

10. DERIVACIJE

10.1. DERIVACIJA FUNKCIJE

1. Odredite prvu derivaciju funkcije:
 - a. (2012.) $f(x) = 2x^4$
 - b. (2014.) $f(x) = 5x^4 + \sin x$
 - c. (2012.) $f(x) = \pi \cos x$
 - d. (2011.) $f(x) = x \cdot \sin x$
 - e. (2013.) $f(x) = x^3 \sin x$
 - f. (2018.) $f(x) = (2x+3)(x^2 - 1)$
 - g. (2014.) $f(x) = \frac{5x+2}{2x+1}$
 - h. (2011.) $f(x) = \frac{x^2}{3x-5}$
 2. Riješite jednadžbu $f'(x) = 0$, ako je:
 - a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$
 - b. $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$
 - c. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$
 3. (2012.) Derivirajte funkciju $f(x) = \sin(3x+11)$.
 4. (2012.) Derivirajte funkciju $f(x) = \sin(5x)$.
 5. (2015.) Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \operatorname{tg}(3x)$.
 6. (2013.) Derivirajte funkciju $f(x) = 2 + \sin(3x)$.
 7. (2012.) Koliko je $g'(6)$ ako je $g(x) = \sqrt{(2x-3)^3}$?
 8. (2016.) Zadana je funkcija $f(x) = 3x^2 + 10$. Koliko je $f(2) - f'(3)$ gdje je f' derivacija funkcije f ?
- ***
9. Derivirajte funkcije:
 - a. $y = (3 - 2 \sin x)^5$
 - b. $y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \sqrt{x}$
 - c. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}$
 - d. $y = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$
 - e. $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 3x$

DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE

3. (2012.) Derivirajte funkciju $f(x) = \sin(3x+11)$.

10.2. PRIMJENA DERIVACIJA

TANGENTA NA GRAF FUNKCIJE

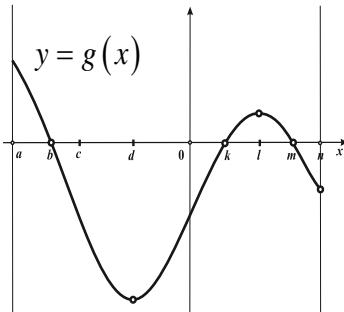
1. (2013.) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$ u točki s apscisom $x=4$.
2. (2013.) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 5$ u točki s apscisom 3.
3. (2015.) Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 + 2x + 1$ u točki s apscisom $x_0 = 1$.
4. (2015.) Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki s apscisom $x=10$.
5. (2016.) Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. Koja je od navedenih jednadžba tangenta na graf funkcije f u točki $(2, y)$?
 - A. $y = 2x - 1$
 - B. $y = 2x + 5$
 - C. $y = 3x - 1$
 - D. $y = 3x + 5$
6. (2012.) Odredite koeficijent smjera (nagib) tangente na graf funkcije $h(x) = x^3 - 1$ u točki grafa s apscisom 2.
7. (2018.) Izračunajte koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{10}{x}$ u točki $(5, 2)$.

8. (2012.) Koliki je koeficijent smjera (nagib) tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$ u točki $T(1, 3)$?
9. Nađi točku krivulje $y = x^3 - 3x + 2$ u kojoj je tangenta paralelna s pravcem $y = 3x$.
10. Odredi realan broj a tako da pravac $y = x + a$ bude tangenta funkcije $f(x) = 2\sqrt{x}$.
11. (2016.) Na grafu funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x$ povučena je tangenta usporedna s pravcem $y = 5x$. Koja je od navedenih jednadžba te tangente?
 - A. $y = 5x - 5$
 - B. $y = 5x - 3$
 - C. $y = 5x + 6$
 - D. $y = 5x + 8$
12. Kolika je površina trokuta što ga s koordinatnim osim zatvara tangenta na krivulju $f(x) = \ln x$ u njezinoj nultočki?

Maja Zelčić

MONOTONOST. EKSTREMI

13. (2013.) Na slici je prikazan graf funkcije g koja je definirana na intervalu $\langle a, n \rangle$. Odredite skup realnih brojeva za koje je derivacija funkcije g pozitivna, tj. $g'(x) > 0$. Rješenje zapišite s pomoću intervala upotrebljavajući neke od označenih brojeva a, b, c, d, k, l, m, n .



14. Je li funkcija $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{4} - \pi\right)$ rastuća ili padajuća u točki $x = \frac{14\pi}{3}$?

15. (2011.) Graf polinoma trećega stupnja prolazi točkama $A(-1,4)$, $B(0,\frac{9}{2})$, $C(1,5)$ i $D(3,0)$, gdje je A točka lokalnoga minimuma, a C točka lokalnoga maksimuma. Iz zadanih podataka skicirajte graf tog polinoma na intervalu $\langle -2,4 \rangle$. Napomena: Za skiciranje nije potrebno odrediti formulu zadanoga polinoma.

16. (2011.) Graf polinoma trećega stupnja prolazi točkama $A(-1,0)$, $B(0,-1)$, $C(1,-2)$ i $D(2,0)$, gdje je A točka lokalnoga maksimuma, a C točka lokalnoga minimuma. Iz zadanih podataka skicirajte graf tog polinoma na intervalu $\langle -2,3 \rangle$. Napomena: Za skiciranje nije potrebno odrediti formulu zadanoga polinoma.

17. (2015.) Neprekidna funkcija definirana za sve realne brojeve ima točno dvije točke lokalnoga minimuma $A(-1,2)$ i $B(4,-3)$ i samo jednu točku lokalnoga maksimuma $C(1,3)$. Odredite interval/intervale rasta funkcije na cijeloj domeni.

18. (2011.) Za koji realan broj x funkcija

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6 \text{ postiže lokalni minimum?}$$

19. (2011.) Za koji realan broj x funkcija

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{ postiže lokalni maksimum?}$$

20. (2012.) Za koji realan broj x funkcija

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5x - \frac{5}{6} \text{ postiže lokalni}$$

maksimum?

21. (2012.) Za koji realan broj x funkcija

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 2 \text{ postiže lokalni minimum?}$$

22. (2014.) Odredite točke lokalnog minimuma i lokalnog maksimuma funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$.

23. (2017.) Koje su koordinate točke u kojoj funkcija

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2} \text{ postiže lokalni maksimum?}$$

24. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 2x^2 - 15x)$.

- a. Odredite nultočke te funkcije.
- b. Odredite derivaciju funkcije.
- c. Odredite interval (intervale) na kojima funkcija raste.
- d. Odredite lokalne ekstreme te funkcije.
- e. Nacrtajte graf te funkcije rabeći rezultate prethodnih podzadataka.

25. (2010.) Neka je $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 16)(x + 1)$.

- a. Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije s osi apscisa.
- b. Derivirajte funkciju f .
- c. Odredite interval/intervale rasta funkcije f .
- d. Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
- e. Nacrtajte graf te funkcije rabeći prethodne rezultate. (Napomena: Točke koje nemaju cjelobrojne koordinate ucrtajte približno.)

26. (2010.) Neka je $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x - 1)$.

- a. Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima.
- b. Derivirajte funkciju f .
- c. Odredite interval/intervale rasta funkcije f .
- d. Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
- e. Nacrtajte graf te funkcije rabeći rezultate prethodnih podzadataka.

27. (2010.) Neka je $f(x) = \frac{1}{8}(x - 3)(x^2 - 24)$.

- a. Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije s osi apscisa.
- b. Derivirajte funkciju f .
- c. Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
- d. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije u točki u kojoj je apscisa jednaka $x = -4$.
- e. Nacrtajte graf te funkcije rabeći prethodne rezultate. (Napomena: točke koje nemaju cjelobrojne koordinate ucrtajte približno.)

28. (2011.) Neka je $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- a. Odredite nultočke funkcije i koordinate točke T grafa kojoj je apscisa 1.
- b. Derivirajte funkciju f .
- c. Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
- d. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije u točki u $T(-1, y)$.
- e. Nacrtajte graf te funkcije rabeći prethodne rezultate.

PRIMJENE DIFERENCIJALNOG RAČUNA

29. Među svim jednakokračnim trokutima opsega 30 nađite onaj koji ima najveću površinu. Izračunaj tu površinu.

30. U skupu pravokutnih trokuta s hipotenuzom $\sqrt{2}$ odredi trokut s najvećim opsegom.

Maja Zelčić

31. Zbroj duljina osnovnog brida i visine pravilne četverostrane prizme iznosi 5. Koja od svih takvih prizmi ima najveći obujam?
32. Odsječku parabole $y = 2x^2$, odsječenom pravcem $y = 30$, upišite pravokutnik maksimalne površine čija jedna stranica leži na tom pravcu.
33. U skupu pravilnih trostranih piramida kojima visina pobočke iznosi $4\sqrt{3}$ cm, odredi onu s najvećim volumenom.

34. Funkcija $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x - 4}$ postiže u točki $T(3, 16)$ ekstrem. Odredi realne parametre a i b , te ispitaj tijek i nacrtaj graf funkcije.
35. Odredi realne parametre a, b tako da funkcija $f(x) = ax + b \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ poprima minimum $\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ u točki $\frac{5\pi}{3}$.

36. (2014.) Analizirajte jednadžbu $\log(x+5) = -\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 5x$ i utvrđite koliko rješenja ima ta jednadžba. (Napomena: Tijekom rješavanja možete se koristiti koordinatnim sustavom.)
37. (2016.) Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn/m^2 . Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 0.35 L ako je za njezinu izradu potrošeno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti. ($1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$)
38. (2018.) Ana je ukrasila kutiju za nakit bez poklopca. Izvana ju je oblijepila papirom i na vanjske rubove zalijepila ukrasnu nit. Kutija je u obliku kvadra kojemu je duljina dvostruko veća od širine. Za ukrašavanje svih vanjskih rubova kutije upotrijebila je točno 108 cm ukrasne niti koja se nigdje ne preklapa. Kutija ima maksimalno moguć obujam i papiri kojima je oblijepljena se ne preklapaju. Kolika je površina papira kojim je Ana oblijepila tu kutiju?

Rješenja

10.1. DERIVACIJA FUNKCIJE

1. a. $f'(x) = -8x^{-5}$
 b. $f'(x) = 20x^3 + \cos x$
 c. $f'(x) = -\pi \sin x$
 d. $f'(x) = \sin x + x \cos x$
 e.
 $f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$
 f. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 2$
 g. $f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$
 h. $f'(x) = \frac{3x^2 - 10x}{(3x-5)^2}$

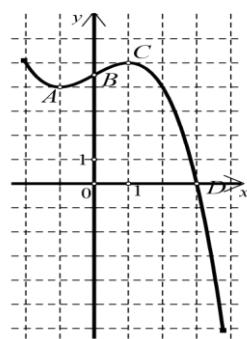
2. a. $x = 2$
 b. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 3. $f'(x) = 3\cos(3x+1)$
 4. $f'(x) = 5\cos(5x)$
 5. $f'(x) = \frac{3}{\cos^2(3x)}$
 6. $f'(x) = 3\cos(3x)$
 7. 9
 8. 4

9. a.
 $y' = -10\cos x(3 - 2\sin x)^4$
 b. $y' = -\frac{1}{2\sin^2 x \sqrt{ctgx}}$
 c. $y' = -\frac{1}{2\sin^2 x \sqrt{ctgx}}$
 d. $y' = \frac{3+4x}{(x-2)^3}$
 e. $y' = \frac{6}{\sin 6x}$

10.2. PRIMJENA DERIVACIJA

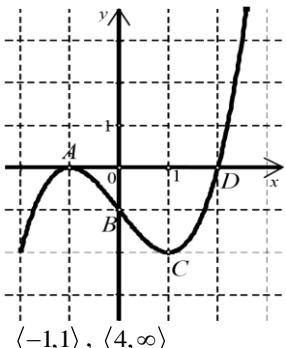
1. $y = 30x - 29$
 2. $y = 2x - 8$
 3. $y = 5x - 1$
 4. $x - 2\sqrt{10}y + 10 = 0$
 5. A.
 6. $k = 12$
 7. $k = -\frac{2}{5}$
 8. $k = -5$
 9. $(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

10. $a = 1$
 11. D.



Maja Zelčić

16.



17. $\langle -1, 1 \rangle, \langle 4, \infty \rangle$

18. $x = 1$

19. $x = -1$

20. $x = -5$

21. $x = -1$

22. $\max(-2, 22), \min(1, -5)$

23. $\max(2, \frac{1}{2})$

24. a. $-5, 0, 3$

b.

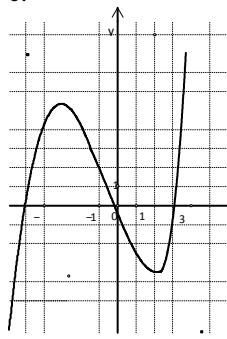
$$f'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 + 4x - 15)$$

c. $\langle -\infty, -3 \rangle, \langle \frac{5}{3}, \infty \rangle$

d. $\max(-3, \frac{36}{5}),$

$\min(\frac{5}{3}, -\frac{92}{27})$

e.



25. a. $-4, -1 \text{ i } 4$

b.

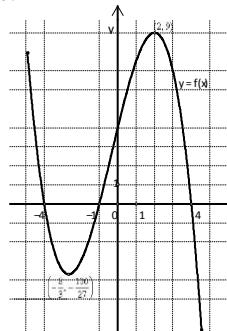
$$f'(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 + 2x - 16)$$

c. $\langle -\frac{8}{3}, 2 \rangle$

d. $\max(2, 9),$

$\min(-\frac{8}{3}, -\frac{100}{27})$

e.



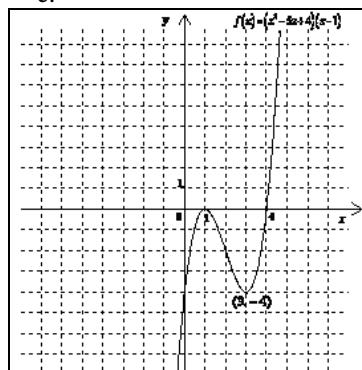
26. a. $(1, 0), (4, 0), (0, -4)$

b. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

c. $\langle -\infty, 1 \rangle, \langle 3, \infty \rangle$

d. $\max(1, 0), \min(3, -4)$

e.



27. a. $(-\sqrt{24}, 0), (3, 0),$

$(\sqrt{24}, 0)$

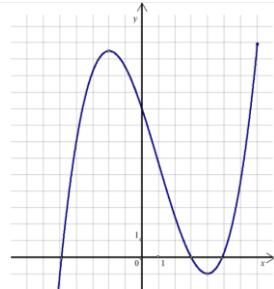
b. $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 3$

c. $\max(-2, 12.5),$

$\min(4, -1)$

d. $y = 6x + 31$

e.



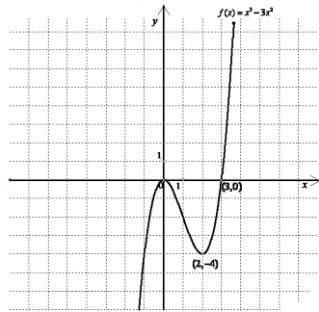
28. a. $0, 3 \text{ i } T(1, -2)$

b. $f'(x) = 3x^2 - 6x$

c. $\max(0, 0), \min(2, -4)$

d. $y = 9x + 5$

e.



29. $a = 15, b = 7.5$

30. $a = b = 1$

31. $a = \frac{10}{3}, h = \frac{5}{3}$

32. $a = 2\sqrt{5}, b = 20$

33. $a = 8\sqrt{6}$

34. $a = -2, b = -37$

35. $a = \frac{1}{2}, b = 1$

36. 3

37. 1.9245 kn

38. 396