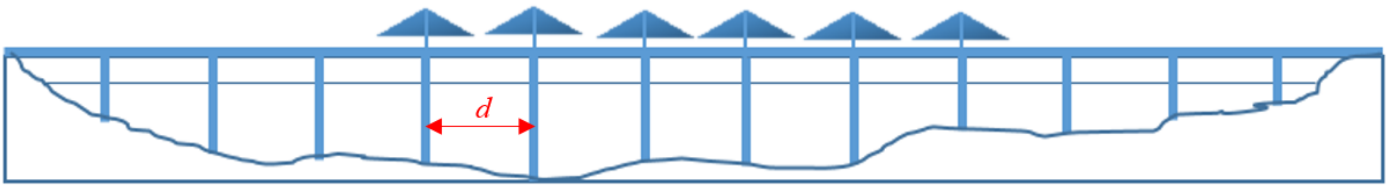
Jesensko kolo 2022./2023.

1. Pelješki most koji premošćuje Malostonski zaljev dug je 2 404 m i spaja Komarnu na kopnu i Brijestu na poluotoku. Podupire ga 12 stupova. Da su stupovi postavljeni na jednakoj udaljenosti (kao na slici), kolika bi bila međusobna udaljenost *d* od sredine jednog do sredine njemu susjednog stupa?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje
između 200 i 201 m	između 184 i 185m	između 192 i 193 m	ništa od navedenoga	

Rješenje

12 stupova dijeli duljinu mosta na 13 jednakih dijelova. Širina jednog dijela jednaka je međusobnoj udaljenosti d od sredine jednog do sredine susjednog stupa.

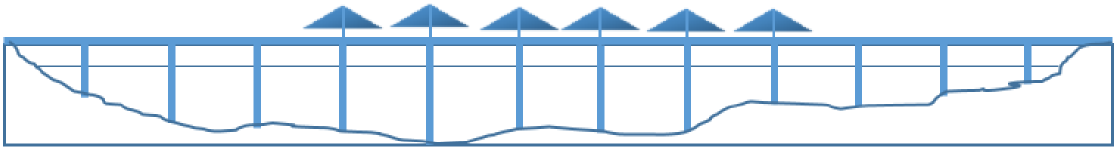
$$d = 2404 : 13$$

$$\begin{array}{l} 2404 : 13 = 184 \\ \underline{-13} \\ \ \ 110 \\ \underline{-104} \\ \ \ \ \ \ 64 \\ \ \ \ \underline{-52} \\ \ \ \ \ \ 12 \text{ ostatak} \end{array}$$

d je između 184 i 185 m.

Točan odgovor je B.

2. Pelješki most koji premošćuje Malostonski zaljev dug je 2 404 m i spaja Komarnu na kopnu i Brijeste na poluotoku. Podupire ga 12 stupova širine 4.5 m. Da su stupovi postavljeni na jednakoj udaljenosti (kao na slici), kolika bi bila međusobna udaljenost susjednih stupova?



A. manja od 180 m	**B.** između 180 i 185 m	**C.** između 185 i 190 m	**D.** veća od 190 m	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

12 stupova ima ukupnu širinu $12 \cdot 4.5 \text{ m} = 54 \text{ m}$. Ti stupovi dijele most na 13 jednakih dijelova. Umanjimo li duljinu mosta za širinu svih stupova, dobivamo ukupnu širinu svih 13 dijelova što iznosi:

$$2404 \text{ m} - 54 \text{ m} = 2350 \text{ m}.$$

Širina jednoga dijela tako iznosi $2350 \text{ m} : 13 \approx 180.8 \text{ m}$.

Dakle, susjedni stupovi međusobno su udaljeni između 180 i 185 m.

Točan odgovor je B.

3. Koliko ukupno školskih godina u ovome stoljeću ima zbroj znamenaka kao školska godina 2022./2023.?

A. 3	**B.** 4	**C.** 5	**D.** 6	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Izračunajmo zbroj znamenaka tekuće školske godine 2022./2023.

$$2 + 0 + 2 + 2 + 2 + 0 + 2 + 3 = 13$$

Uočimo i to da sve godine u ovome stoljeću započinju s 20.

$$2 + 0 + 2 + 2 + 2 + 0 + 2 + 3 = 4 + 9$$

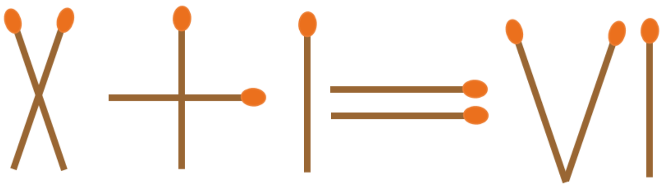
Stoga tražimo dvije susjedne godine ovog stoljeća kojima je ukupan zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 9.

04./05.
13./14.
22./23.
31./32.
40./41.

Zaključujemo da u ovome stoljeću ukupno 5 školskih godina ima zbroj znamenaka jednak sadašnjoj.

Točan odgovor je C.

4. Zoe je primijetila da će premještanjem jedne šibice napisana jednakost biti točna. Na koliko načina može odabrati jednu od 10 šibica koju će pritom premjestiti?



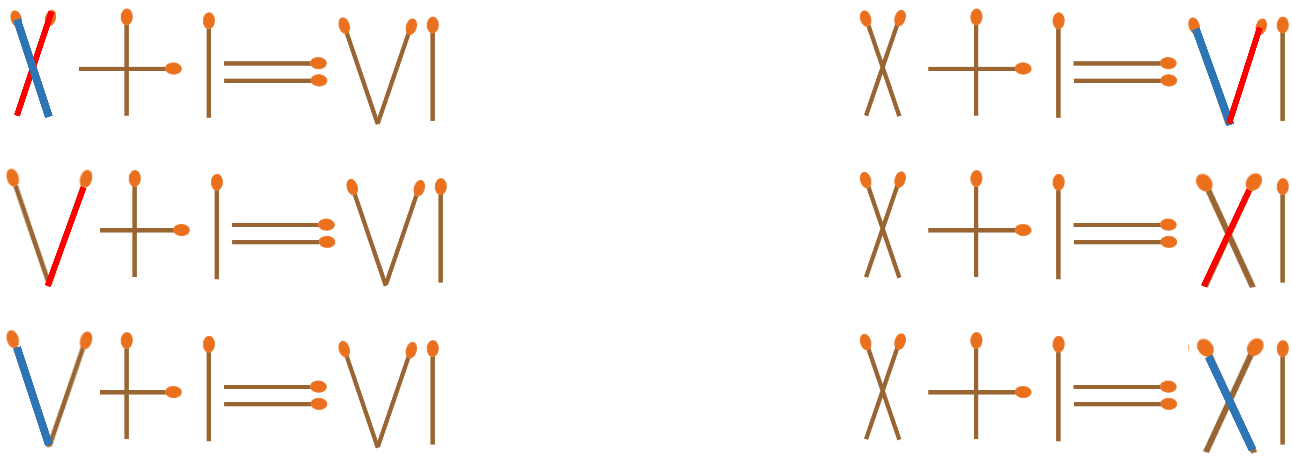
A. 1	**B.** 3	**C.** 0	**D.** 4	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Šibice možemo premjestiti tako da jednakost glasi:

V + I = VI ili X + I = XI.

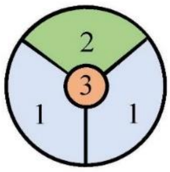
Svaku od navedenih jednakosti možemo dobiti na 2 načina. Pomičući crvenu ili pomičući plavu šibicu.



Postoji ukupno 4 načina za odabrati šibicu koju ćemo premjestiti.

Točan odgovor je D.

5. Sinjska alka viteško je nadmetanje u kojem alkari na konju u punom trku moraju proći trkalištem te pokušati kopljem pogoditi središte malog željeznog kruga koji se zove alka. Vrijednost pojedinih polja alke različita je: gornje polje iznad maloga kruga vrijedi 2 boda („u dva“), donja polja lijevo i desno donose po 1 bod („u jedan“), pogodak u mali krug donosi 3 boda („u sridu“). Ako alkar promaši cijelu alku („promašio“) ili ju sruši bez pogotka („u ništa“), dobiva 0 bodova. Ako dva ili više alkara nakon tri trke imaju najveći, jednak broj bodova, oni, u dodatnim trkama (pripetavanju), nastavljaju natjecanje sve dok jedan od njih ne pobijedi.



broj bodova	pogodak
3	u sridu
2	u dva
1	u jedan
0	u ništa
0	promašio

Nakon tri trke trojica od četvorice alkara: Jure, Ante, Ivo ili Frano imali su jednaki broj bodova pa se pristupilo pripetavanju.

alkar	1. trka	2. trka	3. trka
Jure	u dva	u ništa	u dva
Ante	u jedan	u dva	u dva
Ivo	u dva	u sridu	promašio
Frano	u sridu	u jedan	u jedan

Nakon prvog pripetavanja jedan je alkar otpao, a odluka o pobjedniku alke pala je tek u drugom pripetavanju. Ako su toga dana na natjecanju trojica alkara imala po jedan „promašio“, tko je bio pobjednik natjecanja?

A. nije moguće odrediti	**B.** Ante	**C.** Ivo	**D.** Frano	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

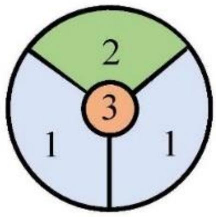
Izračunajmo najprije bodove alkara nakon 3 utrke.

alkar	1. trka	2. trka	3. trka	bodovi ukupno
Jure	u dva	u ništa	u dva	$2 + 0 + 2 = 4$
Ante	u jedan	u dva	u dva	$1 + 2 + 2 = 5$
Ivo	u dva	u sridu	promašio	$2 + 3 + 0 = 5$
Frano	u sridu	u jedan	u jedan	$3 + 1 + 1 = 5$

Zaključujemo da su u pripetavanje išli Ante, Ivo i Frano. Uočimo da samo Ivo u 3 trke ima „promašio“. Navedeno znači da su Ante i Frano koji prije pripetavanja nisu imali „promašio“ promašili u pripetavanju. S promašajem u pripetavanju se ne može biti pobjednik Alke iz čega slijedi da je pobjednik Ivo.

Točan odgovor je C.

6. Sinjska alka viteško je nadmetanje u kojem alkari na konju u punom trku moraju proći trkalištem te pokušati kopljem pogoditi središte maloga željeznog kruga koji se zove alka. Vrijednost pojedinih polja alke različita je: gornje polje iznad malog kruga vrijedi 2 boda („u dva“), donja polja lijevo i desno donose po 1 bod („u jedan“), pogodak u mali krug donosi 3 boda („u sridu“). Ako alkar promaši cijelu alku („promašio“) ili ju sruši bez pogotka („u ništa“) dobiva 0 bodova. Ako dva ili više alkara nakon tri trke imaju najveći, jednak broj bodova, oni, u dodatnim trkama (pripetavanju), nastavljaju natjecanje sve dok jedan od njih ne pobijedi.



broj bodova	pogodak
3	u sridu
2	u dva
1	u jedan
0	u ništa
0	promašio

alkar	1. trka	2. trka	3. trka
Jure	u dva	u ništa	u dva
Ante	u jedan	u dva	u dva
Ivo	u dva	u sridu	promašio
Frano	u sridu	u jedan	u jedan

Nakon tri su trke od četvorice alkara: Jure, Ante, Ive i Frane njih trojica imali jednaki broj bodova pa se pristupilo pripetavanju.

Nakon prvog pripetavanja jedan alkar je otpao, a odluka o pobjedniku alke pala je tek u drugom pripetavanju. Zanimljivo je da je u svakoj narednoj trci (uključujući i pripetavanje) postignut manji ukupan broj bodova svih alkara nego u prethodnoj. Ako je toga dana na natjecanju pobjedu slavodobitniku donio pogodak „u sridu“, koliko je toga dana bilo pogodaka „u dva“?

A.	B.	C.	D.	E.
nije moguće odrediti	5	6	7	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Izračunajmo najprije bodove alkara nakon 3 utrke.

alkar	1. trka	2. trka	3. trka	bodovi ukupno
Jure	u dva	u ništa	u dva	2 + 0 + 2 = 4
Ante	u jedan	u dva	u dva	1 + 2 + 2 = 5
Ivo	u dva	u sridu	promašio	2 + 3 + 0 = 5
Frano	u sridu	u jedan	u jedan	3 + 1 + 1 = 5

U pripetavanje su išli Ante, Ivo i Frano jer su u tri trke osvojili po pet bodova. U svakoj je narednoj trci postignut manji broj bodova nego u prethodnoj. Izračunajmo broj bodova postignut u svakoj trci.

alkar	1. trka	2. trka	3. trka	1. pripetavanje	2. pripetavanje
Jure	u dva	u ništa	u dva	–	
Ante	u jedan	u dva	u dva		
Ivo	u dva	u sridu	promašio		
Frano	u sridu	u jedan	u jedan		
UKUPNO	8	6	5		

U 2. je pripetavanju dobiven pobjednik natjecanja, a on je pogodio u sridu, dakle 3 boda.

Kako je u svakom sljedećoj trci ukupno postignut manji broj bodova nego u prethodnoj, a u 3. je trci postignuto 5 bodova, tako možemo zaključiti da je u 2. pripetavanju ukupno postignuto 3 boda.

	3. trka	1. pripetavanje	2. pripetavanje
Ukupno bodova	5		3

Iz navedenog zaključujemo da je broj postignutih bodova u 1. pripetavanju može biti samo 4.

Znamo da je u 2. pripetavanju jedan alkar pogodio u sridu, a drugi osvojio 0 bodova. Da bismo izbrojali koliko je pogodaka „u dva“, preostaje nam vidjeti što sve mogu biti ishodi 1. pripetavanja.
S obzirom na to da je nakon prvog pripetavanja jedan alkar otpao, u prvom su pripetavanju dvojica alkara imala jednak broj bodova, a treći je alkar ostvario rezultat slabiji od te dvojice.

Njihov ukupan ostvaren broj bodova u 1. pripetavanju je 4.

Pretpostavimo da je jedan alkar promašio. Tada su ostala dvojica pogodila „u dva“ jer im je ukupan broj postignutih bodova 4.

Provjerimo je li moguć još neki slučaj. Kada bi alkar koji nije ušao u drugo pripetavanje osvojio bod, preostala dvojica trebala bi osvojiti barem dva boda. Tada bi ukupan broj bodova osvojenih u prvom pripetavanju bio najmanje 5 što je nemoguće. Stoga je jedini ishod moguć za prvo pripetavanje da je jedan alkar promašio, a preostala dvojica pogodila „u dva“.

Zaključujemo: u prve tri trke bilo je 5 pogodaka „u dva“, u 1. pripetavanju 2 pogotka „u dva“ i u 2. pripetavanju niti jedan. Dakle, ukupno 7 pogodaka.

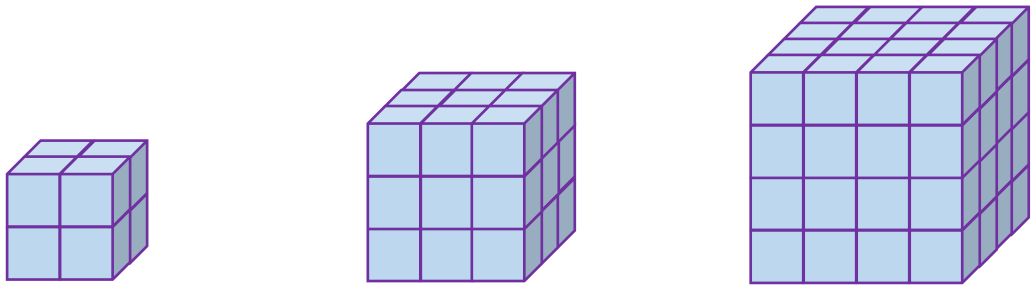
Točan odgovor je D.

7. Ako Jurica ima 100 jednakih kockica i pomoću njih želi složiti veću kocku, koliko različitih kocaka pritom može napraviti?

A.	B.	C.	D.	E.
3	4	9	10	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Jurica želi složiti veću kocku od kockica koje ima. Prva veća od početne kockice je ona koja sadrži $2 \cdot 2 \cdot 2$ kockice, zatim $3 \cdot 3 \cdot 3$ kockice, …



Broj kockica u kocki: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Prva sljedeća kocka imala bi $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kockica, a Jurica ih nema toliko.

Jurica može složiti 3 različite kocke.

Uočimo i to da se zadatak mogao shvatiti tako da Jurica u isto vrijeme gradi svoje kocke od 100 kockica, ali u tom je slučaju rezultat isti. Naime, ukupan broj kockica potreban za izgradnju nacrtane 3 kocke je

$$8 + 16 + 64 = 88 < 100$$

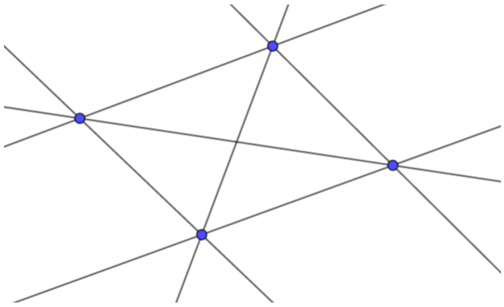
Točan odgovor je A.

8. U ravnini su dane četiri točke. Kada nacrtamo sve pravce koji sadrže bar dvije od tih četiriju točaka, koliko pravaca ne možemo dobiti?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje
1	3	4	6	

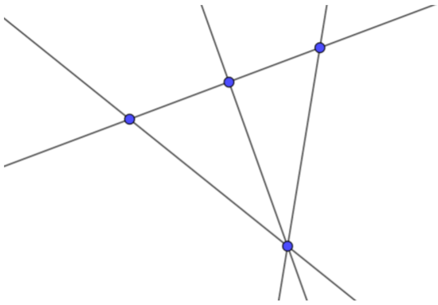
Rješenje

Pogledajmo 4 točke ravnine u nekom općenitom položaju i povucimo sve pravce koji sadrže dvije od te četiri točke i prebrojimo ih.



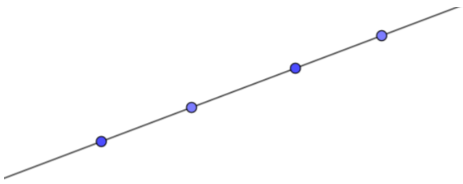
6 pravaca

Što ako tri od četiri točke pripadaju istom pravcu?



4 pravca

Jedina mogućnost uz već nacrtane je da sve četiri točke pripadaju istome pravcu.

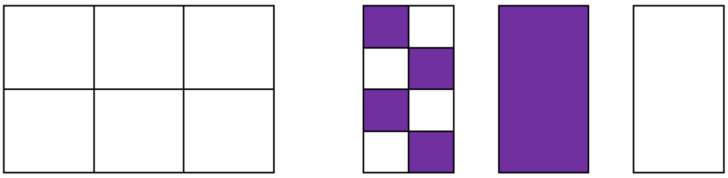


1 pravac

Zaključujemo da ako imamo 4 točke ravnine, ovisno o njihovom položaju, možemo nacrtati 1, 4 ili 6 pravaca koji sadrže barem dvije od četiri zadane točke. Dakle, ne možemo dobiti 3 pravca.

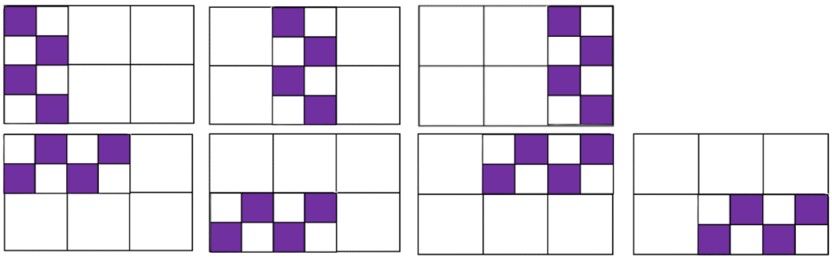
Točan odgovor je B.

9. Petar želi prekriti bijelu ploču kao na slici (koja se sastoji od 6 jednakih kvadrata) koristeći pritom jednu pločicu s kvadratićima, jednu ljubičastu i jednu bijelu. Sve tri pločice istih su dimenzija. Na koliko mjesta pritom može staviti pločicu s kvadratićima?



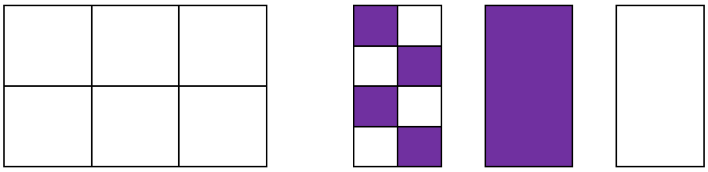
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
3	4	6	7	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje



Ukupno 7 mjesta.
Točan odgovor je D.

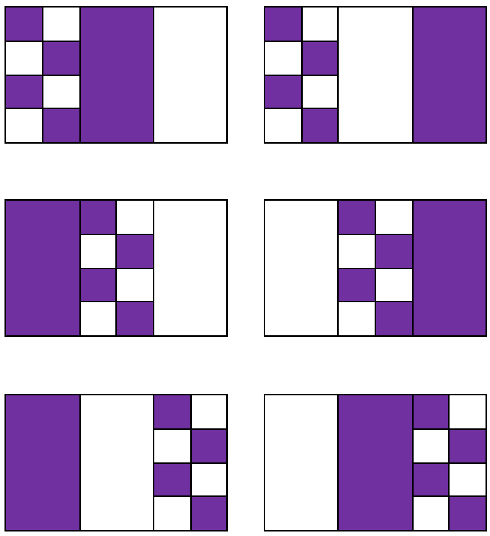
10. Petar želi prekriti bijelu ploču kao na slici (koja se sastoji od 6 jednakih kvadrata i ne može se okretati) koristeći pritom jednu pločicu s kvadratićima, jednu ljubičastu i jednu bijelu. Sve tri pločice istih su dimenzija. Na koliko načina to može napraviti?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6	9	14	18	ne želimo odgovoriti na pitanje

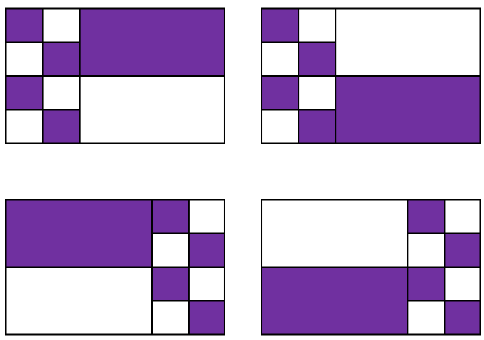
Rješenje

Pogledajmo prvo slučajeve kad su sve pločice uspravne. Primijetimo da nakon što na bijelu ploču stavimo jednu pločicu uspravno, preostale dvije pločice možemo staviti na 2 način.
To je ukupno $3 \cdot 2 = 6$ načina.

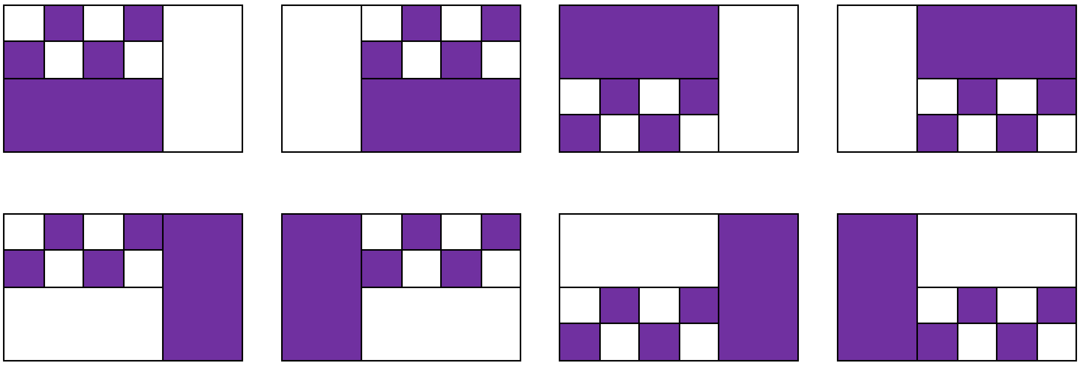


Ako sve tri pločice ne stoje uspravno, onda je samo jedna uspravna, a druge dvije položene.

Postavimo pločicu s kvadratićima uspravno. To možemo napraviti na dva načina i tada preostale dvije pločice možemo staviti na dva načina.
To je ukupno $2 \cdot 2 = 4$ načina.



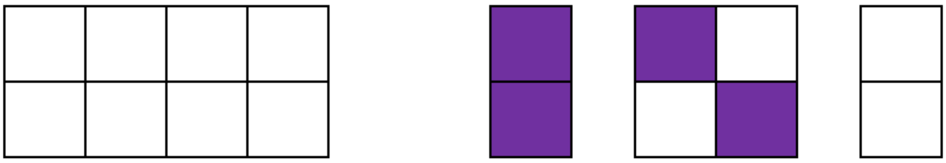
Preostalo nam je pogledati mogućnosti kada je pločica s kvadratićima polegnuta. To možemo napraviti na 4 načina i tada preostale dvije pločice stavljamo na 2 načina. To je ukupno $4 \cdot 2 = 8$ načina.



Dakle, pod možemo popločati na 6 + 4 + 8 = 18 različitih načina.

Točan odgovor je D.

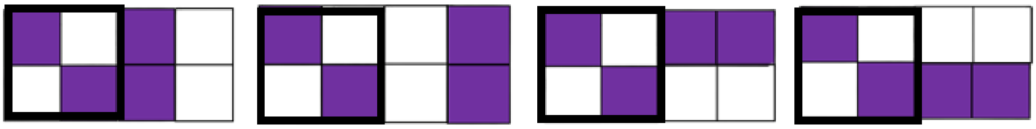
11. Bijela ploča, nacrtana lijevo dolje, pričvršćena je na zid i ne može se okretati. Petar je želi prekriti s tri pločice, nacrtane desno: ljubičastom i bijelom koje sadrže dva kvadrata te s kvadratnom pločom koja sadrže po dva ljubičasta i dva bijela kvadrata. Kvadrati na ploči na zidu i na tri pločice jednako su veliki. Koliko različitih uzoraka Petar može napraviti?



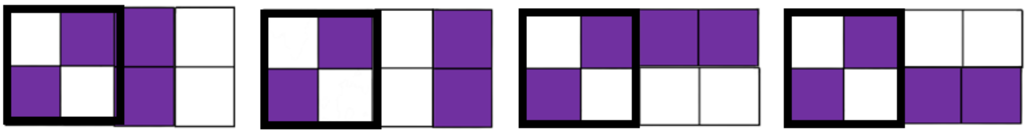
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6	10	12	20	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Položimo kvadratičnu pločicu sasvim lijevo i pogledajmo sve moguće rasporede koje tako možemo dobiti.

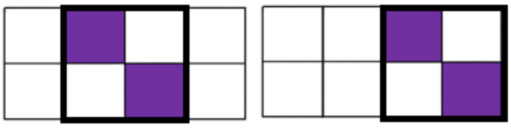


Kvadratnu pločicu možemo i okrenuti tako da joj gornje lijevo polje bude bijelo.



Možemo zaključiti da za odabrano mjesto kvadratne pločice imamo ukupno 8 mogućnosti.

Pogledajmo preostala mjesta na koja možemo položiti kvadratnu pločicu.



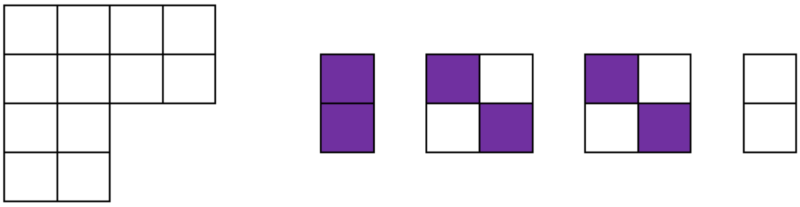
Kada je kvadratna pločica u sredini kao na crtežu gore lijevo, tada bijela i ljubičasta ploča mogu stajati samo uspravno, što znači da postoje 4 različita položaja (dva puta manje položaja nego kad je kvadratna pločica smještena sasvim lijevo).

Položimo li kvadratnu pločicu sasvim desno, bijela i ljubičasta pločica mogu stajati i uspravno i vodoravno pa postoji 8 različitih položaja.

Ukupan broj različitih uzoraka je 8 + 4 + 8 = 20.

Točan odgovor je D.

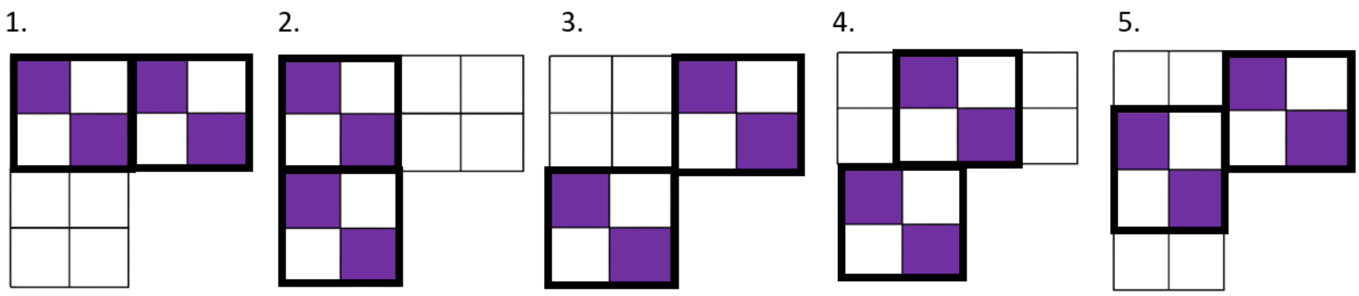
12. Bijela ploča, nacrtana lijevo dolje, pričvršćena je na zid i ne može se okretati. Petar je želi prekriti s 4 pločice, nacrtane desno: ljubičastom i bijelom koje sadrže dva kvadrata te s dvije kvadratne ploče koje sadrže po dva ljubičasta i dva bijela kvadrata. Kvadrati na ploči na zidu i na četiri pločice jednako su veliki. Koliko različitih uzoraka Petar može napraviti?



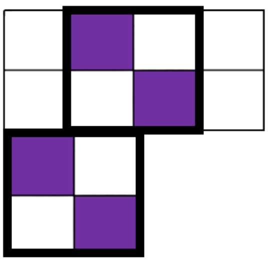
A. 64	**B.** 48	**C.** 32	**D.** 20	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Pogledajmo različite položaje na koje možemo položiti dvije kvadratne pločice.



Uočimo da u prva tri položaja ljubičastu i bijelu pločicu možemo položiti uspravno ili vodoravno dok u četvrtom i petom slučaju te pločice mogu stajati samo u jednom od ta dva položaja. Stoga u svakom od prva tri slučaja postoji dva puta više različitih položaja nego što ih je u četvrtom i petom slučaju. Navedeno znači da je dovoljno prebrojati rasporede u 4. slučaju i dobiveni broj uvećati 8 puta.



Kvadratnu pločicu u gornjem redu možemo položiti tako da joj gornji lijevi kvadratić bude ljubičast i tako da joj gornji lijevi kvadratić bude bijeli.
To su dva načina.
Na dva načina možemo posložiti i donju kvadratnu pločicu.
Ljubičastu i bijelu kvadratnu pločicu također možemo rasporediti na 2 načina.
Stoga je ukupan broj rasporeda kada su kvadratne pločice na nacrtanim pozicijama $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
Ukupan broj rasporeda tako je $8 \cdot 8 = 64$.

Točan dogovor je A.

13. Prirodan broj n pri dijeljenju s 2, 4 i 11 daje isti ostatak 1. Ako je $111 < n < 1\,111$, koliko prirodnih brojeva n ima to svojstvo?

A. 23	**B.** 22	**C.** 11	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Ako prirodni broj n pri dijeljenju s 2, 4 i 11 daje ostatak 1, onda je njegov prethodnih $n-1$ djeljiv s 2, 4 i 11.
Broj djeljiv s 4 je djeljiv i s 2, stoga tražimo brojeve $n-1$ koji su djeljivi s 4 i djeljivi s 11, a to znači djeljivi s 44.
S obzirom na to da vrijedi $111 < n < 1111$, pogledajmo koji je najmanji, a koji najveći broj za kojeg vrijede navedena svojstva.

111 : 44 = 2
-88
23

$$111 = 2 \cdot 44 + 23$$

Dakle, prvi broj veći od 111 djeljiv s 44 jednak je $3 \cdot 44$.
Tako je najmanji broj n koji je veći od 111 jednak $3 \cdot 44 + 1$.

1111 : 44 = 25
-88
231
-220
11

$$1111 = 25 \cdot 44 + 11$$

Najveći broj manji od 1111 djeljiv s $44 = 25 \cdot 44$.
Najveći broj n manji od 1111 je $25 \cdot 44 + 1$.
Dakle, brojevi n koji pri dijeljenju 2, 4 i 11 imaju ostatak 1, a pri tome su veći od 111, a manji od 1111 su redom:

$$3 \cdot 44 + 1,\ 4 \cdot 44 + 1,\ 5 \cdot 44 + 1, \dots,\ 25 \cdot 44 + 1.$$

U istaknutom nizu brojeva 3, 4, 5, …, 25 je ukupno 23 broja.

Točan odgovor je A.