Naučimo

3. kolo 2022./2023.

1. 5.5., 6.6. i 7.5. Koji je najveći prirodni broj x rješenje nejednadžbe $a + x < 8$ za svaki prirodni broj a takav da je $1 \leq a < 5$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6	4	3	7	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Pogledajmo najprije što vrijedi za a.
a je prirodni broj i $1 \leq a < 5$ pa slijedi da a može biti 1, 2, 3 ili 4.
Uvrstimo sve moguće vrijednosti broja a u zadanu nejednadžbu i odredimo x.

$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$
$1 + x < 8$	$2 + x < 8$	$3 + x < 8$	$4 + x < 8$
$x < 8 - 1$	$x < 8 - 2$	$x < 8 - 3$	$x < 8 - 4$
$x < 7$	$x < 6$	$x < 5$	$x < 4$
$x \in \{1,2,3,4,5,6\}$	$x \in \{1,2,3,4,5\}$	$x \in \{1,2,3,4\}$	$x \in \{1,2,3\}$

Tražimo najveći x za kojeg će sve nejednadžbe vrijediti. Brojevi 1, 2 i 3 rješenja su sve četiri nejednadžbe. Najveći među njima je broj 3.

Točan odgovor je C.

2. 5.10. Petar je od papirića kvadratnog oblika duljine stranice 10 cm složio pravokutnik. Koliko navedenih tvrdnji može biti točno ako je Petar upotrijebio najmanje 5, a najviše 8 papirića?

- opseg je pravokutnika 100 cm
- opseg je pravokutnika 120 cm
- opseg je pravokutnika 140 cm
- opseg je pravokutnika 160 cm
- opseg je pravokutnika 180 cm
- površina je pravokutnika 500 cm^2
- površina je pravokutnika 600 cm^2
- površina je pravokutnika 700 cm^2
- površina je pravokutnika 800 cm^2

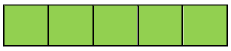
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
9	8	7	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

1. način

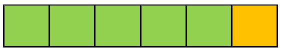
Pogledajmo sve pravokutnike koji se mogu složiti od 5, 6, 7 i 8 kvadratića.

Pravokutnik koji sadrži 5 kvadratića.

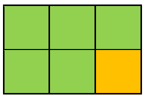


$o = 2(50 + 10) = 2 \cdot 60$ $\quad P = 50 \cdot 10$
$o = 120\ cm$ $\quad P = 500\ cm^2$

Pravokutnici koji sadrže 6 kvadratića.

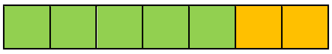


$o = 2(60 + 10) = 2 \cdot 70$ $\quad P = 60 \cdot 10$
$o = 140\ cm$ $\quad P = 600\ cm^2$



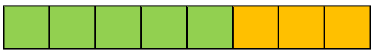
$o = 2(30 + 20) = 2 \cdot 50$ $\quad P = 30 \cdot 20$
$o = 100\ cm$ $\quad P = 600\ cm^2$

Pravokutnik koji sadrži 7 kvadratića.

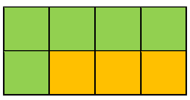


$o = 2(70 + 10) = 2 \cdot 80$ $\quad P = 70 \cdot 10$
$o = 160\ cm$ $\quad P = 700\ cm^2$

Pravokutnici koji sadrže 8 kvadratića.



$o = 2(80 + 10) = 2 \cdot 90$ $\quad P = 80 \cdot 10$
$o = 180\ cm$ $\quad P = 800\ cm^2$

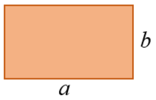


$o = 2(40 + 20) = 2 \cdot 60$ $\quad P = 40 \cdot 20$
$o = 120\ cm$ $\quad P = 800\ cm^2$

2. način

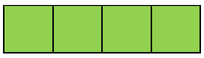
Za svaku tvrdnju koja može biti točna dovoljno je pronaći jedan pravokutnik za kojeg ta tvrdnja vrijedi.
Ako tvrdnja nije točna, onda je potrebno dokazati da ne postoji pravokutnik sa zadanim mjerama.
Pravokutnik treba sadržavati najmanje pet, a najviše osam kvadrata sa stranicom dugom 10 cm.

Uočimo da su duljine stranica pravokutnika iskazane u centimetrima višekratnici broja 10.
Označimo duljine susjednih stranica s a i b.



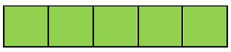
- opseg je pravokutnika 100 cm

Rub pravokutnika sadrži dvije stranice duljine a i dvije stranice duljine b. Ako je opseg pravokutnika 100 cm, onda možemo zaključiti da vrijedi:
$a + b = 50$ cm.



- opseg je pravokutnika 120 cm

$a + b = 60$ cm

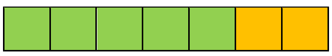


- opseg je pravokutnika 140 cm

$a + b = 70$ cm

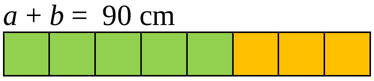
- opseg je pravokutnika 160 cm

$a + b = 80$ cm



- opseg je pravokutnika 180 cm

$a + b = 90$ cm



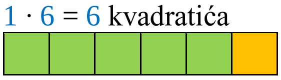
- površina je pravokutnika 500 cm^2

Umnožak a i b je 500 cm^2. Uočimo da je primjerice $a = 30$ cm, ako stranica u sebi sadrži 3 stranice kvadratića. Tako će pravokutnik imati površinu 500 cm^2, ako je umnožak broja stranica kvadratića sadržanih u stranicama pravokutnika jednak 5. Evo konkretnog primjera.

10 cm · 50 cm = 500 cm^2 1 · 5 = 5 kvadratića

- površina je pravokutnika 600 cm^2

1 · 6 = 6 kvadratića

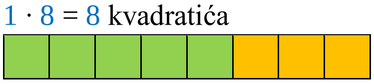


- površina je pravokutnika 700 cm^2

1 · 7 = 7 kvadratića

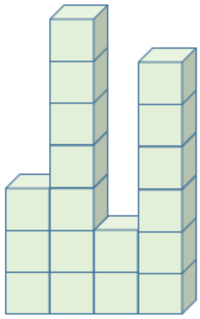
- površina je pravokutnika 800 cm^2

1 · 8 = 8 kvadratića



Sve navedene tvrdnje mogu biti točne.
Točan odgovor je A.

3. 5.11. Laura želi toranj na slici presložiti u kvadar. Kockice ne treba premještati jednu po jednu već, ukoliko je dovoljno oprezna, može u jednom potezu preseliti više kockica koje su jedna iznad druge. Koliko joj je najmanje poteza potrebno da ostvari svoj cilj?



A.	B.	C.	D.	E.
1	2	3	više od 3	ne želimo odgovoriti na pitanje

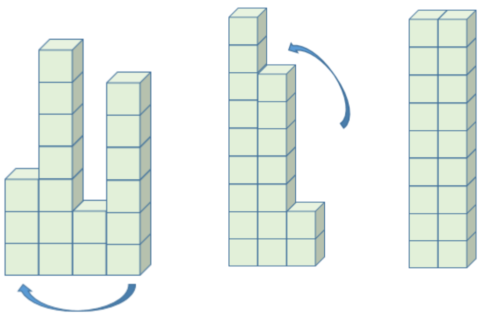
Rješenje

Laura ima 18 kockica koje želi složiti u kvadar.

Ako slažemo kvadar u jednom retku, to znači da umnožak broja stupaca s brojem kockica u jednom stupcu treba biti 18. Pogledajmo redom mogućnosti.

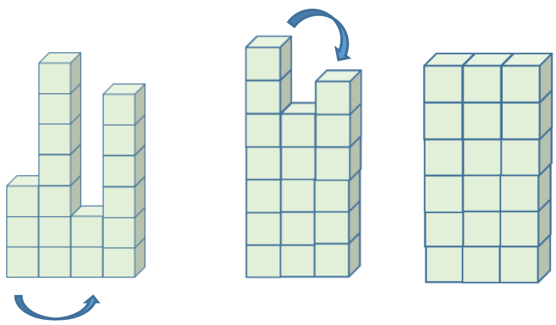
$18 = 1 \cdot 18$ - da bi sve kockice stavila u jedan stupac trebaju joj 3 koraka

$18 = 2 \cdot 9$ - da bi sve kockice stavila u dva stupca trebaju joj 2 koraka



Jasno je da manji broj koraka od 2 ne može postići, a li pogledajmo još jednu mogućnost.

$18 = 3 \cdot 6$ - da bi sve kockice stavila u tri stupca trebaju joj 2 koraka



Za slaganje kvadra koji bi imao više od jednog retka trebalo bi nam više koraka.

Točan odgovor je B.

4. 5.13. Zbroj je svaka četiri uzastopna polja 10. Koji broj se nalazi na 2023. polju?

1			4						…

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
1	3	4	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Označimo brojeve u poljima redom slovima a, b, c, d, …

1	a	b	4	c	d	e	f	g	…

Zbroj svaka četiri uzastopna polja je 10. Stoga vrijede sljedeće jednakosti:

(1) $1 + a + b + 4 = 10$

(2) $a + b + 4 + c = 10$

(3) $b + 4 + c + d = 10$

(4) $4 + c + d + e = 10$

(5) $c + d + e + f = 10.$

Mogli bismo tako nastaviti redom dalje, no pogledajmo najprije možemo li nešto zaključiti iz jednakosti označenih (1), (2), (3), (4) i (5).

Pogledajmo (1) i (2).

$$1 + a + b + 4 = 10$$

$$a + b + 4 + c = 10$$

S obzirom na to su desne strane obe jednakosti jednake, a da se lijeve strane obe jednakosti razlikuju samo u tome da je u (1) broj 1, a u (2) c, zaključujemo da da vrijedi:

$$c = 1.$$

Usporedimo na isti način (2) i (3).

$$a + b + 4 + c = 10$$

$$b + 4 + c + d = 10$$

Zaključujemo:

$$a = d.$$

Pogledajmo (3) i (4).

$$b + 4 + c + d = 10$$

$$4 + c + d + e = 10.$$

Slijedi:

$$b = e.$$

Na isti način iz (4) i (5) dobivamo $f = 4$.

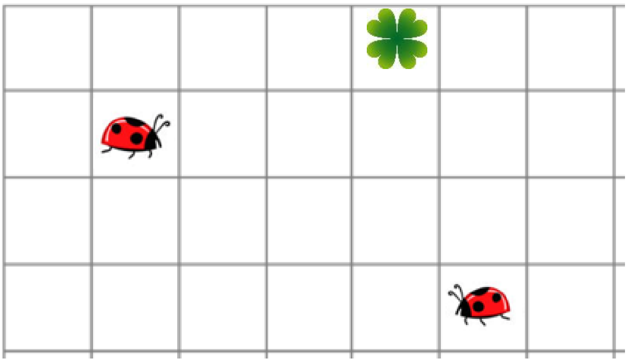
Tako niz brojeva u poljima izgleda kako slijedi.

1	a	b	4	1	a	b	4	1	…

Zaključujemo da se uzastopno ponavlja 1, a, b, 4, 1, a, b, 4, 1, a, b, 4, … odnosno da je svako četvrto polje jednako.
To znači da je na poljima 4, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 4 = 16$, $4 \cdot 5 = 20$,… broj 4.
Nas zanima što sadrži 2023. polje.
Podijelimo 2023 s 4.
$2023 = 4 \cdot 505 + 3$.
Na polju $4 \cdot 505$ je broj 4. Nakon toga idu redom polja 1, a i b, što znači da polje 2023 sadrži b.
Znamo da vrijedi $1 + a + b + 4 = 10$ iz čega slijedi $a + b = 5$, no ne možemo točno znati vrijednosti a i b.
Primjerice, ako je $a = 1$, onda je $b = 4$, no uzmemo li da je $a = 2$, onda vrijedi $b = 3$.
Stoga nije moguće odrediti koji se broj nalazi na 2023. polju.

Točan odgovor je D.

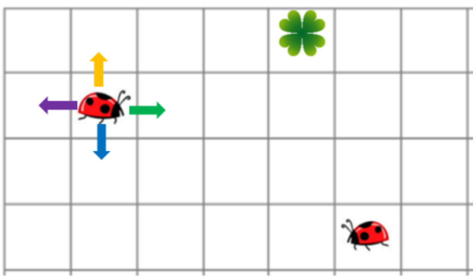
5. 5.15. Bubamara Bara želi sići do svoje prijateljice Mare, ali prije toga želi pojesti djetelinu s četiri lista. Bara se po ploči može kretati ulijevo, udesno, prema gore ili prema dolje. Pomak u susjedno polje nazivamo korak. Na koliko načina Bara može u najmanjem broju koraka doći do Mare preko djeteline?



A. 8	**B.** 4	**C.** 20	**D.** 16	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

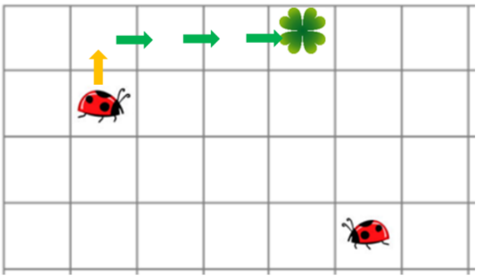
Rješenje

Pogledajmo najprije što može biti jedan korak.
Ljubičastom strelicom označimo korak ulijevo, zelenom strelicom označimo korak udesno, narančastom korak prema gore, a plavom strelicom označimo korak prema dolje.



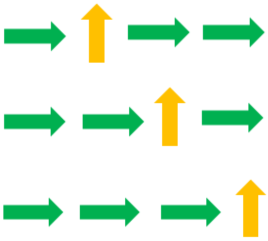
Put možemo promatrati u dvije etape, od Bare do djeteline i od djeteline do Mare.

Najkraći put od Bare do djeteline sadrži ukupno tri koraka udesno i jedan korak prema gore.



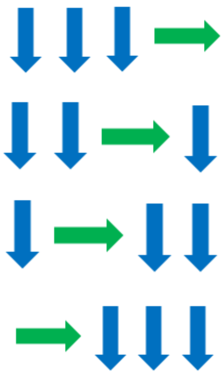
Prikazani put možemo prikazati samo strelicama koje prikazuju korake tog puta.

Prikažimo na isti način i sve ostale mogućnosti.



Dakle, Bara do djeteline može doći u najmanje četiri koraka, a to može napraviti na četiri načina.

Mara se u odnosu na djetelinu nalazi tri koraka prema dolje i jedan korak udesno.
Pogledajmo kojim sve redoslijedom možemo prijeći četiri koraka od kojih su 3 prema dolje i jedan udesno.



Postoje 4 puta duga četiri koraka kojima Bara može od djeteline doći do Mare.
Dakle, promatramo li samo najkraće puteve, Bara do djeteline može doći na 4 načina, a za svaki taj put postoje još 4 načina na koje od djeteline može doći do Mare. Stoga je ukupan broj putova $4 \cdot 4 = 16$.

Točan odgovor je D.

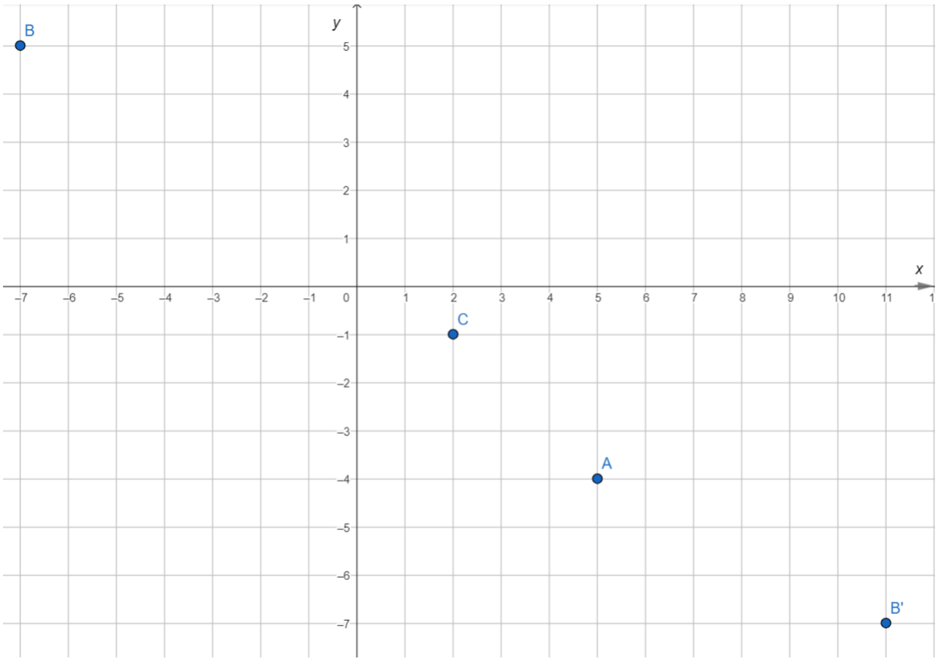
6. 6.5. Točka A ima koordinate $(5, -4)$. Do nje se od točke B dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje. Odredi koordinate točke koja je centralnosimetrična slika točke B pri centralnoj simetriji s centrom u točki $(2, -1)$.

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$(-7, 11)$	$(11, -7)$	$(-13, 11)$	$(11, -13)$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Ako se od točke B do točke A dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje, onda od točke A do točke B dolazimo pomakom od 12 jediničnih dužina ulijevo i 9 jediničnih dužina prema gore.

Ucrtajmo u koordinatnu ravninu najprije točku A, potom točku B, točku C koja je centar simetrije i na kraju točku B', osnosimetričnu sliku točke B pri centralnoj simetriji s centrom u točki C. Točka B' ima koordinate $(11, -7)$.



Točan odgovor je B.

7. 6.9. Kojim od ponuđenih brojeva ne mora biti djeljiv umnožak bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
12	15	24	18	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

1. način

Uzmimo prvih pet uzastopnih prirodnih brojeva i provjerimo je li njihov umnožak djeljiv zadanim brojevima 12, 15, 24 i 18. Ukoliko jest, uzmimo sljedeću petorku brojeva (počevši s brojem 2) te provjerimo djeljivost njihovog umnoška zadanim brojevima itd.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

120 je djeljiv s 12, 15 i 24, ali nije djeljiv s 18.

2. način

Prisjetimo se najprije da je umnožak djeljiv nekim brojem, ako je jedan od faktora djeljiv tim brojem. Pogledajmo je li umnožak bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa svakim od ponuđenih brojeva.
Krenimo s brojem 12.
Broj je djeljiv s 12, ako je djeljiv s 3 i s 4.
Zašto? $12 = 3 \cdot 4$, a brojevi 3 i 4 su relativno prosti, odnosno njihov jedini zajednički djelitelj je broj 1.
Uoči da je $12 = 2 \cdot 6$, ali 2 i 6 nisu relativno prosti pa broj djeljiv s 2 i sa 6 ne mora biti djeljiv i s 12 (npr. 6 i 18 su djeljivi s 2 i sa 6, ali nisu djeljivi s 12).
Iz svega navedenog slijedi da će umnožak bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva biti djeljiv s 12, ako među tim brojevima postoji broj djeljiv s 3 i broj djeljiv s 4.

S obzirom na to da je svaki treći broj djeljiv s 3 i svaki četvrti broj djeljiv s 4 u nizu od 5 uzastopnih brojeva postoji broj djeljiv s 3 i broj djeljiv s 4, što znači da je umnožak tih brojeva djeljiv s 12.

Broj je djeljiv s 15, ako je djeljiv s 3 i s 5 ($15 = 3 \cdot 5$, a brojevi 3 i 5 su relativno prosti).

S obzirom na to da je svaki peti broj djeljiv s pet u uzastopnoj petorki brojeva sigurno je jedan djeljiv s 5. Kako smo već pokazali da u petorki postoji broj djeljiv s 3, tako je umnožak svake uzastopne petorke brojeva djeljiv i brojem 15.

Broj je djeljiv s 24, ako je djeljiv s 3 i s 8 ($24 = 3 \cdot 8$, a brojevi 3 i 8 su relativno prosti).

Svaki osmi prirodni broj je djeljiv s 8 pa među 5 uzastopnih prirodnih brojeva ne mora biti broj djeljiv s 8. Međutim kako je svaki drugi broj paran, među pet uzastopnih prirodnih brojeva sigurno su dva parna (ako petorka počinje parnim brojem u njoj će biti i tri parna broja), a jedan od njih je djeljiv s 4. Iz svega navedenog možemo zaključiti da među pet uzastopnih prirodnih brojeva postoji broj djeljiv s 2, broj djeljiv s 3 i broj djeljiv s 4, a onda je umnožak tih brojeva djeljiv s $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Kako je pitanje zadatka „Kojim od ponuđenih brojeva ne mora biti djeljiv umnožak bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva?“, a mi smo pokazali da je umnožak djeljiv s tri od ponuđena četiri broja, tako možemo zaključiti da umnožak ne mora biti djeljiv s 18. Ipak pogledajmo zašto.

Broj je djeljiv s 18, ako je djeljiv s 2 i s 9.

Svaki je deveti broj djeljiv s 9 pa među pet uzastopnih brojeva ne mora biti višekratnik broja 9.
$9 = 3 \cdot 3$ pa bi svaka uzastopna petorka prirodnih brojeva bila djeljiva s 18 i kada bi u svakoj petorki uzastopnih prirodnih brojeva bila dva broja djeljiva s 3. No niti to ne vrijedi. Evo primjera.
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ $\quad$ $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ $\quad$ $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$

Točan odgovor je D.

8. 6.10. Za sve dane od sutrašnjeg (3. 3. 2023.) do kraja mjeseca (31. 3. 2023.) pomnožite broj dana, broj mjeseca i broj godine te dobivene umnoške zbrojite. Koji broj ste dobili?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2 925 258	2 992 017	2 888 844	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Zapišimo brojevni izraz.

$$3 \cdot 3 \cdot 2023 + 4 \cdot 3 \cdot 2023 + 5 \cdot 3 \cdot 2023 + \cdots + 29 \cdot 3 \cdot 2023 + 30 \cdot 3 \cdot 2023 + 31 \cdot 3 \cdot 2023$$
$$= (3 + 4 + 5 + \cdots + 29 + 30 + 31) \cdot 3 \cdot 2023$$

Uočimo da brojeve u zagradi možemo izračunati koristeći Gaussovu dosjetku. Zbroju ćemo dodati 1 i 2 koje ćemo na kraju oduzeti.

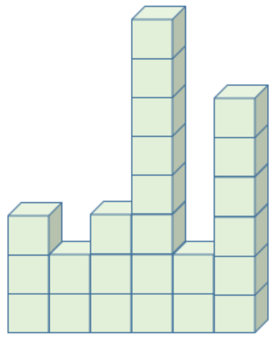
$$3 + 4 + 5 + \cdots + 29 + 30 + 31 = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 29 + 30 + 31}_{} - 1 - 2$$
$$= 31 \cdot 15 + 31 - 1 - 2$$
$$= 493$$

Preostaje nam još do kraja izračunati vrijednost zadanog brojevnog izraza.

$$493 \cdot 3 \cdot 2023 = 2\,992\,017$$

Točan odgovor je B.

9. 6.14. Laura želi toranj na slici presložiti u kvadar. Kockice ne treba premještati jednu po jednu već, ako je dovoljno oprezna, može u jednom potezu preseliti više kockica koje su jedna iznad druge. Koliko joj je najmanje poteza potrebno da ostvari svoj cilj?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2	3	4	više od 4	ne želimo odgovoriti na pitanje

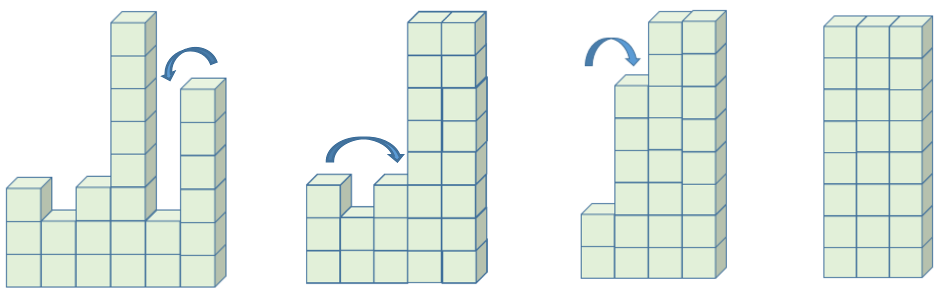
Rješenje

Laura ima 24 kockice koje želi složiti u kvadar. Ako slažemo kvadar u jednom retku, to znači da umnožak broja stupaca s brojem kockica u jednom stupcu treba biti 24. Pogledajmo redom mogućnosti.

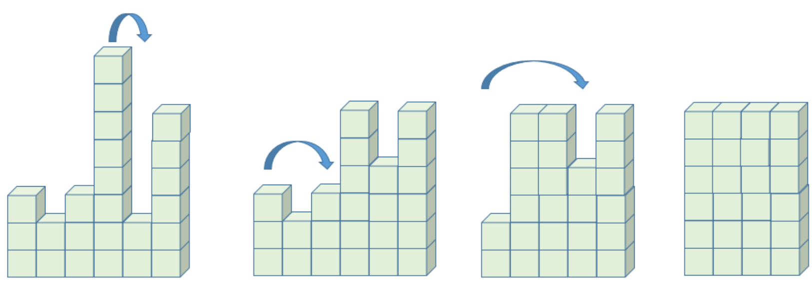
$24 = 1 \cdot 24$ - da bi sve kockice stavila u jedan stupac treba joj 5 koraka

$24 = 2 \cdot 12$ - da bi sve kockice stavila u 2 stupca treba joj više od 4 koraka jer mora premjestiti 4 stupca, a nakon toga broj kockica u stupcima neće biti jednak i treba još jedno premještanje.

$24 = 3 \cdot 8$ - da bi sve kockice stavila u 3 stupca treba joj 3 koraka



$24 = 4 \cdot 6$ - da bi sve kockice stavila u 3 stupca treba joj 3 koraka

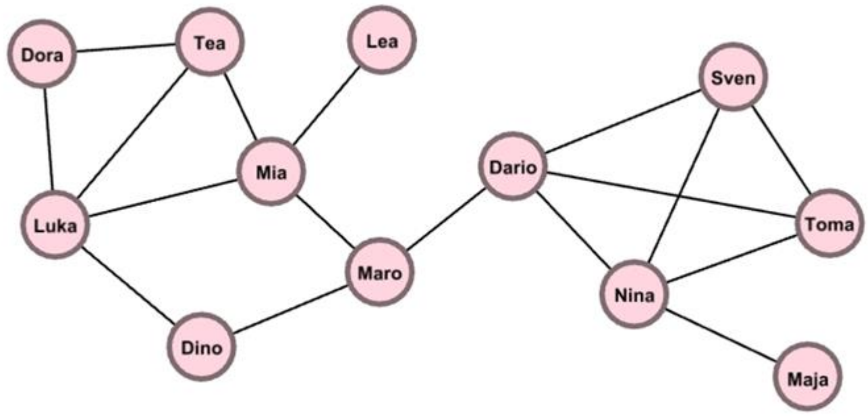


$24 = 6 \cdot 4$ - da bi sve kockice stavila u 6 stupca treba joj 4 koraka

$24 = 8 \cdot 3$ - da bi sve kockice stavila u 8 stupca treba joj 4 koraka

Za slaganje kvadra koji bi imao više od jednog retka trebalo bi nam više koraka.
Točan odgovor je B.

10. 6.15. Lea želi pomoću svojih prijatelja Tomi poslati poruku. Koliko ima različitih putova kojima ta poruka može doći do Tome, a da, osim Tome, poruku ne primi više od pet Leinih prijatelja? Poruke se smiju slati samo između osoba koje su povezane crtama, a ista osoba poruku ne može dobiti dva puta.

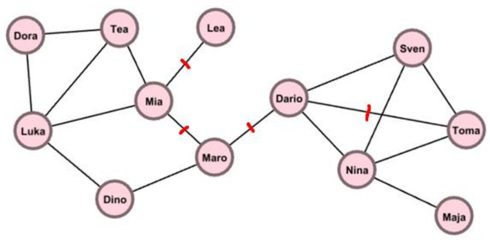


A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
3	4	5	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Poruka bi trebala prijeći put koji prije Tome ne uključuje više od 5 Leinih prijatelja, što znači da put može uključivati najviše pet Leinih prijatelja (osim Tome).

Pogledajmo najprije koji je najkraći put kojim poruka može doći od Lee do Tome.



Lea — Mia — Maro — Dario — Toma

Najkraći put ima četiri koraka, a u njega je uključeno troje Leinih prijatelja. Ne postoji drugi put duljine četiri koraka.

Potražimo putove koji su za korak dulji, što znači da im je duljina pet koraka, a uključuju četiri Leina prijatelja.

Lea — Mia — Maro — Dario — Nina — Toma

Lea — Mia — Maro — Dario — Sven — Toma

Preostaje nam istražiti putove duljine šest koraka, koji uključuju pet Leinih prijatelja.

Lea — Mia — Maro — Dario — Nina — Sven — Toma

Lea — Mia — Maro — Dario — Sven — Nina — Toma

Lea — Mia — Luka — Dino — Maro — Dario — Toma

Zaključujemo da postoji šest različitih putova, koji zadovoljavaju uvjete zadatka, kojima poruka može stići od Lee do Tome.

Točan odgovor je D.

11. 7.6. Točka *A* vektora $\overrightarrow{AB}$ ima koordinate (5, −4) . Do nje se od točke *B* dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje. U koju će se točku translatirati točka *C* (−2, 4) za vektor $\overrightarrow{AB}$?

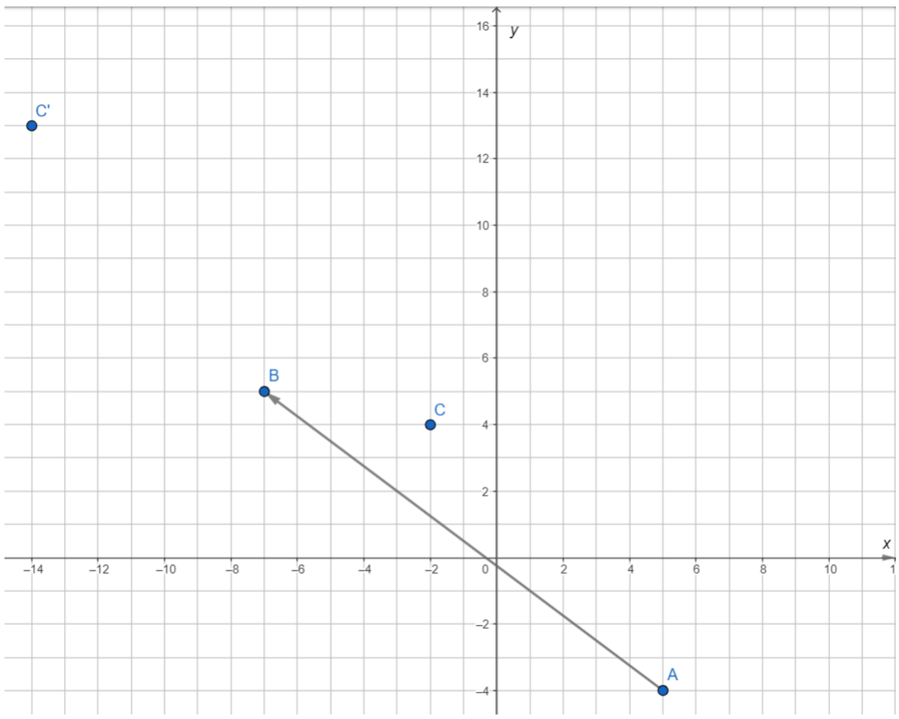
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
(−14, 13)	(10, 13)	(−14, −5)	(10, −5)	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

1. način

Ako se od točke *B* do točke *A* dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje, onda od točke *A* do točke *B* dolazimo pomakom od 12 jediničnih dužina ulijevo i 9 jediničnih dužina prema gore.

Ucrtajmo u koordinatnu ravninu najprije točku *A*, potom točku *B* i točku *C*. Translatirajmo točku *C* za vektor $\overrightarrow{AB}$ i očitajmo koordinate dobivene točke.



2. način

Ako se od točke *B* do točke *A* dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje, onda od točke *A* do točke *B* dolazimo pomakom od 12 jediničnih dužina ulijevo i 9 jediničnih dužina prema gore.

Točka *A* ima koordinate (5, −4), stoga će točka *B* imati koordinate $(5-12,-4+9)=(-7,5)$.

Točka *B* ujedno je slika točke *A* pri translaciji za vektor $\overrightarrow{AB}$, pa koordinate slike točke *C* pri translaciji za vektor $\overrightarrow{AB}$ možemo odrediti na isti način na koji smo odredili i koordinate točke *B*.

Dakle, koordinate slike točke *C* su $(-2-12,4+9)=(-14,13)$.

Točan odgovor je A.

12. 7.9. Ako je na brojevnom pravcu $A\left(\frac{19}{9}\right)$ i $C\left(\frac{17}{7}\right)$, za koju od navedenih točaka vrijedi $|AB| = 4|BC|$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$B\left(\frac{113}{63}\right)$	$B\left(\frac{118}{63}\right)$	$B\left(\frac{149}{63}\right)$	$B\left(\frac{49}{21}\right)$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

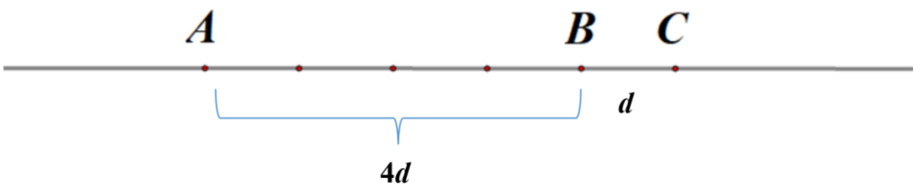
Zapišimo najprije koordinate točaka A i C tako da imaju zajednički nazivnik i skicirajmo brojevni pravac.
$\frac{19}{9} = \frac{133}{63}, \frac{17}{7} = \frac{153}{63}$

Vrijedi $A\left(\frac{133}{63}\right)$ i $C\left(\frac{153}{63}\right)$. S obzirom na to da je vrijedi $\frac{153}{63} > \frac{133}{63}$, Točka C se na brojevnome pravcu nalazi desno od točke A. Udaljenost točaka A i C jednaka je $\frac{153}{63} - \frac{133}{63} = \frac{20}{63}$, odnosno $|AC| = \frac{20}{63}$.

Tražimo točku B koja je od točke A udaljena 4 puta više nego točka C.

1. slučaj: točka B_1 s koordinatom x_1 na brojevnom je pravcu između točaka A i C.

Prikažimo to grafički.



Točka B_1 dijeli dužinu $\overline{AC}$ u omjeru 4 : 1. To znači da je točka B_1 na brojevnome pravcu $\frac{1}{5}$ $|AC|$ lijevo od točke C. Stoga je koordinata x_1 točke B_1 jednaka koordinati točke C umanjenoj za $\frac{1}{5}$ $|AC|$.

$$x_1 = \frac{17}{7} - \frac{1}{5}\,|AC|$$

$$x_1 = \frac{17}{7} - \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{63}$$

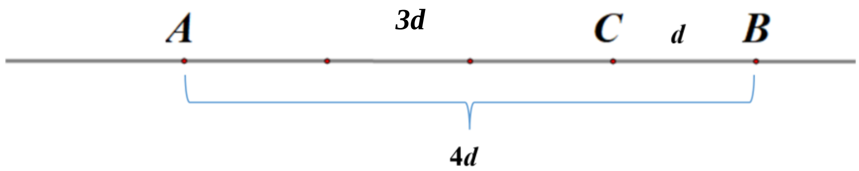
$$x_1 = \frac{153}{63} - \frac{4}{63}$$

$$x_1 = \frac{149}{63}$$

Točka $B_1\left(\frac{149}{63}\right)$ je među ponuđenim odgovorima pa je rješenje zadatka. Svejedno, ovdje ćemo odrediti i koordinatu duge točke koja ispunjava uvjete zadatka.

2. slučaj: točka B_2 s koordinatom x_2 na brojevnom je pravcu desno od točke *C*.

Prikažimo to grafički.



Točka B_2 s koordinatom x_2 nalazi se na brojevnome pravcu desno od točke *C*, a od nje je udaljena za $\frac{1}{3}$ duljine $\overline{AC}$, odnosno vrijedi:

$$x_2 = \frac{17}{7} + \frac{1}{3}|AC|$$

$$x_2 = \frac{17}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{63}$$

$$x_2 = \frac{17}{7} + \frac{20}{189}$$

$$x_2 = \frac{479}{189}$$

Točan odgovor je C.

13. 7.10. i 8.10. Koliko uređenih parova (m, n) prirodnih brojeva zadovoljava jednakost $7m + 8n = 504$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
10	9	8	manje od 8	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Iskažimo n pomoću m.

$$7m + 8n = 504$$

$$8n = 504 - 7m \mid : 8$$

$$n = \frac{504}{8} - \frac{7m}{8}$$

$$n = 63 - \frac{7m}{8}$$

Da bi n bio prirodan broj treba vrijediti: $\frac{7m}{8} \in \mathbb{N}$ i $63 - \frac{7m}{8} > 0$ iz čega slijedi: $\frac{7m}{8} < 63$.
Ako je $\frac{7m}{8}$ prirodan broj, onda je $7m$ višekratnik broja 8, odnosno m je višekratnik broja 8.
Kako vrijedi $\frac{7m}{8} < 63$, tako je $7m < 8 \cdot 63$.

$63 = 7 \cdot 9$ pa vrijedi:

$7m < 8 \cdot 7 \cdot 9$ što znači da je $m < 8 \cdot 9$.

Zaključimo: m je višekratnik broja 8 i $m < 9 \cdot 8$ što znači da m može biti 8, $2 \cdot 8$, $3 \cdot 8$, $4 \cdot 8$, $5 \cdot 8$, $6 \cdot 8$, $7 \cdot 8$ i $8 \cdot 8$.
Postoji 8 uređenih parova (m, n) za koje vrijedi zadana jednakost.
Riješili smo zadatak, no pogledajmo koji su to uređeni parovi:

$m = 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 8}{8}$
$n = 56$
(8, 56)

$m = 2 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 2 \cdot 8}{8}$
$n = 49$
(16, 49)

$m = 3 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 3 \cdot 8}{8}$
$n = 42$
(24, 42)

$m = 4 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 4 \cdot 8}{8}$
$n = 35$
(32, 35)

$m = 5 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 5 \cdot 8}{8}$
$n = 28$
(40, 28)

$m = 6 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 8}{8}$
$n = 21$
(48, 21)

$m = 7 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 7 \cdot 8}{8}$
$n = 14$
(56, 14)

$m = 8 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 8 \cdot 8}{8}$
$n = 7$
(64, 7)

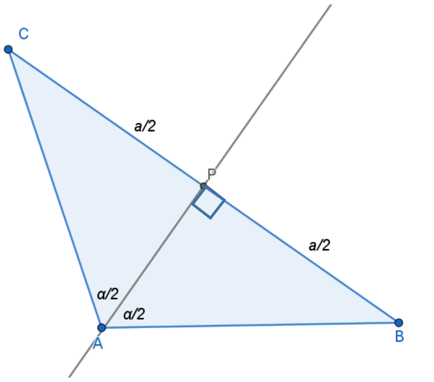
Točan odgovor je C.

14. 7.14. U trokutu ABC pravac koji sadrži simetralu stranice $\overline{BC}$ podudara se sa simetralom tupog kuta veličine α nasuprot nje. Kolika je veličina većeg kuta što ga simetrala kuta pri vrh B zatvara sa stranicom $\overline{AC}$?

A.	B.	C.	D.	E.
$35°+\frac{3}{4}\alpha$	$45°+\frac{3}{4}\alpha$	$90°-\frac{1}{2}\alpha$	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

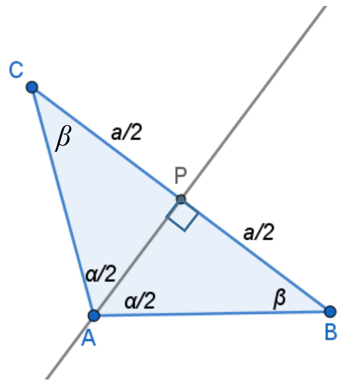
Nacrtajmo skicu. U trokutu ABC pravac koji sadrži simetralu stranice $\overline{BC}$ podudara se sa simetralom kuta veličine α nasuprot nje.



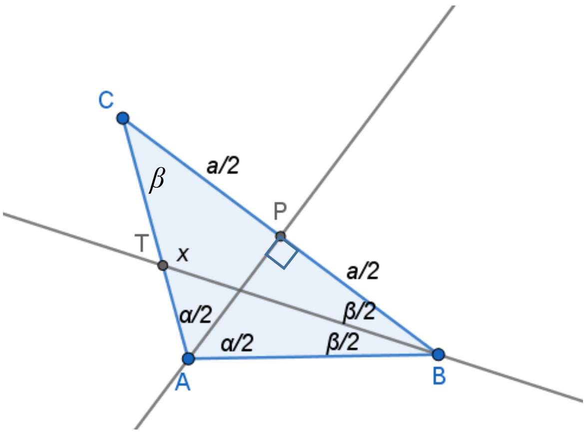
ΔABP i ΔACP imaju zajedničku stranicu $\overline{AP}$, a u oba su trokuta kutovi uz tu stranicu veličina $\frac{\alpha}{2}$ i 90°.

Zaključujemo da su trokuti sukladni prema poučku K-S-K. Iz navedenoga slijedi da su kutovi trokuta ABC s vrhovima u točkama B i C jednakih veličina. Označimo ih s β.

Našoj skici još nedostaje simetrala kuta pri vrhu B.



Istaknimo još točku T u kojoj simetrala kuta pri vrhu B siječe $\overline{AC}$ te označimo s x veličinu kuta koju trebamo odrediti.



S obzirom na to da je u svim ponuđenim odgovorima veličina traženog kuta iskazana pomoću α, iskažimo β pomoću α. Pogledajmo zbroj veličina kutova zadanog trokuta. Vrijedi:

$$\alpha + 2\beta = 180°$$

iz čega slijedi

$$2\beta = 180° - \alpha$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$$

$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Pogledajmo kutove u ΔABT. Za njihove veličine vrijedi:

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + 180° - x = 180°$$

$$\alpha + \frac{\beta}{2} - x = 0$$

$$x = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

Umjesto β u jednakost uvrstimo $90° - \frac{\alpha}{2}$.

$$x = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

$$x = \alpha + \frac{90° - \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$x = \alpha + \frac{90°}{2} - \frac{\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$x = \alpha + 45° - \frac{\alpha}{4}$$

$$x = 45° + \frac{3\alpha}{4}$$

Točan odgovor je B.

15. 8.3. Koji eksponent ima kvadrat izraza $1^2 + 4^2 + 8^2$ zapisan kao potencija broja 3?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
8	4	6	ne može se tako zapisati	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Izračunajmo najprije kvadrat zadanoga izraza.

$(1^2 + 4^2 + 8^2)^2 = (1 + 16 + 64)^2 = 81^2$

Zapišimo 81 kao potenciju s bazom 3.

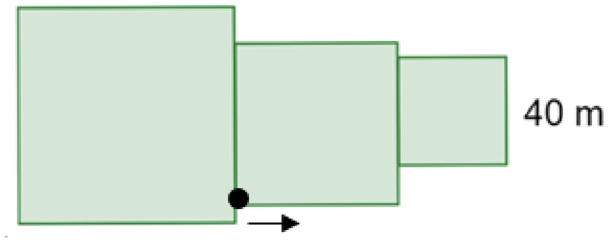
$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

Vrijedi: $81^2 = (3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$.

Kvadrat zadanog izraza zapisan kao potencija s bazom 3 ima eksponent 8.

Točan odgovor je A.

16. 8.13. Park na crtežu sastoji se od tri kvadrata. Stranica najvećeg kvadrata dva je puta dulja od stranice najmanjeg kvadrata, a kvadrat u sredini ima stranicu koja je dulja od stranice najmanjeg kvadrata za polovinu njezine duljine. Mislav svakoga dana trči 2 km po rubu tog parka. Na kojem kvadratu se nalazi 250 m prije cilja, ako kreće udesno s označenog mjesta?



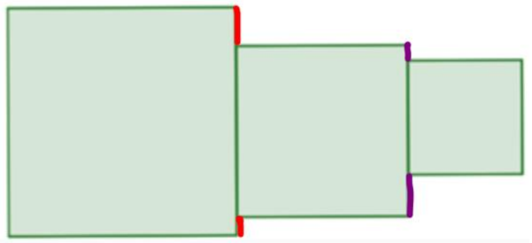
A. nije moguće odrediti	B. najmanjem	C. srednjem	D. najvećem	E. ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Izračunajmo najprije koliko je dug rub parka.

Duljina stranice srednjeg kvadrata dulja je od duljine stranice malog kvadrata za polovinu njezine duljine što znači za 20 m. Stoga je stranica srednjeg kvadrata duga 40 m + 20 m = 60 m.

Najveći kvadrat ima dva puta dulju stranicu od duljine stranice najmanjeg kvadrata pa mu je stranica duga $2 \cdot 40$ m = 80 m.



Uočimo još da kvadrati nisu pozicionirani tako da su dvije dužine podebljane crvenom jednakih duljina. Ono što znamo o njihovim duljinama jest da je njihov zbroj jednak duljini stranice velikog kvadrata umanjenoj za duljinu stranice srednjega kvadrata što iznosi 80 m – 60 m = 20 m.

Isto tako niti dvije dužine podebljane ljubičastom nisu jednako duge. Zbroj njihovih duljina jednak je duljini stranice srednjeg kvadrata umanjenoj za duljinu stranice malog kvadrata što iznosi 60 m – 40 m = 20 m.

Tako se rub parka sastoji od triju stranica velikog kvadrata, zatim dužinama koje su na crtežu podebljane crvenom bojom, dvjema stranicama srednjeg kvadrata, dužinama na crtežu podebljanima ljubičastom bojom te trima stranicama maloga kvadrata.

Stoga je duljina ruba jednaka:

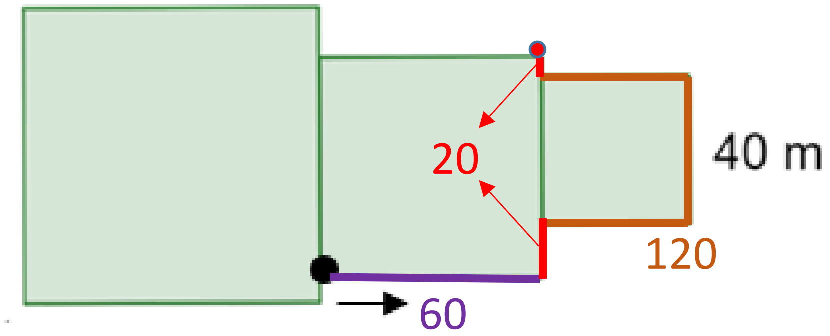
$3 \cdot 80$ m + 20 m + $2 \cdot 60$ m + 20 m + $3 \cdot 40$ m = 520 m.

1. način

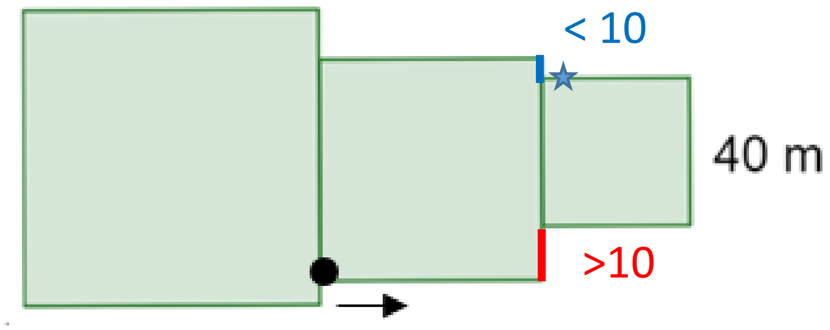
Treba trčati 2 000 m – 250 m = 1 750 m.

Tri kruga su 520 m $\cdot$ 3 = 1 560 m.

Četvrti krug treba trčati 1 750 m – 1 560 m = **190 m**.



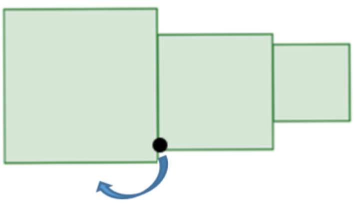
Jer je **60** + **120** + **20** = 200 > 190 od ● se treba vratiti za 10 m.



Nakon otrčanih 1 750 m nalazit će se na najmanjem kvadratu (★).

2. način

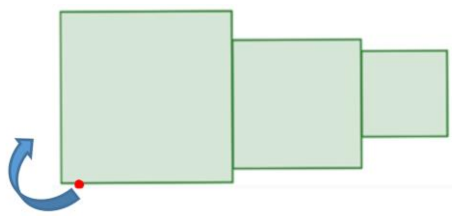
S obzirom na to da Mislav trči 2 km = 2 000 m, a 4 puna kruga imaju duljinu 2 080 m, on se zaustavlja 80 metara prije pozicije s koje počinje trčati. Pitanje je na kojem se kvadratu nalazi 250 m prije svog cilja što znači da tražimo mjesto koje je udaljeno za 80 m + 250 m = 330 m od pozicije s koje Mislav počinje trčati.

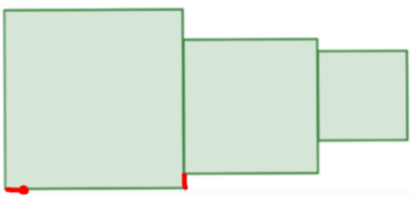


Rub parka koji je dio velikog kvadrata dug je 3 · 80 m + 20 m = 260 m. Dodamo li toj duljini još gornju duljinu stranice srednjeg kvadrata imamo 260 m + 60 m = 320 m. Dakle, od gornjeg desnog vrha srednjeg kvadrata nedostaje još 10 m do pozicije koju tražimo. Kako je već objašnjeno na prvom crtežu ovoga rješenja, ljubičaste dužine imaju ukupnu duljinu 20 m, a gornja je kraća od donje što znači da je njena duljina kraća od 10 m. Stoga je tražena pozicija na gornjoj stranici malog kvadrata.

3. način

S obzirom na to da Mislav trči 2 km = 2 000 m, a 4 puna kruga imaju duljinu 2080 m, on se zaustavlja 80 metara prije starta što je na označenom mjestu na donjoj stranici velikog kvadrata. Uočimo i da su dužine istaknute crvenom na slici desno jednakih duljina.





Pogledajmo na kojem se mjestu Mislav nalazio 250 m prije označene crvene točke. Da bismo to odredili od označene ćemo točke zbrajati redom duljine dužina u smjeru koji nam pokazuje strelica.

Dvije stranice velikog kvadrata zajedno su duge 2 · 80 m = 160 m, a stranica srednjeg kvadrata (gornja) 60 m. To je zajedno 160 m + 60 m = 220 m. Treba tome još pridodati dio donje stranice i dio desne stranice velikog kvadrata ukupno dugih 20 m. Dakle od mjesta gdje Mislav završava svoje trčanje do gornjeg desnog vrha srednjeg kvadrata je 220 m + 20 m = 240 m. S obzirom na to da je 20 m ukupna duljina ljubičasto istaknutih dužina na prvome crtežu ovog rješenja, a da je gornja ljubičastom bojom istaknuta dužina bitno kraća od donje, možemo zaključiti da je ta gornja dužina kraća od 10 m. Navedeno znači da je 10 metara od gornjeg desnog vrha srednjega kvadrata idemo li od tog vrha po rubu parka ulijevo, negdje na gornjoj stranici malog kvadrata.

Točan odgovor je B.