Zimsko kolo 2022./2023.

MATEMATIKA

M.9. Neka su a, b i c brojevi iz skupa $\{1,2,3,4,5\}$. Koliko postoji uređenih trojki (a, b, c) za koje je broj $2ab+3bc+4ca$ paran?

A.	B.	C.	D.	E.
20	40	80	100	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Primijetimo da su, od tri dana, dva pribrojnika parna ($2ab$ i $4ca$).

Dakle, da bi zbroj bio paran, i treći pribrojnik $3bc$ treba biti paran broj. To će se dogoditi kada je bar jedan od brojeva b i c paran pa trebamo gledati 3 slučaja: b paran i c neparan, b neparan i c paran, b paran i c paran. Jednostavnije nam je pogledati samo slučaj da su obje znamenke neparne, pa od svih mogućih kombinacija te izbaciti.

U danom skupu $\{1,2,3,4,5\}$ parnih znamenaka je 2, a neparnih 3.

Broj a može biti bilo koji od danih brojeva (5 načina), broj b treba biti neparan (3 načina) i broj c treba biti neparan (3 način). Uređenih trojki (a, b, c) gdje su b i c neparni brojevi ima $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.

Svih uređenih trojki je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Dakle, uređenih trojki u kojima nisu b i c istovremeno neparni (pa je bar jedan od njih paran) je $125 - 45 = 80$.

Točan odgovor je C.

M.7. Koliko je četveroznamenkastih brojeva oblika $\overline{3abc}$ djeljivo s 15, ali nije s 11?

A.	B.	C.	D.	E.
više od 61	61	60	59	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Promatramo brojeve 3 000, 3 001, 3 002…, 3 998, 3999. Ukupno ih je 1 000.

Prebrojimo koliko ih je djeljivo s 15.

3 000 = 15 · 200, 3 015 = 15 · 201 … 3 975 = 15 · 265, 3 990 = 15 · 266.

Ukupno ih je 266 – 199 = 67.

Iz skupa od nađenih 67 brojeva trebamo izbaciti brojeve koji su djeljivi s 11.

To možemo napraviti tako da promatramo brojeve 200, 201… 265, 266 i među njima nađemo višekratnike broja 11.

209 = 11 · 19, 220 = 11 · 20 … 253 = 11 · 23, 264 = 11 · 24.

Takvih brojeva je 24 – 18 = 6.

Dakle, četveroznamenkastih brojeva oblika $\overline{3abc}$ djeljivih s 15, ali ne i s 11 je 67 – 6 = 61.

Točan odgovor je B.

M.8. Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - bx + 2022 = 0$ prirodni su brojevi. Koliko postoji takvih jednadžbi?

A.	B.	C.	D.	E.
2	4	6	8	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Prisjetimo se da je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

To znači da za rješenja dane jednadžbe vrijedi: $x_1 + x_2 = -\frac{-b}{1} = b$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{2022}{1} = 2022$.

Budući da su prirodni brojevi, rješenja jednadžbe djelitelji su broja 2 022. Ispišimo ih.

1	2 022	$x_1 + x_2 = 2023$
2	1 011	$x_1 + x_2 = 1013$
3	674	$x_1 + x_2 = 677$
6	337	$x_1 + x_2 = 343$

Broj 337 je prost, pa 2 022 ima 8 djelitelja, tj. 4 para djelitelja.

Napišimo sve jednadžbe:

$$x^2 - 2023x + 2022 = 0$$

$$x^2 - 1013x + 2022 = 0$$

$$x^2 - 677x + 2022 = 0$$

$$x^2 - 343x + 2022 = 0.$$

Točno rješenje je B.