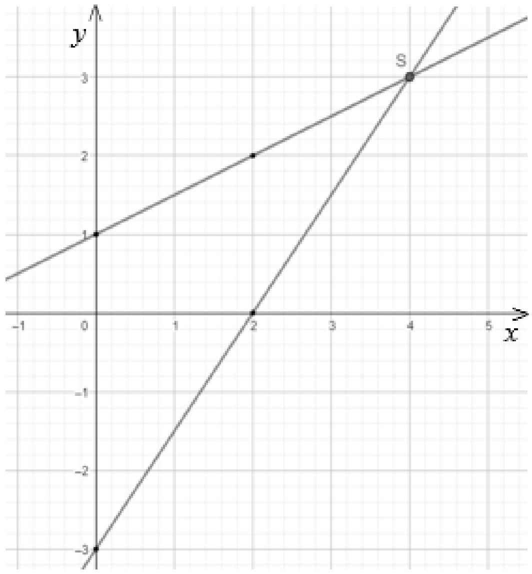
Točan odgovor je C.

4. Kolika je površina četverokuta što ga pravci $x - 2y + 2 = 0$ i $3x - 2y - 6 = 0$ u prvom kvadratnu zatvaraju s koordinatnim osima?

A. 3	**B.** 4	**C.** 5	**D.** 6	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Nacrtajmo pravce u koordinatnoj ravnini.



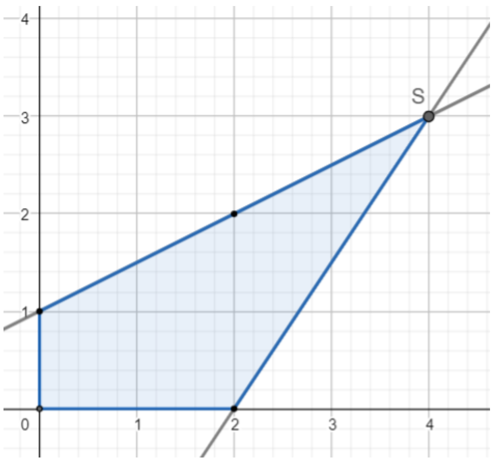
Računski provjerimo koordinate sjecišta pravaca.

$$\begin{array}{l} \ \ x - 2y + 2 = 0 \\ \underline{3x - 2y - 6 = 0} \quad - \\ -2x \qquad + 8 = 0 \\ 2x = 8 \\ x = 4 \end{array}$$

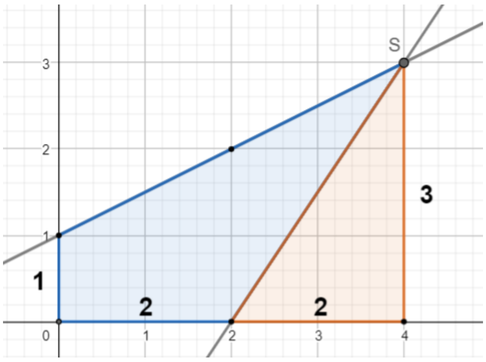
$$\begin{array}{l} 4 - 2y + 2 = 0 \\ \quad -2y = -6 \\ \qquad y = 3 \end{array}$$

$S(4,3)$

Trebamo odrediti površinu četverokuta na slici.



Nadopunimo li nacrtani četverokut do trapeza prikazanog na slici dolje, površinu zadanog četverokuta izračunat ćemo kao razliku površina trapeza i narančastog trokuta.



$P = P_{\text{trapeza}} - P_{\text{trokuta}}$

$P = \dfrac{1+3}{2} \cdot 4 - \dfrac{2 \cdot 3}{2}$

$P = 5$

Točan odgovor je C.

5. Prirodan broj n pri dijeljenju s 2, 4 i 11 daje isti ostatak 1. Ako je $111 < n < 1\,111$, koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n s tim svojstvom?

A. 14 191	**B.** 14 680	**C.** 13 574	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Ako prirodni broj n pri dijeljenju s 2, 4 i 11 daje ostatak 1, onda je njegov prethodnih $n-1$ djeljiv s 2, 4 i 11.
Broj djeljiv s 4 je djeljiv i s 2, stoga tražimo brojeve $n-1$ koji su djeljivi s 4 i djeljivi s 11, a to znači djeljivi s 44.
S obzirom na to da vrijedi $111 < n < 1111$, pogledajmo koji je najmaji, a koji najveći broj za kojeg vrijede navedena svojstva.

$$111 = 2 \cdot 44 + 23$$

Dakle, prvi broj veći od 111 djeljiv s 44 jednak je $3 \cdot 44$.
Tako je najmanji broj n koji je veći od 111 jednak $3 \cdot 44 + 1$.

$$1111 = 25 \cdot 44 + 11$$

Zadnji broj manji od 1111 djeljiv s $44 = 25 \cdot 44$.
Najveći broj n manji od 1111 je $25 \cdot 44 + 1$.
Dakle, brojevi n koji pri dijeljenju 2, 4 i 11 imaju ostatak 1, a pri tome su veći od 111, a manji od 1111 su redom:

$$3 \cdot 44 + 1,\ 4 \cdot 44 + 1,\ 5 \cdot 44 + 1, \ldots,\ 25 \cdot 44 + 1.$$

Odredimo njihov zbroj.

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 44 + 1 + 4 \cdot 44 + 1 + 5 \cdot 44 + 1 + \cdots + 25 \cdot 44 + 1 \\
&= (3 + 4 + 5 + \cdots + 25) \cdot 44 + 23 \cdot 1 \\
&= 322 \cdot 44 + 23 \\
&= 14191
\end{aligned}$$

Točan odgovor je A.

6. Funkcije f i g zadane su tablično. Koliko je $(f^{-1} \circ g)(3)$?

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	1	5	2	4
$g(x)$	4	2	1	3	5

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
1	2	3	4	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Raspišimo zadanu kompoziciju funkcija.

$$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}[g(3)]$$

Vrijednost funkcije $g(x)$ za $x = 3$ očitavamo iz tablice. Uvrštavanjem vrijednosti funkcije $g(3) = 1$ u gornji izraz dobivamo $f^{-1}(1)$. Odrediti vrijednost $f^{-1}(1)$ znači odrediti x za koji vrijedi: $f(x) = 1$.

Iz zadane tablice slijedi: $x = 2$.

Točan odgovor je B.