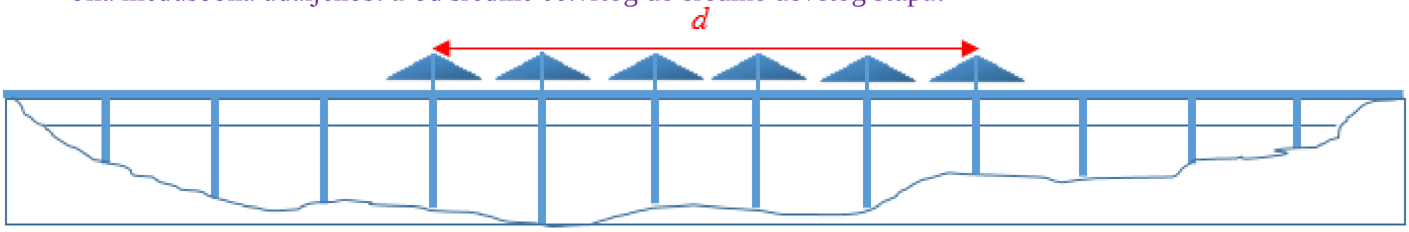
Naučimo

2. kolo 2022./2023.

1. Pelješki most koji premošćuje Malostonski zaljev dug je 2 404 m i spaja Komarnu na kopnu i Brijestu na poluotoku. Podupire ga 12 stupova. Da su stupovi postavljeni na jednakoj udaljenosti (kao na slici), kolika bi bila međusobna udaljenost *d* od sredine četvrtog do sredine devetog stupa?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
između 920 i 925 m	između 960 i 965 m	između 1 000 i 1 005 m	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

12 stupova dijeli duljinu mosta na 13 dijelova. Širina jednog dijela jednaka je međusobnoj udaljenosti d od sredine jednog do sredine susjednog stupa.

$$d = 2404 : 13$$

```
 2404 : 13 = 184
-13
 110
-104
    64
   -52
    12 ostatak
```

d je između 184 i 185 m.
Između 4. i 9. stupa ukupno je 5 razmaka, dakle $5 \cdot d$.
Kako vrijedi $184 < d < 185$, tako je i $5d$ veće od $5 \cdot 184 = 920$ i manje od $5 \cdot 185 = 925$.

Točan odgovor je A.

2. Koji je najmanji prirodni broj x rješenje nejednadžbe $a + x > 9$ za svaki prirodni broj a takav da je $0 < a \leq 4$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6	5	4	9	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Pogledajmo najprije što vrijedi za a.
a je prirodan broj i $0 < a \leq 4$ pa slijedi da a može biti 1, 2, 3 ili 4.
Uvrstimo sve moguće vrijednosti broja a u zadanu nejednadžbu i odredimo x.

$1 + x > 9$	$2 + x > 9$	$3 + x > 9$	$4 + x > 9$
$x > 9 - 1$	$x > 9 - 2$	$x > 9 - 3$	$x > 9 - 4$
$x > 8$	$x > 7$	$x > 6$	$x > 5$

Traži se najmanji x za kojeg će sve nejednadžbe vrijediti, a to je onda najmanji prirodni broj koji je veći od 8, odnosno broj 9 je najmanji broj za kojeg će sve 4 nejednadžbe biti istinite.
(Uvrstimo li npr. broj 7 u 1. nejednadžbu dobit ćemo $1 + 7 > 9$ što nije istina.)

Točan odgovor je D.

3. Koliko najmanje znakova danog niza treba ispisati da bi među njima bilo zajedno 50 ☀ i ☃?

☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀…

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
99	96	98	97	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Uočimo najprije koji se niz znakova uzastopce ponavlja.

☃☂☀☁☂☀ ☃☂☀☁☂☀ ☃☂☀☁☂☀ …

Ponavlja se uzorak ☃☂☀☁☂☀. U tih 6 znakova imamo 1 snjegovića i 2 sunca. Dakle, u uzorku od 6 znakova koji se ponavlja imamo 3 znaka koja nam trebaju.

U 2 uzorka je $2 \cdot 3 = 6$ znakova,
u 3 uzorka je $3 \cdot 3 = 9$ znakova,
u 4 uzorka je $4 \cdot 3 = 12$ znakova, …

Provjerimo koji je broj cijelih uzoraka potreban da bismo se približili broju 50 znakova ☃ i ☀, tako što ćemo podijeliti 50 sa 3.

$50 : 3 = 16$ $50 = 16 \cdot 3 + 2$

- 3
  20
- 18
   2

Zaključujemo da nam je potrebno 16 cijelih uzoraka (u svakome od njih je 3 znaka koja tražimo) i onda je potrebno nastaviti niz tako da se započne novi uzorak dok ne dođemo do drugog od znakova koji nam trebaju.

☃☂☀~~☁☂☀~~

✓ ✓ nepotrebno

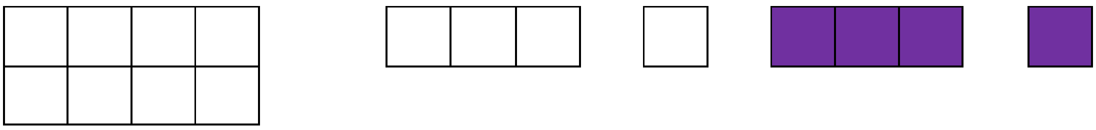
☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁

☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀☁☂☀☃☂☀

Ukupno smo uzorak od 6 znakova ispisali 16 puta u cijelosti te jednom samo prva 3 znaka. Dakle, ispisali smo $16 \cdot 6 + 3 = 99$ znakova.

Točan odgovor je A.

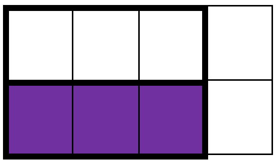
4. Bijela ploča, nacrtana lijevo dolje, pričvršćena je na zid i ne može se okretati. Petar ju želi prekriti četirima pločicama, nacrtanih desno: bijelom i ljubičastom koje sadrže tri kvadrata te bijelom i ljubičastom koje sadrže samo jedan kvadrat. Kvadrati na ploči na zidu i na četirima pločicama jednako su veliki. Koliko različitih uzoraka Petar može napraviti?



A.	B.	C.	D.	E.
6	8	10	12	ne želimo odgovoriti na pitanje

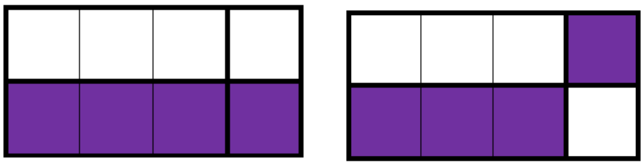
Rješenje

Pogledajmo jedan položaj velikih pločica.



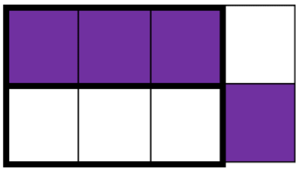
Kada smo odredili pozicije dvama većim pločicama, pogledajmo na koliko načina možemo položiti dvije male pločice.

1 **2**

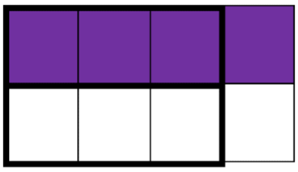


Možemo zaključiti da nakon što odredimo položaj velikim pločicama postoje dva načina na koja možemo položiti dvije manje pločice.
No to ne znači da se, iako su pločice postavljene različito, neće ponoviti neki uzorak koji smo već ranije dobili. Stoga treba provjeriti sva rješenja.

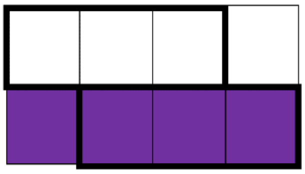
3



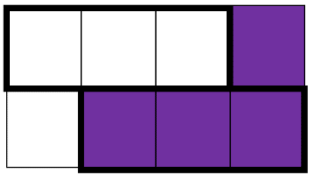
4



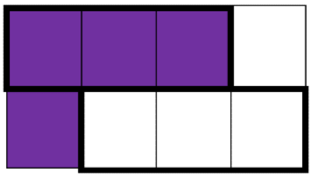
5



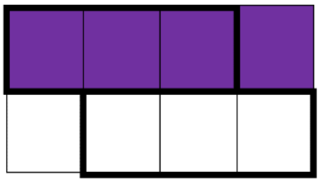
6



7

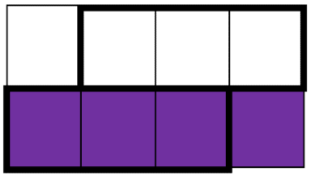


8

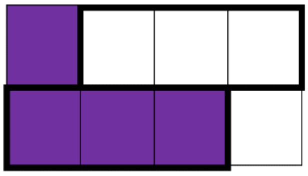


Uoči da uzorci dobiveni rasporedom pločica 5 i 8 odgovaraju uzorcima 1 i 4, stoga ovdje imamo **2 nova uzorka**.

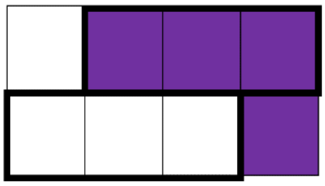
9



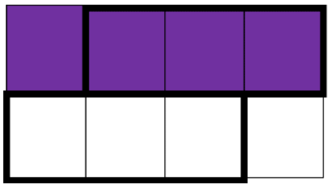
10



11

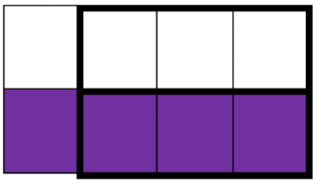


12

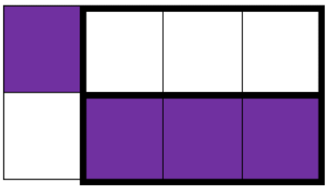


Uzorci 9 i 12 odgovaraju uzorcima 1 i 4. Imamo **2 nova uzorka**.

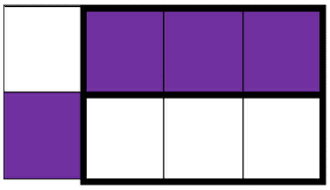
13



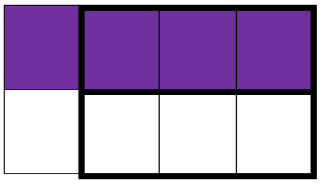
14



15



16



Uzorci 13 i 16 odgovaraju uzorcima 1 i 4. Imamo **2 nova uzorka**.

Ukupno imamo 4 + 2 + 2 + 2 = 10 različitih uzoraka.

Točan odgovor je C.

5. Ako je na brojevnom pravcu $A\left(\frac{19}{9}\right)$ i $B\left(\frac{17}{7}\right)$, za koju od navedenih točaka vrijedi $|BC| = 6|AB|$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$C\left(\frac{13}{3}\right)$	$C\left(\frac{270}{63}\right)$	$C\left(\frac{280}{63}\right)$	$C\left(\frac{40}{21}\right)$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Zapišimo najprije koordinate točaka A i B tako da imaju zajednički nazivnik i skicirajmo brojevni pravac.

$\frac{19}{9} = \frac{133}{63}, \frac{17}{7} = \frac{153}{63}$

Vrijedi $A\left(\frac{133}{63}\right)$ i $B\left(\frac{153}{63}\right)$. Udaljenost točaka A i B jednaka je $\frac{153}{63} - \frac{133}{63} = \frac{20}{63}$, odnosno $|AB| = \frac{20}{63}$.

Tražimo točku C koja je od točke B udaljena 6 puta više nego točka A, a to je $6 \cdot \frac{20}{63} = \frac{40}{21}$.
Uočimo da točka C može biti lijevo ili desno od točke B.

Označimo koordinatu točke C_1 s x_1.
S obzirom na to da smo s C_1 označili točku koja je na brojevnom pravcu desno od B vrijedi da je koordinata te točke veća od koordinate točke B odnosno $x_1 > \frac{153}{63}$ pa vrijedi:

$$|BC_1| = x_1 - \frac{17}{7} = \frac{40}{21}$$

$$x_1 = \frac{40}{21} + \frac{17}{7}$$

$$x_1 = \frac{40 + 51}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3}$$

Iako je točka $C\left(\frac{13}{3}\right)$ rješenje zadatka jer je među ponuđenim odgovorima, pogledajmo i drugo rješenje.
Pogledajmo sada koju koordinatu ima točka C_2 (x_2) koja je na pravcu lijevo od B što znači da vrijedi:

$$|BC_2| = \frac{17}{7} - x_2 = \frac{40}{21}$$

$$x_2 = \frac{17}{7} - \frac{40}{21}$$

$$x_2 = \frac{51 - 40}{21} = \frac{11}{21}$$

Točan odgovor je A.

6. Koliko uređenih parova (m, n) prirodnih brojeva zadovoljava jednakost $34m + 289n = 2\,023$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
1	2	3	više od 3	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Iskažimo n pomoću m.

$$34m + 289n = 2023$$

$$289n = 2023 - 34m \mid : 289$$

$$n = \frac{2023}{289} - \frac{34m}{289}$$

$$n = 7 - \frac{2m}{17}$$

Da bi n bio prirodan broj treba vrijediti: $\frac{2m}{17} \in \mathbb{N}$ i $7 - \frac{2m}{17} > 0$ iz čega slijedi: $\frac{2m}{17} < 7$.
Ako je $\frac{2m}{17}$ prirodan broj, onda je $2m$ višekratnik broja 17, odnosno m je višekratnik broja 17.
Kako vrijedi $\frac{2m}{17} < 7$, tako $2m$ može najviše biti $6 \cdot 17 = 2 \cdot (3 \cdot 17)$ što znači da je $m \leq 3 \cdot 17$.

Zaključimo: m je višekratnik broja 17 i $m \leq 3 \cdot 17$ što znači da m može biti 17, $2 \cdot 17$ i $3 \cdot 17$.
Postoje 3 uređena para (m, n) za koje vrijedi zadana jednakost.
Riješili smo zadatak, no pogledajmo koji su to uređeni parovi:

1. $m = 17$
   $n = 7 - \frac{2 \cdot 17}{17}$
   $n = 5$
   (17, 5)

2. $m = 2 \cdot 17$
   $n = 7 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 17}{17}$
   $n = 3$
   (34, 3)

3. $m = 3 \cdot 17$
   $n = 7 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 17}{17}$
   $n = 1$
   (51, 1)

Točan odgovor je C.

7. Linearna ovisnost y o x-u dana je tablicom. Koliko je $m + n$?

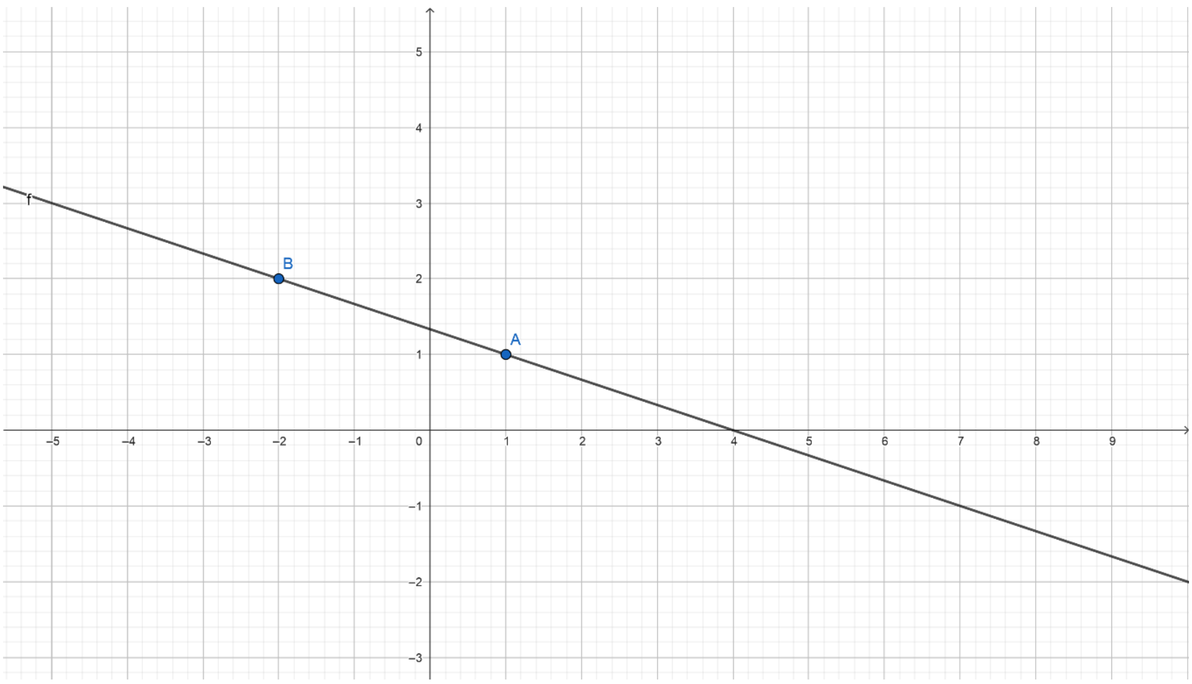
x	1	–2	0	n
y	1	2	m	0

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
manje od 4	između 4 i 5	između 5 i 6	više od 6	ne želimo odgovoriti na pitanje

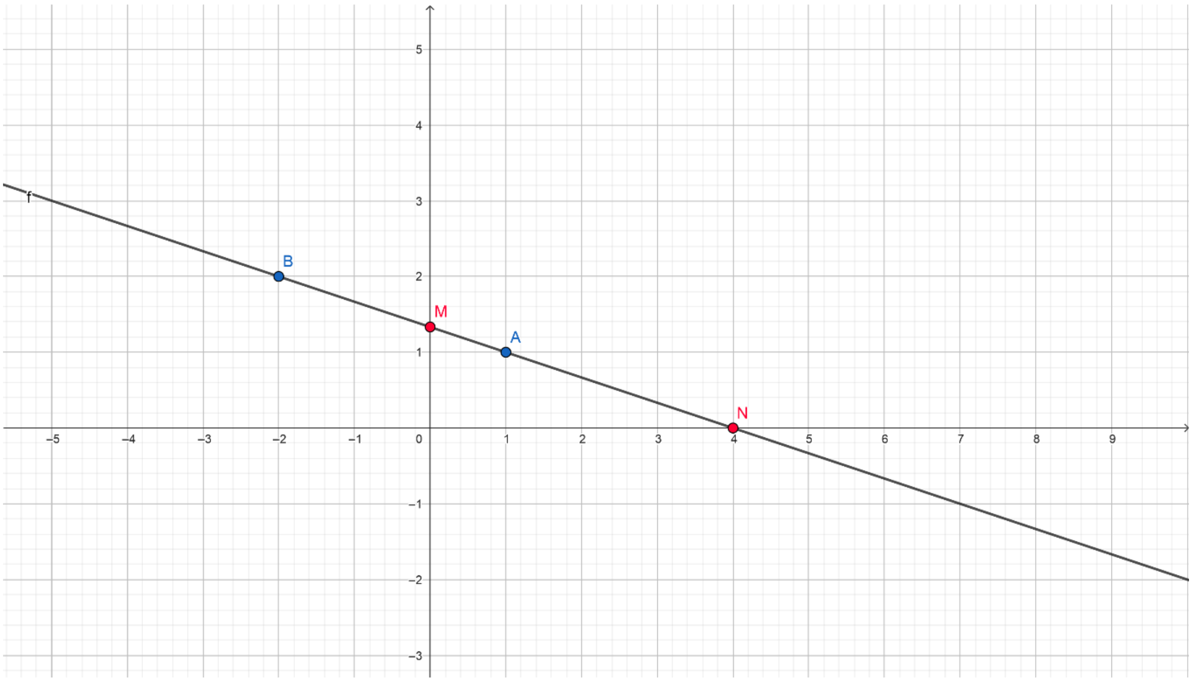
Rješenje

1. način

Prikažimo u koordinatnom sustavu danu linearnu ovisnost. Pravac sadrži točke $A(1, 1)$ i $B(–2, 2)$.



Ali, pravac sadrži i točke $M(0, m)$ i $N(n, 0)$.



S grafa očitavamo da je $n = 4$ i da je m između 1 i 2.

To znači da je $m + n$ između 5 i 6.

2. način

Linearno ovisne veličine x i y zadane su tablično. Za svaki uređeni par (x, y) iz tablice vrijedi $y = ax + b$.
Uvrstimo u formulu linearne ovisnosti (1, 1). $1 = a + b$ (*)
Uvrstimo u formulu linearne ovisnosti (-2, 2). $2 = -2a + b$

Oduzmimo te dvije jednadžbe.

$$1 - 2 = a - (-2a) + b - b$$
$$-1 = a + 2a$$
$$-1 = 3a$$
$$a = -\frac{1}{3}$$

Uvrstimo dobivenu vrijednost u jednadžbu (*).

$$1 = -\frac{1}{3} + b$$
$$b = \frac{4}{3}$$

Izračunali smo vrijednosti za a i b pa linearnu ovisnost zadanu tablicom možemo prikazati formulom $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Sada u formulu uvrstimo $(0, m)$ i $(n, 0)$:

$m = 0 + \frac{4}{3}$ $\qquad$ $0 = -\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}$

$m = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}n = \frac{4}{3}$

$n = 4$

$$m + n = \frac{4}{3} + 4 = 1\frac{1}{3} + 4 = 5\frac{1}{3}$$

Točan odgovor je C.