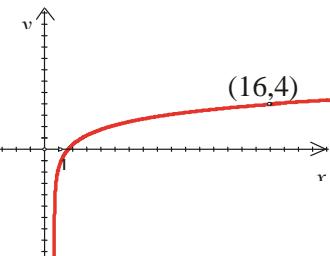


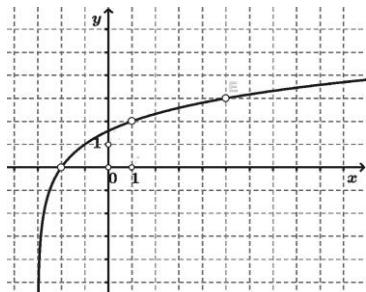
8.6. LOGARITAMSKA FUNKCIJA

GRAF LOGARITAMSKE FUNKCIJE

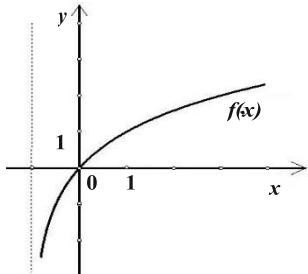
1. (2014.) Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \log_2 x$.
2. Na slici je prikazan graf funkcije $f(x) = \log_b x$. Odredite b .



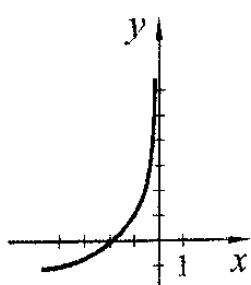
3. (2017.) Graf funkcije $f(x) = \log_b(x + a)$ prikazan je na slici. Odredite vrijednosti cijelih brojeva a i b .



4. (2010.) Graf koje funkcije je prikazan na slici?



- A. $f(x) = \frac{2}{3}x$
 - B. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$
 - C. $f(x) = 2^{1+\frac{x}{3}} - 2$
 - D. $f(x) = \log_2(x+1)$
5. Na slici je prikazan graf funkcije



- A. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 1$
- B. $f(x) = -\log_2(x+1)$
- C. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$
- D. $f(x) = \log_2(1-x)$

6. (2018.) Koja je od navedenih funkcija padajuća?

- A. $f(x) = -\log_2 x$
 B. $f(x) = -\log_{0.5} x$
 C. $f(x) = \log_{1.5} x$
 D. $f(x) = \log_4 x$

SVOJSTVA LOGARITAMSKE FUNKCIJE

7. (2012.) Koja je tvrdnja netočna?

- A. $\log_2 9 = 3.1699\dots$
 B. $\sin(47^\circ 15') = 0.7343\dots$
 C. $\left|\frac{5}{3} : \frac{1}{2} - 5\right| = 1.666\dots$
 D. $2 \cdot 10^{0.34} = 2.7692\dots$

8. (2012.) Koliko je $\frac{\log_2 3 + \log_2 6}{\log_2 9}$ zaokruženo na četiri decimalne?

- A. 1.3155 B. 1.5000 C. 2.0000 D. 2.4004

9. (2012.) Koja jednakost povezuje x, y, z ako je $\log_x y = z$, gdje je $x, y > 0$ i $x \neq 1$?

- A. $x^y = z$ B. $x^z = y$ C. $y^z = x$ D. $z^x = y$

10. (2014.) Pojednostavljte $\frac{\log_2(\sqrt{a})}{\log_2(a^k)}$.

11. Čemu je jednako $\log_2 \frac{4}{2^{x+1}}$?

- A. $-x-3$ B. $-x+1$
 C. $2+(x+1)^{-1}$ D. $2(x+1)^{-1}$

12. Ako je $\log_a x = s$ i $\log_a y^2 = t$, koliko je $\log_a \frac{x}{y}$?

- A. $\frac{s}{t}$ B. $\frac{s-t}{2}$ C. $s-\frac{t}{2}$ D. $\sqrt{s}-\frac{t}{2}$

13. (2011.) Ako je $\log_a 2 = x$ i $\log_a 3 = y$, koliko je $\log_a 24$?

- A. $3+x$ B. $3+y$ C. $3x+y$ D. $x+3y$

14. Izraz $\log_2 4a + \log_2 2a^2$ jednak je:

- A. $3+3\log_2 a$ B. $2a+2$
 C. $4+3\log_2 a$ D. $4a+3$

15. (2016.) Napišite izraz $\frac{1}{\log_5 a^2}$ s pomoću logaritma po bazi a .

16. (2013.) Čemu je jednako $\log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{x}$, pri čemu je $b > 0, b \neq 1, x > 0, x \neq 1$?

- A. $-\log_b x$ B. $-\log_x b$ C. $\log_b x$ D. $\log_x b$

LOGARITAMSKA JEDNADŽBA

17. (2018.) Ako je $3^x = 4$, koliko je 3^{x+2} ?
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
18. (2015.) Riješite jednadžbu $4^{x+1} = 12$.
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
19. (2010.) Riješite jednadžbu $\log_3(x-3) = -2$.
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
20. Za neki realan broj x vrijedi da je $\log_3 x = 2$. Koliko je tada $\log_x 9$?
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
21. (2016.) Ako je $27^m = 8$, koliko je 9^m ?
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
22. (2015.) Koliko je x ako je $\log_x 8 = -\frac{1}{3}$?
 A. $x = \frac{y}{8}$ B. $x = y-3$
 C. $x = \log(y+3)$ D. $x = 2^{\frac{8}{y}}$
24. (2014.) Čemu je jednak x ako je
 $\log x = \log a + \log b - \log c$ gdje su a, b, c pozitivni brojevi?
 A. $x = \frac{a+b-c}{abc}$ B. $x = \frac{a+b+c}{abc}$
25. (2013.) Koja od navedenih jednadžbi ima rješenje u skupu $\langle 1,3 \rangle$?
 A. $\frac{2-x}{3} + \frac{1}{2} = 2x$ B. $5^{x-3} = 0.2$
 C. $\log_2 x = -3$ D. $(x-5)^2 = 0$
26. (2014.) Zadane su četiri jednadžbe $\frac{2x+4}{5} = 1$,
 $x^2 - 3 = 0$, $2^{x+1} = \frac{1}{4}$, $\log_2 x = 3$. Koliko jednadžba ima rješenje koje pripada skupu **prirodnih** brojeva?
 A. samo jedna B. točno dvije
 C. točno tri D. sve četiri
27. (2010.) Koja od slijedećih jednadžbi ima rješenje u skupu cijelih brojeva?
 A. $x^2 + x + 2 = 0$ B. $|2x - 3| = 2$
 C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} = \frac{1}{8}$ D. $\log_7 x = -1$
28. (2011.) Koja od navedenih jednadžbi ima barem jedno rješenje koje **nije** racionalan broj?
 A. $2x^3 - 3x^2 = 2x - 3$ B. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
 C. $\cos(\pi x) = 1$ D. $\log x^2 - \log x = \log 100$
29. (2013.) Kojoj je od navedenih jednadžbi rješenje cijeli broj?
 A. $|x+1.5| = 1$ B. $\frac{2x-1}{3x-1} = \frac{2x}{3x+1}$
 C. $\sqrt{x^2 + 2x - 7} = x$ D. $\log_3(5x+4) = 0$

30. (2011.) Koja od sljedećih jednadžbi ima rješenje u skupu prirodnih brojeva?

- A. $(x+2)(x+5) = 0$ B. $|2x+3| = 2$
 C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} = \frac{1}{4}$ D. $\log(x-3) = 1$

31. (2012.) Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x) = \log_2(x+2) + 1$ siječe koordinatne osi.

- A. $\left(-\frac{3}{2}, 0\right), (0, 1)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, 0\right), (0, 2)$
 C. $\left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 1)$ D. $\left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 2)$

32. (2013.) Koji je realan broj x rješenje jednadžbe $\log_a b + \log_a x = 2$, gdje je $a > 0, a \neq 1, b > 0$?

- A. $x = \frac{a^2}{b}$ B. $x = \frac{b^2}{a}$ C. $x = \frac{2a}{b}$ D. $x = \frac{2b}{a}$

33. Riješite jednadžbu $\log_2(x+3) + \log_2(x+2) - 1 = 0$.

34. (2015.) Riješite jednadžbu $\log_5(x+4) - \log_5 x = 2$.

35. (2012.) Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 2 + \log_2(2x-3)$?

- A. nijedno B. jedno C. dva D. tri

36. Umnožak rješenja jednadžbe $\log^2 x - \log x^2 - 8 = 0$ iznosi

- A. 100 B. 10 C. 0.01 D. 1

37. Koliko rješenja ima jednadžba $\log x = x - 10$?

SUSTAV JEDNADŽBI

38. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} y-2 = \log_3 x \\ x+3^y = 10 \end{cases}$.

39. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} \log_{\sqrt{5}}(y-x) = 2 \\ 5^x \cdot 2^y = 3200 \end{cases}$.

40. (2011.) Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} \log_5(8x) = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{cases}$.

41. (2016.) Riješite sustav jednadžba $\begin{cases} \log(3x+z) = 1 \\ 5^{x-y} = 0.04 \\ y+3z = 0 \end{cases}$.

42. (2016.) Što od navedenoga vrijedi za brojeve x, y ako je (x, y) rješenje zadanih sustava $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 \\ 3 \cdot 3^x - 27^y = 0 \end{cases}$ jednadžba?

- A. $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$ B. $x - y = \frac{11}{3}$
 C. $x \cdot y = 3$ D. $x + y = 4$

LOGARITAMSKA NEJEDNADŽBA

43. (2018.) Riješite nejednadžbu $\log_4 x < \frac{1}{2}$.
44. (2011.) Riješite nejednadžbu $\log(x-2) > 1$.
45. Riješite nejednadžbu $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 1$.
46. Riješite nejednadžbu $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(2x+3)$.
47. (2010.) Riješite nejednadžbu $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) \leq 3$. Rješenje zapišite pomoću intervala.
48. Riješite nejednadžbu $4^x < 5$.
49. (2016.) Riješite nejednadžbu $7^{x-1} \leq 2$.
50. Riješite nejednadžbu $\log_3 \frac{x-2}{x} < 2$.

51. Ako je $\log_3 \log_3 \log_3 x = 1$, tada je broj znamenki broja x jednak
- A. 5 B. 13 C. 27 D. 9
52. Posljednja znamenka broja x , koji je rješenje jednadžbe $\log_3 \log_4 \log_5 x = 1$, je broj
- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5
53. (2012.) Što od navedenoga vrijedi za broj 23^{312} ?
- A. Ima 424 znamenke i zadnja znamenka je 1.
B. Ima 424 znamenke i zadnja znamenka je 7.
C. Ima 425 znamenke i zadnja znamenka je 1.
D. Ima 425 znamenke i zadnja znamenka je 7.

PRIMJENE

54. (2013.) Kislost otopine (pH) određuje se prema formuli $pH = -\log C$, gdje je C koncentracija vodikovih iona u otopini (u molima po litri). Kislost otopine zaokružuje se na jednu decimalnu.
- Odredite pH otopine u kojoj je koncentracija vodikovih iona $4.7 \cdot 10^{-5}$ mola po litri.
 - Odredite koncentraciju vodikovih iona u čistoj vodi kojoj je pH jednak 7.1.
55. Ulaganjem 1000 kn u banku nakon n godina dobiva se $1000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n$ kuna.
- Koliki je iznos na računu nakon 5 godina?
 - Za koliko bi godina iznos od 1000 kn narastao na 10 000 kn?
56. (2012.) Marko jeoročio 5 000 kn po godišnjoj kamatnoj stopi od 1.7 %. Nakon koliko će se godina Markov novac na računu uvećati za 2 000 kn? Napomena: Kamata se na kraju svake godine dodaje iznosu na računu.

57. (2012.) Pod određenim uvjetima broj bakterija u Petrijevoj zdjelici može se procijeniti prema formuli $B(t) = 300 \cdot 1.057^t$ za $0^\circ C < t < 40^\circ C$.
- Koliko je bakterija u zdjelici pri temperaturi od $21^\circ C$?
 - Za koliko se postiže povećanje broja bakterija u zdjelici kada se temperatura poveća za $10^\circ C$?
58. Broj bakterija B u nekoj populaciji mijenja se vremenom t na sljedeći način $B(t) = 1000 \cdot 2^{3t}$, gdje je t vrijeme u satima od početka mjerena.
- Koliko je bilo bakterija 40 minuta prije početka mjerena?
 - Nakon koliko će vremena bakterija biti tisuću puta više nego na početku mjerena?
59. (2012.) Primjenom pesticida kontrolira se populacija komaraca oko jezera. Procjenjuje se da je broj komaraca oko jezera opisan formulom $B = 500000 \cdot 2^{-0.06667 \cdot t}$, gdje je t vrijeme korištenja pesticida izraženo u godinama
- Koliko godina treba koristiti pesticid da bi se broj komaraca prepolovio?
 - Pesticidi su na tom jezeru primjenjivani 20 godina, a godinu dana nakon toga više nisu. Te godine populacija komaraca povećala se za 30%. Koliko je komaraca bilo te godine?
60. (2013.) Procjenjuje se da radnik, nakon t sati uvježbavanja rada na stroju, može u jednome danu izraditi N proizvoda, gdje se N računa prema formuli $N = 40 \left(1 - 10^{-0.052t}\right)$.
- Koliko proizvoda dnevno može zgodoviti radnik nakon 5 sati uvježbavanja?
 - Nakon koliko najmanje sati uvježbavanja radnik može izraditi 33 proizvoda dnevno?
61. (2015.) U jednome je stroju spojeno u nizu nekoliko zupčanika. Svaki zupčanik, počevši od drugoga, ima dvostruko manje zubaca od prethodnoga, što znači da prilikom rada stroja napravi dvostruko veći broj okretaja od prethodnoga. Dok se najveći zupčanik okreće 9 puta, najmanji se okreće 1152 puta. Koliko je zupčanika spojeno u nizu?
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10
62. (2015.) Pacijent je dobio lijek protiv bolova. Količina lijeka K u organizmu, izražena u miligramima, opisana je formulom $K(t) = 2.5 \cdot 0.85^t$. Vrijeme t proteklo od trenutka dobivanja lijeka izraženo je u satima. Lijek prestaje djelovati kada je količina lijeka u organizmu manja od 1 mg. Nakon koliko će vremena lijek prestati djelovati?
63. (2010.) Broj stanovnika grada u razdoblju od 1950. do 2000. godine mijenja se prema pravilu prirodnog prirasta $S(t) = 12500 \cdot 2^{0.01587(t-1950)}$, gdje je t godina u kojoj određujemo broj stanovnika.
- Koliko je stanovnika bilo 1958 godine?
 - Koje je godine u gradu bilo 15 000 stanovnika?
 - Ako se pretpostavi da će se broj stanovnika i dalje povećavati na isti način, kada će u gradu biti trostruko više stanovnika nego 1950. godine?

64. (2018.) Napunjenost baterije mobitela $B(t)$ izražena je u postocima, npr. za bateriju napunjenu do 60 % je $B(t) = 60$. U tablici je prikazana ovisnost napunjenosti baterije mobitela $B(t)$ o vremenu punjenja/praznjenja t izraženome u minutama.

Napunjenost potpuno prazne baterije nakon t minuta punjenja	Napunjenost baterije nakon t minuta praznjenja ako je baterija u trenutku početka praznjenja napunjena P %
$B(t) = 100(1 - a^{-t}), a \in \mathbb{R}^+$	$B(t) = P - 3t$

Potpuno prazna baterija napuni se do 99 % za 70 min. Ako se potpuno prazna baterija punila 25 min, za koliko će se vremena potpuno isprazniti?

65. (2010.) U jezeru je otkriveno 10 grama algi za koje se zna da utječu na porast populacije raka. Naseobina algi povećava se 15% tjedno. Populacija raka u jezeru počinje naglo rasti ako je u njemu više od 10000 grama algi.

- a. Koliko će grama algi biti u jezeru tjedan dana nakon što su otkrivene?
- b. Koliko će grama algi biti u jezeru nakon tri tjedna?
- c. U kojem će tjednu populacija raka početi naglo rasti?

66. (2011.) Prema zakonu zaboravljanja, ako je neko gradivo naučeno s uspješnosti U_0 , tada t mjeseci nakon toga uspješnost U rješavanja toga gradiva zadovoljava jednadžbu $\log U = \log U_0 - c \log(t+1)$, gdje je c

konstanta koja ovisi o vrsti gradiva. Uspješnost U mjeri se brojem postignutih bodova na ispitu. Tin je na ispitu iz Matematike postigao 82 boda. Nakon godinu dana ponovno piše ispit koji provjerava isto gradivo. Koliko bi bodova prema zakonu zaboravljanja postigao ako je $c = 0.3$?

- A. 38 B. 44 C. 59 D. 78

67. (2011.) Po nekome biološkome modelu veza broja vrsta V koje žive na nekoj površini P i te površine dana je formulom $\log V = \log c + k \log P$, gdje su c i k pozitivne konstante koje ovise o vrstama i staništu. Za neki je otok $k = 0.323$. Ako je 50% površine otoka izgorjelo, koliki se postotak broja vrsta očekuje da će ostati na tome području?

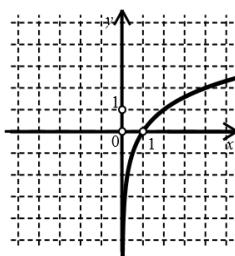
- A. 28.72% B. 44.31% C. 79.94% D. 82.34%

68. (2016.) Visina na kojoj zrakoplov leti procjenjuje se prema formuli $h(t) = 1.4 \log(t+1)$ gdje je h visina u kilometrima, a t vrijeme proteklo od njegova polijetanja izraženo u minutama.

- a. Na kojoj je visini zrakoplov 4 minute nakon polijetanja?
- b. Nakon koliko je vremena (u minutama) zrakoplov na visini od 2.5 km?
- c. S iste piste u razmaku od 10 minuta poletjela su dva zrakoplova. Koliko će dugi letjeti drugi zrakoplov do trenutka kada će biti na visini 100 metara manjoj od visine na kojoj se nalazi prvi zrakoplov?

Rješenja

1.



2. $b = 2$

3. $a = 3, b = 2$

4. D.

5. D.

6. A.

7. D.

8. A.

9. B.

10. $\frac{1}{2k}$

11. B.

12. C.

13. C.

14. A.

15. $\log_a \sqrt{5}$

16. C.

17. 36

18. $x = \log_4 3$

19. $\frac{28}{9}$

20. A.

21. C.

22. $\frac{1}{512}$

23. A.

24. $x = \frac{ab}{c}$

25. B.

26. A.

27. C.

28. B.

29. B.

30. D.

31. B.

32. A.

33. -1

34. $\frac{1}{6}$

35. B.

36. A.

37. 2

38. $(x, y) = (1, 2)$

39. $(x, y) = (2, 7)$

40. $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$

41. $(x, y, z) = (4, 6, -2)$

42. A.

43. $x \in \langle 0, 2 \rangle$

44. $x \in \langle 12, \infty \rangle$

45. $x \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$

46. $x \in \langle 2, \infty \rangle$

47. $x \in \langle 3, 5 \rangle$

48. $x \in \langle -\infty, \log_4 5 \rangle$

49. $x \in \langle -\infty, \log_7 2 + 1 \rangle$

50. $x \in \langle 2, 11 \rangle$

51. B.

52. D.

53. C.

54. a. 4.3

b. $7.9 \cdot 10^{-8}$

55. a. 1288.48 kn

b. 45.42 godine

56. 20

57. a. 960

b. 74 %

58. a. 4000

b. 3:19:19

59. a. 15

b. 257 940

60. a. 18

b. 15

61. C.

62. 5.64 h

63. a. 13 649

b. 1966

c. 2049

64. 26.9

65. a. 11.5

b. 15.20875

c. 50

66. A.

67. C.

68. a. 0.97856

b. 60.05

c. 54.94