

Naučimo srednja škola



2. kolo 2022./2023.

1. Trojica poslovnih partnera dogovorili su se da će dobit isplaćivati proporcionalno uloženom vremenu. Ako je Ivan radio dvostruko dulje od Frana, a 20 % kraće vrijeme od Krune, koliko će posto Krunina dobit biti veća od Franove?

A.	B.	C.	D.	E.
140	250	150	350	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Označimo:

I – vrijeme Ivanova rada

F – vrijeme Franova rada

K – vrijeme Krunina rada

$$\text{Ivan radio dvostruko dulje od Frana} \Rightarrow I = 2F \Rightarrow F = \frac{1}{2}I$$

$$\text{Ivan radio 20 \% kraće vrijeme od Krune} \Rightarrow I = 0.8K \Rightarrow K = \frac{5}{4}I$$

$$\text{Dobit će isplaćivati proporcionalno uloženom vremenu} \Rightarrow I_{\text{dobit}} : F_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = I : F : K = I : \frac{1}{2}I : \frac{5}{4}I = 4 : 2 : 5$$

Dakle, $F_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = 2 : 5$, pa je $K_{\text{dobit}} = 2.5 F_{\text{dobit}}$

Primjerice, ako je Fran zaradio 100 eura, Kruno će zaraditi 250 eura. To je 150 eura više.

Prisjetimo se da je 200 eura 100 % više od 100 eura, a 250 eura 150 % više od 100 eura.

Općenito, ako je Franova dobit jednaka x , Krunina je $2.5x$, što je $1.5x$ više. Dakle, Krunina dobit bit će veća od Franove za 150 %.

Točan odgovor je C.

2. Trojica poslovnih partnera dogovorili su se da će dobit isplaćivati proporcionalno kvadratu uloženog vremena. Ako je Ivan radio dvostruko dulje od Frana, a 20 % kraće vrijeme od Krune, koliko će posto Krunina dobit biti veća od Franove?

A.	B.	C.	D.	E.
625	250	725	525	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Označimo:

I – vrijeme Ivanova rada

F – vrijeme Franova rada

K – vrijeme Krunina rada

Ivan radio dvostruko dulje od Frana $\Rightarrow I = 2F \Rightarrow F = \frac{1}{2}I$

Ivan radio 20 % kraće vrijeme od Krune $\Rightarrow I = 0.8K \Rightarrow K = \frac{5}{4}I$

Dobit će isplaćivati proporcionalno kvadratu uloženog vremena

$$\Rightarrow I_{\text{dobit}} : F_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = I^2 : F^2 : K^2 = I^2 : \frac{1}{4}I^2 : \frac{25}{16}I^2 = 16 : 4 : 25$$

Dakle, $F_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = 4 : 25$, pa je $K_{\text{dobit}} = 6.25 F_{\text{dobit}}$

Primjerice, ako je Fran zaradio 100 eura, Kruno će zaraditi 625 eura. To je 525 eura više.

Prisjetimo se da je 200 eura 100 % više od 100 eura, a 625 eura 525 % više od 100 eura.

Općenito, ako je Franova dobit jednaka x , Krunina je $6.25x$, što je $5.25x$ više. Dakle, Krunina dobit bit će veća od Franove za 525 %.

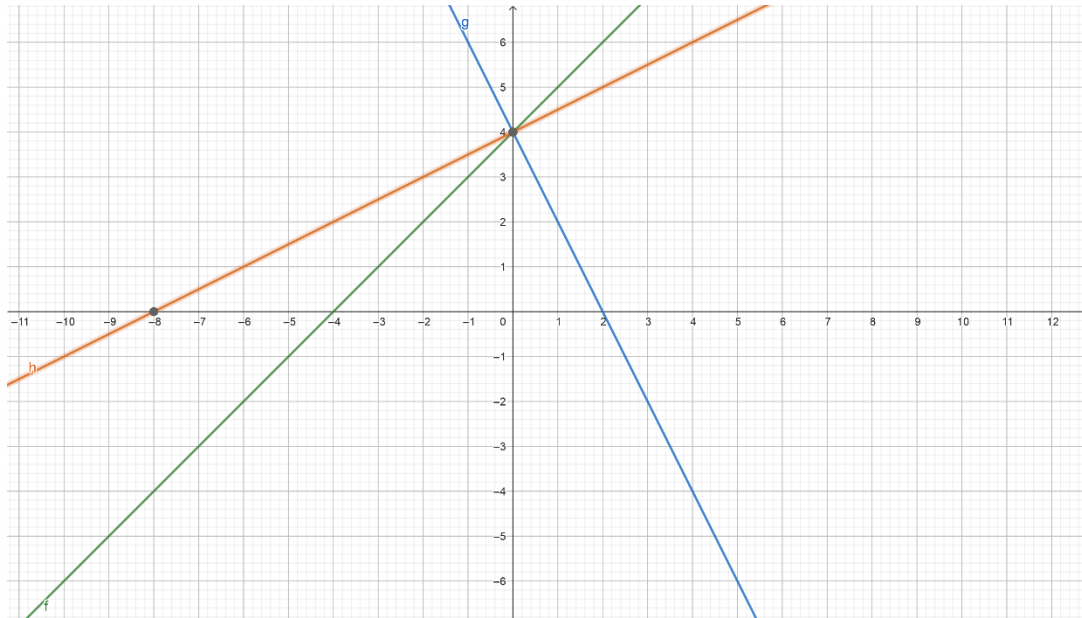
Točan odgovor je D.

3. Površina trokuta što ga s osi apscisa zatvaraju grafovi funkcija $f(x) = x + 4$ i $g(x) = ax + 4$ jednaka je 10. Koji od danih brojeva može biti $f(46) \cdot g(9)$?

A.	B.	C.	D.	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-700	-800	400	800	

Rješenje

Skicirajmo u koordinatnom sustavu pravac $y = x + 4$ i neki pravac kojem je odsječak na y osi jednak 4. Pritom ne smijemo zaboraviti da traženi pravac može rasti ili padati, pa ćemo promatrati dva slučaja.



S obzirom na to da želimo izraziti površinu trokuta što ga pravci zatvaraju s osi apscisa, izračunajmo nultočku pravca $g(x) = ax + 4$.

$$ax + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{4}{a}$$

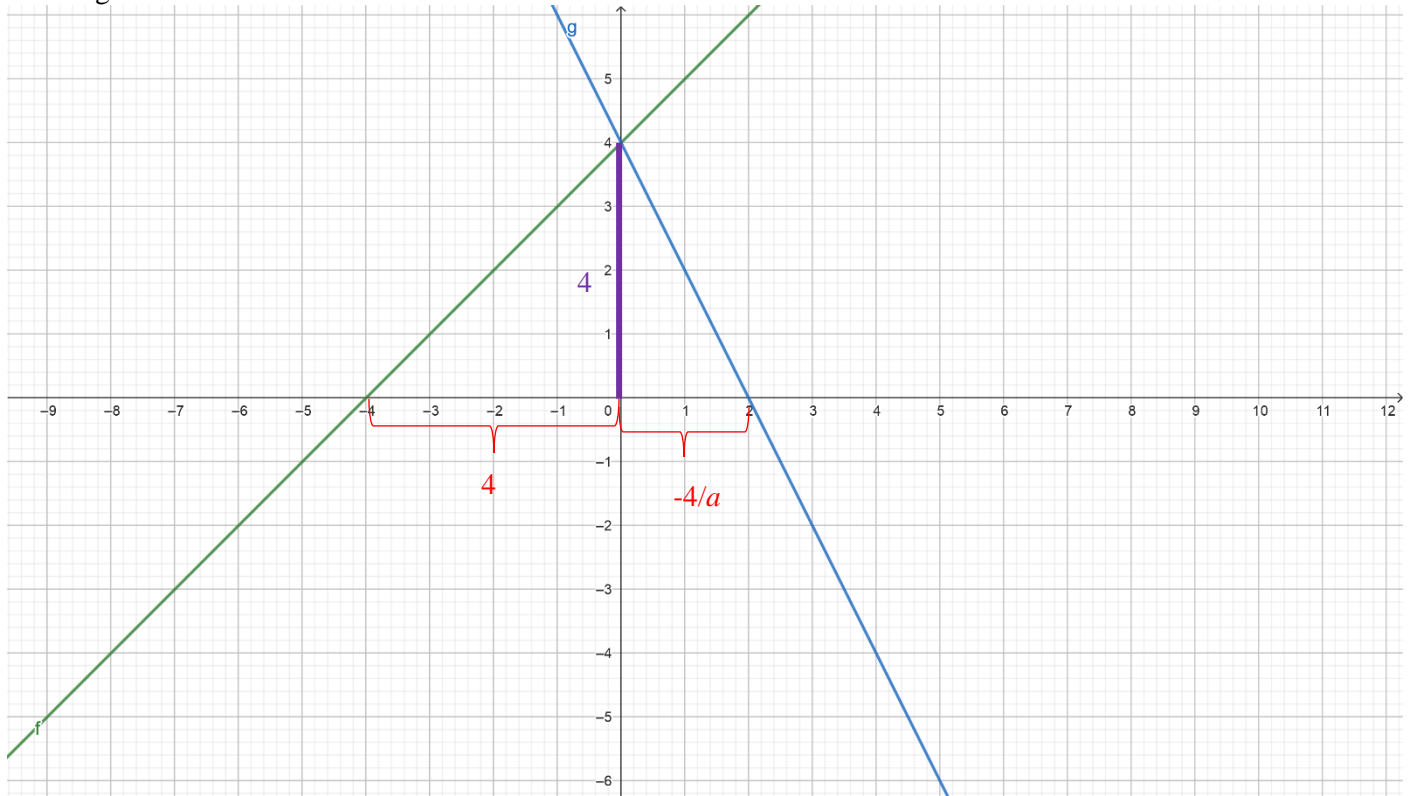
1. način

1. slučaj

$$a < 0$$

Promatramo plavi pravac na slici koji pada. Osnovica trokuta što ga dani pravci zatvaraju s osi apscisa jednaka je

$$4 + \left(-\frac{4}{a}\right) = 4 - \frac{4}{a} = \frac{4a - 4}{a}, \text{ a njegova visina jednaka je } 4.$$



$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a-4}{a} \cdot 4 = \frac{8a-8}{a}$$

Izjednačimo površinu s 10 i riješimo jednadžbu.

$$\frac{8a-8}{a} = 10 \Rightarrow 8a-8=10a \Rightarrow 2a=-8 \Rightarrow a=-4$$

To znači da je $g(x) = -4x + 4$. Izračunajmo vrijednost traženog izraza:

$$f(46) \cdot g(9) = (46+4) \cdot (-36+4) = 50 \cdot (-32) = -1600$$

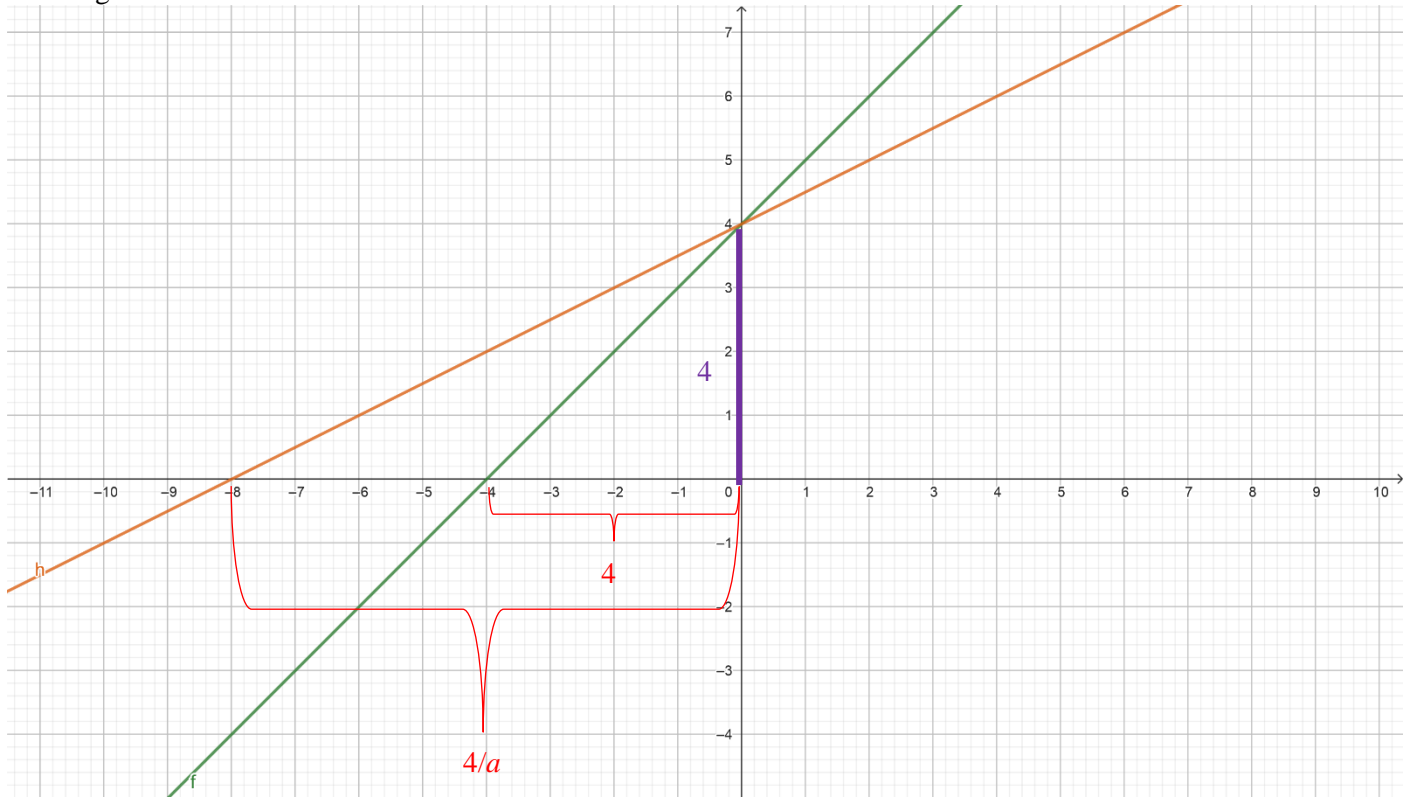
Dobiveni broj nije ponuđen u rješenjima.

2. slučaj

$a > 0$

Promatramo smeđi pravac na slici koji raste. Nultočka pravca je $x_0 = -\frac{4}{a}$, a njena udaljenost od ishodišta je $\left| -\frac{4}{a} \right| = \frac{4}{a}$.

Osnovica trokuta što ga dani pravci zatvaraju s osi apscisa jednaka je $\frac{4}{a} - 4 = \frac{4-4a}{a}$, a njegova visina je jednaka 4.



$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-4a}{a} \cdot 4 = \frac{8-8a}{a}$$

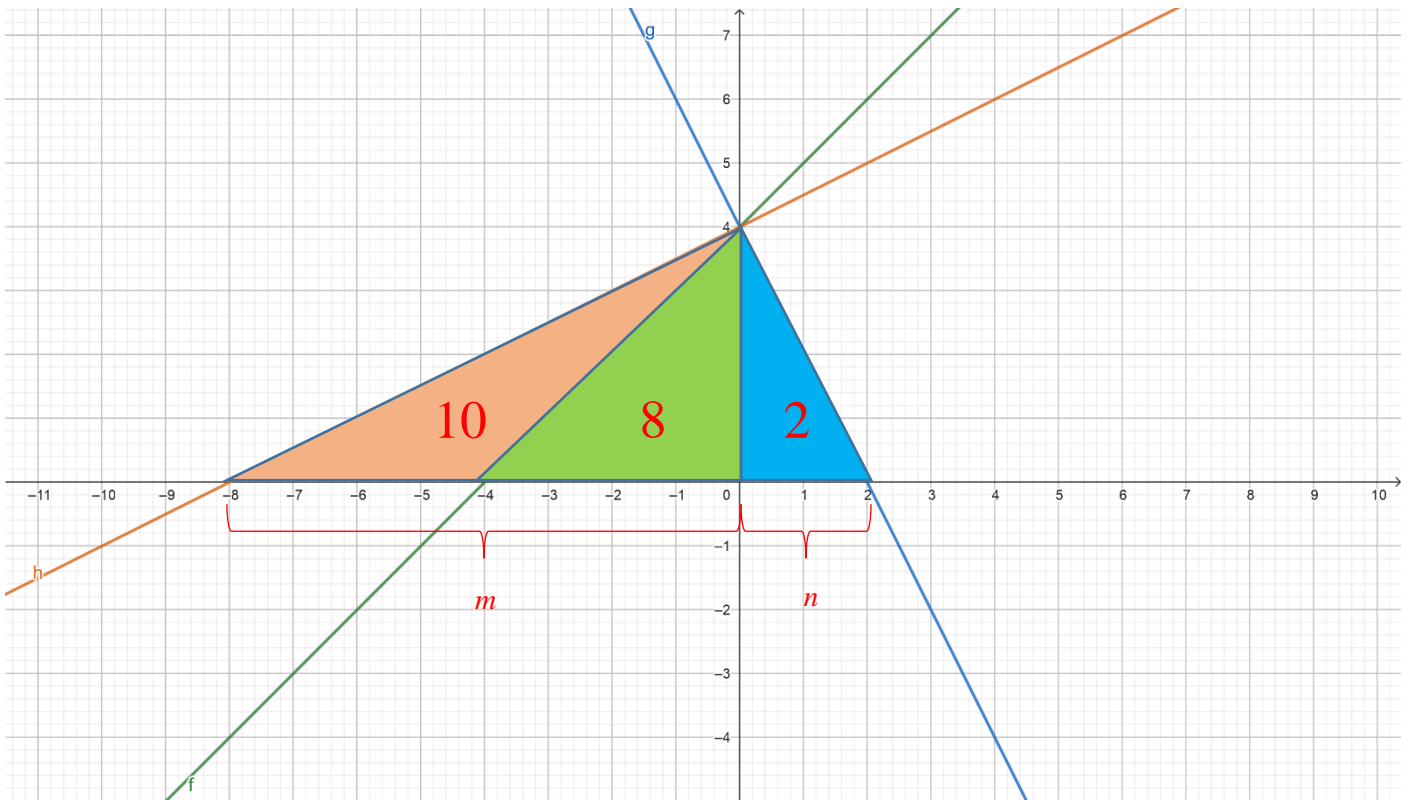
Izjednačimo površinu s 10 i riješimo jednadžbu.

$$\frac{8-8a}{a} = 10 \Rightarrow 8-8a = 10a \Rightarrow 18a = 8 \Rightarrow a = \frac{4}{9}$$

To znači da je $g(x) = \frac{4}{9}x + 4$. Izračunajmo vrijednost traženog izraza:

$$f(46) \cdot g(9) = (46+4) \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot 9 + 4 \right) = 50 \cdot 8 = 400$$

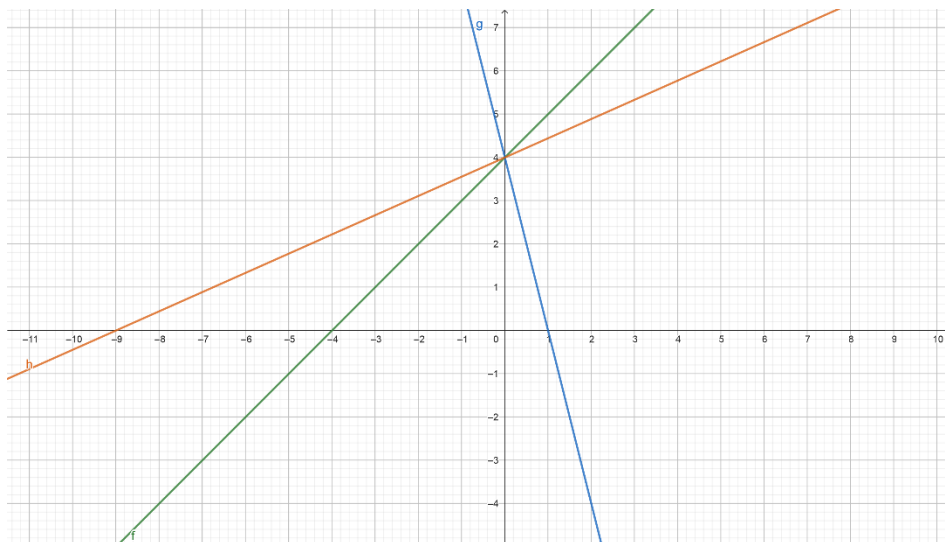
Površina trokuta kojega pravac $f(x) = x + 4$ zatvara s koordinatnim osima jednak $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$, a dana površina je 10. Istaknimo površine na slici.



Sva tri istaknuta trokuta imaju visinu 4, pa im možemo izračunati duljine osnovica.

$$18 = \frac{m \cdot 4}{2} \Rightarrow m = 9 \quad \text{i} \quad 2 = \frac{n \cdot 4}{2} \Rightarrow n = 1$$

Jednadžbe pravaca su: $\frac{x}{-9} + \frac{y}{4} = 1$ i $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} = 1$. Dakle, $g_1(x) = -4x + 4$ i $g_2(x) = \frac{4}{9}x + 4$. Do točnog odgovora dolazi se uvrštavanjem u funkcije koje smo dobili. Nacrtajmo i točnu sliku.



Točan odgovor je C.

4. Koliko postoji prostih brojeva p za koje je $227p + 1$ potpuni kvadrat?

A.	B.	C.	D.	E.
0	1	2	više od 2	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

$227p + 1$ je potpuni kvadrat pa vrijedi $227p + 1 = n^2, n \in \mathbf{N}$.

$$\Rightarrow 227p = n^2 - 1 \Rightarrow 227p = (n-1)(n+1)$$

Broj 227 je također prost, pa je lijeva strana jednakosti umnožak dva prosta broja i jedan od njih mora biti jednak $n - 1$, a drugi $n + 1$.

1. slučaj

$$\begin{cases} n-1 = 227 \\ n+1 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 228 \\ n = p-1 \end{cases} \Rightarrow p-1 = 228 \Rightarrow p = 229 \text{ je prost broj}$$

2. slučaj

$$\begin{cases} n-1 = p \\ n+1 = 227 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = p+1 \\ n = 226 \end{cases} \Rightarrow p+1 = 226 \Rightarrow p = 225 \text{ nije prost broj}$$

Postoji samo jedan prost broj $p = 229$ koji zadovoljava dano svojstvo.

Točan odgovor je B.

5. Vektori $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$ okomiti su, a kut između vektora \vec{a} i \vec{b} je $\frac{\pi}{3}$. Koliko je $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$?

A.	B.	C.	D.	E.
$7\vec{a}^2$	$7\vec{a}\vec{b}$	$10\vec{b}^2$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

$$\text{Vektori } \vec{a} + \vec{b} \text{ i } \vec{a} - \vec{b} \text{ okomiti su} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 9|\vec{b}|^2$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{a}|\cdot\frac{1}{2} + 9|\vec{a}|^2$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}|^2 + 9|\vec{a}|^2$$

$$= 7|\vec{a}|^2$$

Točan odgovor je A.