Naučimo

3. kolo 2022./2023.

1. Trojica poslovnih partnera dogovorili su se da će dobit isplaćivati obrnuto proporcionalno vremenu odsustva s posla. Ivan je tijekom veljače bio odsutan 4 dana, Fran dvostruko dulje od Ivana, a Kruno 50 % kraće vrijeme nego Ivan i Fran zajedno. Ako je Krunina dobit u veljači bila za 2 100 € manja od Ivanove, koliko je eura dobio Fran?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2 100 €	8 400 €	4 200 €	3 150 €	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Označimo:
I – vrijeme Ivanova odsustva s posla
F – vrijeme Franova odsustva s posla
K – vrijeme Krunina odsustva s posla

Ivan je tijekom veljače bio odsutan 4 dana $\Rightarrow I = 4$

Fran dvostruko dulje od Ivana $\Rightarrow F = 8$

Kruno 50 % kraće vrijeme nego Ivan i Fran zajedno $\Rightarrow K = (4 + 8) \cdot 0.5 = 6$

Dobit će isplaćivati obrnuto proporcionalno vremenu odsustva s posla

$$\Rightarrow I_{\text{dobit}} : F_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = \frac{1}{I} : \frac{1}{F} : \frac{1}{K} = \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{6} = 6 : 3 : 4$$

Dakle, $I_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = 6 : 4 = 3 : 2$, pa je $I_{\text{dobit}} = 1.5\, K_{\text{dobit}}$

Krunina dobit u veljači bila je za 2 100 € manja od Ivanove $\Rightarrow I_{\text{dobit}} = K_{\text{dobit}} + 2\,100$

Izjednačimo:
$1.5\, K_{\text{dobit}} = K_{\text{dobit}} + 2\,100$
$0.5\, K_{\text{dobit}} = 2\,100$
$K_{\text{dobit}} = 4\,200$

$F_{\text{dobit}} : K_{\text{dobit}} = 3 : 4 \Rightarrow F_{\text{dobit}} = 0.75\, K_{\text{dobit}} = 0.75 \cdot 4\,200 = 3\,150$

Točan odgovor je D.

2. Koji je najveći prirodni broj x rješenje nejednadžbe $a + x < 8$ za svaki prirodni broj a takav da je $1 \leq a < 5$?

A. 6	**B.** 4	**C.** 3	**D.** 7	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pogledajmo najprije što vrijedi za a.
a je prirodni broj i $1 \leq a < 5$ pa slijedi da a može biti 1, 2, 3 ili 4.
Uvrstimo sve moguće vrijednosti broja a u zadanu nejednadžbu i odredimo x.

$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$
$1 + x < 8$	$2 + x < 8$	$3 + x < 8$	$4 + x < 8$
$x < 8 - 1$	$x < 8 - 2$	$x < 8 - 3$	$x < 8 - 4$
$x < 7$	$x < 6$	$x < 5$	$x < 4$
$x \in \{1,2,3,4,5,6\}$	$x \in \{1,2,3,4,5\}$	$x \in \{1,2,3,4\}$	$x \in \{1,2,3\}$

Tražimo najveći x za kojeg će sve nejednadžbe vrijediti. Brojevi 1, 2 i 3 rješenja su sve četiri nejednadžbe. Najveći među njima je broj 3.

Točan odgovor je C.

3. Koliko je prirodnih brojeva manjih od 2 023 relativno prosto s brojem 15?

A. 1 079	**B.** 945	**C.** 944	**D.** 1 078	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Jer je $15 = 3 \cdot 5$, broj će biti relativno prost s brojem 15 ako nije djeljiv ni s 3 ni s 5.

Prebrojimo koliko je brojeva manjih od 2 023 djeljiv s 3, a koliko s 5.

$1 \cdot 3, 2 \cdot 3, \ldots 674 \cdot 3$ – brojeva djeljivih s 3 je 674

$1 \cdot 5, 2 \cdot 5, \ldots 404 \cdot 5$ – brojeva djeljivih s 5 je 404

Od svih brojeva manjih od 2 023 (njih 2 022), oduzet ćemo broj brojeva djeljivih s 3 (njih 674) i broj brojeva djeljivih s 5 (njih 404).

$2\,022 - 674 - 404 = 944$

Međutim, sada smo brojeve djeljive s 15 (njih 134) dva puta oduzeli pa ih moramo jednom nadodati.

$1 \cdot 15, 2 \cdot 15, \ldots 134 \cdot 15$ – brojeva djeljivih s 15 je 134

$944 + 134 = 1\,078$.

Točan odgovor je D.

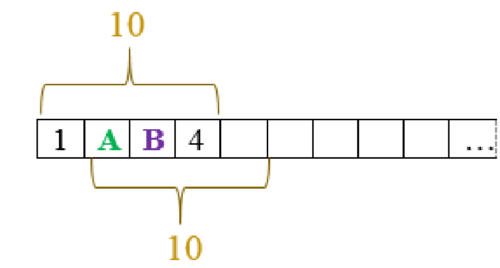
4. Zbroj je svaka četiri uzastopna polja 10. Koji broj se nalazi na 2023. polju?

1			4						…

A.	B.	C.	D.	E.
1	3	4	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

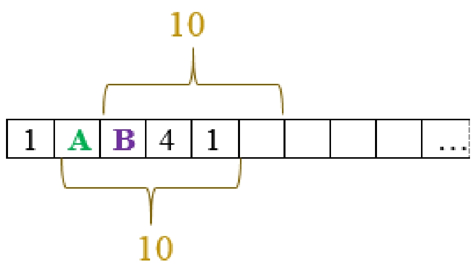
Rješenje.

Označimo drugo i treće polja s **A** i **B**.



Zbroj prva četiri polja je 10, ali i zbroj iduća četiri polja je jednak 10.

Zapišimo i usporedimo te jednakosti.



1 + **A** + **B** + 4 = 10
A + **B** + 4 + ? = 10

?

Zaključujemo da je ? = 1.
Pomaknimo se za jedno mjesto udesno.

A + **B** + 4 + 1 = 10
B + 4 + 1 + ? = 10

Zaključujemo da je ? = **A**.

Analognim razmišljanjem zaključujemo da se četvorka 1, **A**, **B**, 4 stalno ponavlja.

1	**A**	**B**	4	1	**A**	**B**	4	1	**A**	**B**	4	…

Mi želimo saznati koji se broj nalazi na 2 023. polju. S obzirom na to da se ponavlja niz od 4 znaka, broj 2 023 podijelit ćemo s 4: $2\,023 = 4 \cdot 505 + 3.$

To znači da će se do 2 023. polja 505 puta ponoviti četvorka znakova 1, **A**, **B**, 4, a s obzirom na to da je ostatak 3, u sljedećem 506. ponavljanju nama treba treći znak po redu. To je **B**.

Zaključili smo da će se na 2 023. polju nalaziti isti broj kao na trećem polju, ali njegovu vrijednost ne možemo odrediti. Postoji beskonačno mogućnosti brojeva koji mogu pisati na tom mjestu. Jedino što mora vrijediti je da je zbroj brojeva na drugom i trećem mjestu jednak 5. Pogledajmo nekoliko primjera.

1	**2**	**3**	4	1					…

1	**0**	**5**	4	1					…

1	**0.1**	**4.9**	4	1					…

Točan odgovor je D.

5. Koliko uređenih parova (m, n) prirodnih brojeva zadovoljava jednakost $7m + 8n = 504$?

A. 10	**B.** 9	**C.** 8	**D.** manje od 8	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Iskažimo n pomoću m.

$$7m + 8n = 504$$
$$8n = 504 - 7m \mid : 8$$
$$n = \frac{504}{8} - \frac{7m}{8}$$
$$n = 63 - \frac{7m}{8}$$

Da bi n bio prirodan broj treba vrijediti: $\frac{7m}{8} \in \mathbb{N}$ i $63 - \frac{7m}{8} > 0$ iz čega slijedi: $\frac{7m}{8} < 63$.
Ako je $\frac{7m}{8}$ prirodan broj, onda je $7m$ višekratnik broja 8, odnosno m je višekratnik broja 8.
Kako vrijedi $\frac{7m}{8} < 63$, tako je $7m < 8 \cdot 63$.

$63 = 7 \cdot 9$ pa vrijedi:

$7m < 8 \cdot 7 \cdot 9$ što znači da je $m < 8 \cdot 9$.

Zaključimo: m je višekratnik broja 8 i $m < 9 \cdot 8$ što znači da m može biti 8, $2 \cdot 8$, $3 \cdot 8$, $4 \cdot 8$, $5 \cdot 8$, $6 \cdot 8$, $7 \cdot 8$ i $8 \cdot 8$.
Postoji 8 uređenih parova (m, n) za koje vrijedi zadana jednakost.
Riješili smo zadatak, no pogledajmo koji su to uređeni parovi:

$m = 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 8}{8}$
$n = 56$
(8, 56)

$m = 2 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 2 \cdot 8}{8}$
$n = 49$
(16, 49)

$m = 3 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 3 \cdot 8}{8}$
$n = 42$
(24, 42)

$m = 4 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 4 \cdot 8}{8}$
$n = 35$
(32, 35)

$m = 5 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 5 \cdot 8}{8}$
$n = 28$
(40, 28)

$m = 6 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 8}{8}$
$n = 21$
(48, 21)

$m = 7 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 7 \cdot 8}{8}$
$n = 14$
(56, 14)

$m = 8 \cdot 8$
$n = 63 - \frac{7 \cdot 8 \cdot 8}{8}$
$n = 7$
(64, 7)

Točan odgovor je C.

6. Koliko postoji prostih brojeva p za koje je 11 p + 1 kub prirodnog broja?

A. 0	**B.** 1	**C.** 2	**D.** više od 2	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

11 p + 1 je kub prirodnog broja pa vrijedi $11p+1=n^3$, $n \in \mathbf{N}$.

$$\Rightarrow \quad 11p=n^3-1 \quad \Rightarrow \quad 11p=(n-1)(n^2+n+1)$$

Broj 11 je također prost, pa je lijeva strana jednakosti umnožak dva prosta broja i jedan od njih mora biti jednak n – 1, a drugi $n^2 + n + 1$.

1. slučaj

$$\begin{cases} n-1=11 \\ n^2+n+1=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=12 \\ 157=p \end{cases}$$

2. slučaj

$$\begin{cases} n-1=p \\ n^2+n+1=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=p+1 \\ n^2+n-10=0 \end{cases} \Rightarrow \quad n \notin \mathbf{N}$$

Postoji samo jedan prost broj p = 157 koji zadovoljava dano svojstvo.

Točan odgovor je B.

7. Vrijedni Jurica pune čaše vode od pola decilitra prelijeva u bocu od 1 L, ali nakon svakih triju čaša njegov brat odlije jednu punu čašu vode od 0.6 decilitara. Koliko puta Jurica treba preliti vodu da bi napunio polovinu boce?

A. 15	**B.** 14	**C.** 16	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Nakon što Jurica 3 puta ulije pune čaše vode od pola decilitra u bocu, napunio je bocu s 1.5 dl vode.

Kada njegov brat iz boce odlije jednu punu čašu vode od 0.6 decilitara, u boci će ostati 1.5 – 0.6 = 0.9 dl vode.

Tri Juričina ulijevanja zajedno s jednim bratovim odlijevanjem nazovimo *tura*. Svaka *tura* napuni bocu za još 0.9 dl.

Jurica želi napuniti pola boce od 1 L, dakle 0.5 L = 5 dl.

Nakon 4 *ture* bit će u boci 0.9 · 4 = 3.6 dl. vode. Preostalo je još dodati 5 – 3.6 = 1.4 dl vode, što su još tri Juričina ulijevanja.

Dakle, potrebno je 4 *ture* i još tri ulijevanja da bi se boca od 1 L napunila do pola. S obzirom na to da svaka *tura* ima 3 ulijevanja, ukupno je potrebno 3 · 4 + 3 = 15 ulijevanja.

Točan odgovor je A.

8. Točka A vektora $\overrightarrow{AB}$ ima koordinate $(5,-4)$. Do nje se od točke B dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje. Točka C sjecište je paralele s x osi koja sadrži točku A i paralele s y osi koja sadrži točku B. Koliko kvadratnih jedinica iznosi površina manjeg trokuta koji je sličan trokutu ABC s koeficijentom sličnosti 3?

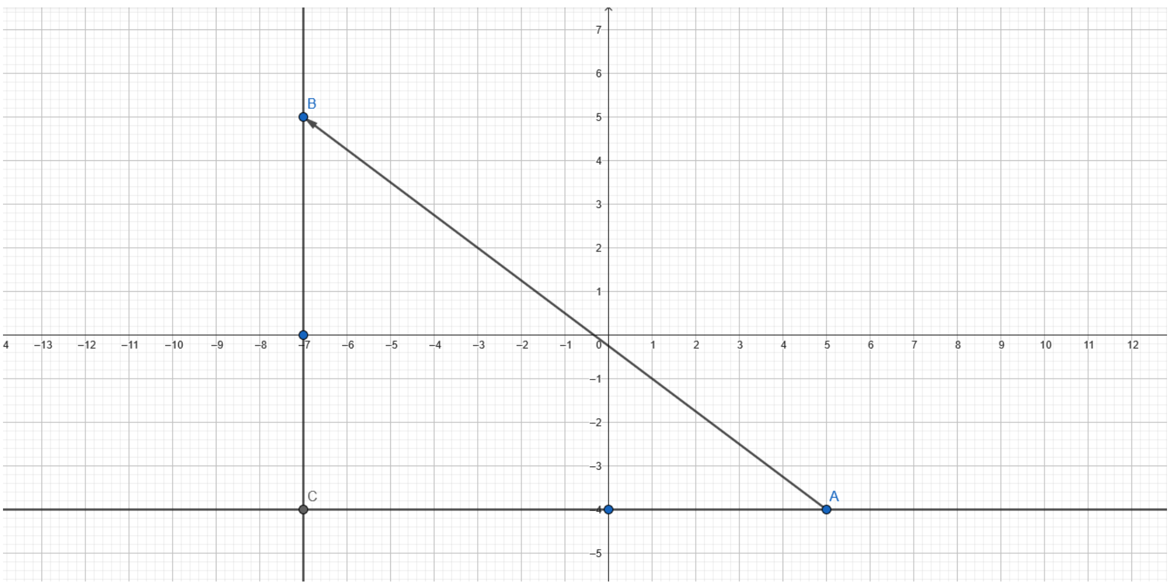
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
12	18	36	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Ako se od točke B do točke A dolazi pomakom od 12 jediničnih dužina udesno i 9 jediničnih dužina prema dolje, onda od točke A do točke B dolazimo pomakom od 12 jediničnih dužina ulijevo i 9 jediničnih dužina prema gore.

Točka A ima koordinate $(5,-4)$, stoga će točka B imati koordinate $(5-12,-4+9)=(-7,5)$.

Ucrtajmo u koordinatnu ravninu najprije točku A, potom točku B. Nacrtajmo i točku C koja je sjecište paralele s x osi koja sadrži točku A i paralele s y osi koja sadrži točku B.

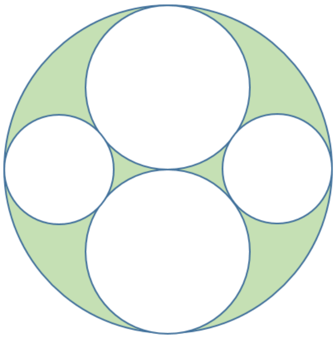


Površina pravokutnog trokuta ABC je $\frac{9\cdot 12}{2}=54$.

Površina manjeg trokuta koji je sličan trokutu ABC s koeficijentom sličnosti 3 će biti $P=\frac{P_{ABC}}{k^2}=\frac{54}{9}=6$.

Točan odgovor je D.

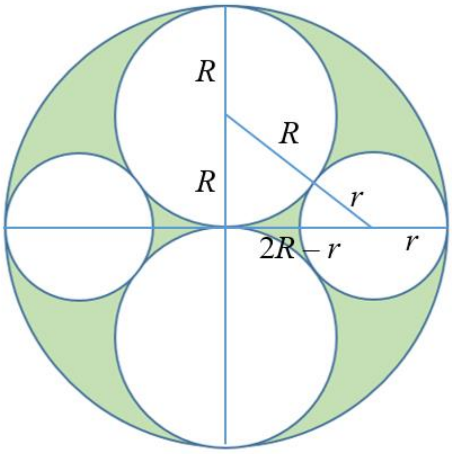
9. Unutar najveće kružnice nalaze se četiri kružnice koje dodiruju tu kružnicu iznutra i međusobno se dodiruju izvana kao na slici. Veće kružnice imaju polumjer duljine R, a manje polumjer duljine r. Kolika je površina osjenčanog dijela?



A. $\frac{5}{2}r^2\pi$	**B.** $\frac{5}{4}r^2\pi$	**C.** $\frac{2}{3}R^2\pi$	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Uočimo pravokutni trokut kojem su vrhovi središta triju kružnica različitih polumjera.



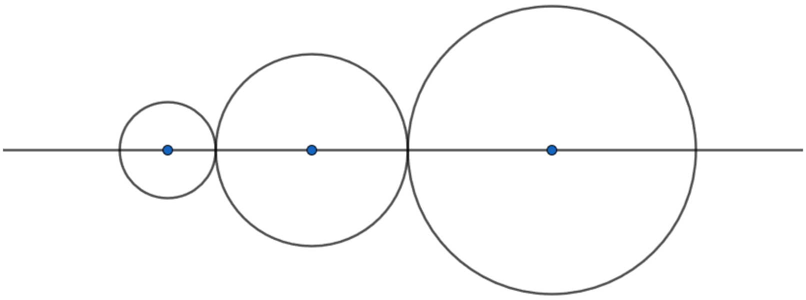
$$\begin{aligned}(R+r)^2 &= R^2+(2R-r)^2\\ R^2+2Rr+r^2 &= R^2+4R^2-4Rr+r^2\\ 4R^2 &= 6Rr\\ 2R &= 3r\\ R:r &= 3:2\end{aligned}$$

Površinu osjenčanog dijela dobit ćemo kada iz površine najvećeg kruga oduzmemo po dvije površine manjih krugova.

$$\begin{aligned}P &= (2R)^2\pi-2\cdot R^2\pi-2\cdot r^2\pi\\ &= 4R^2\pi-2R^2\pi-2r^2\pi\\ &= 2R^2\pi-2r^2\pi\\ &= 2\cdot\frac{9}{4}r^2\pi-2r^2\pi\\ &= \frac{5}{2}r^2\pi\end{aligned}$$

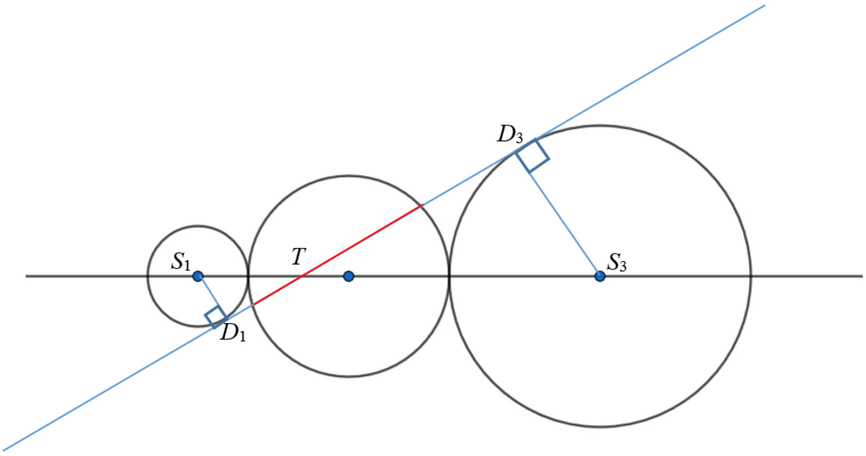
Točan odgovor je A.

10. Središta triju kružnica na slici pripadaju istom pravcu. Kružnica radijusa 2 cm dira izvana preostale dvije kružnice čiji su radijusi 1 cm i 3 cm. Kolika je duljina tetive koju zajednička unutarnja tangenta lijeve i desne kružnice odsijeca na kružnici u sredini?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
4 cm	$\sqrt{13}$ cm	$\sqrt{14}$ cm	$\sqrt{15}$ cm	ne želimo odgovoriti na pitanje

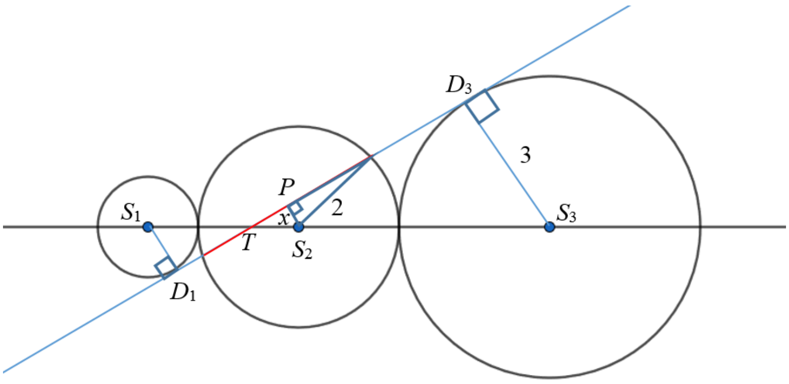
Rješenje.



Trokuti TS_1D_1 i TS_3D_3 su slični (po KK).

$$\frac{|S_1T|}{|S_3T|}=\frac{|S_1D_1|}{|S_3D_3|} \Rightarrow \frac{m}{8-m}=\frac{1}{3} \Rightarrow m=2$$

Jer je $|S_1T|=2$ zaključujemo da je $|TS_3|=8-2=6$ i $|TS_2|=6-5=1$.



Trokuti TS_2P i TS_3D_3 su slični (po KK).

$$\frac{|TS_2|}{|TS_3|}=\frac{|S_2P|}{|S_3D_3|} \Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{x}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Uočimo pravokutan trokut s duljinom jedne katete x, duljinom hipotenuze 2 i duljinom druge katete jednakoj polovici duljine tražene tetive.

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2=2^2-x^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$

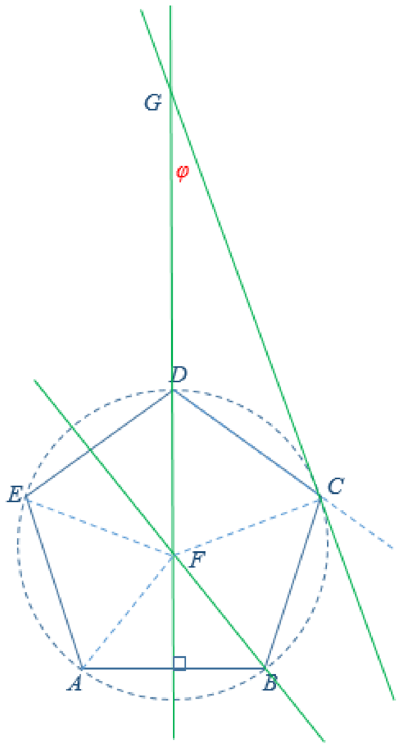
$$\Rightarrow \frac{t}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow t=\sqrt{15}$$

Točan odgovor je D.

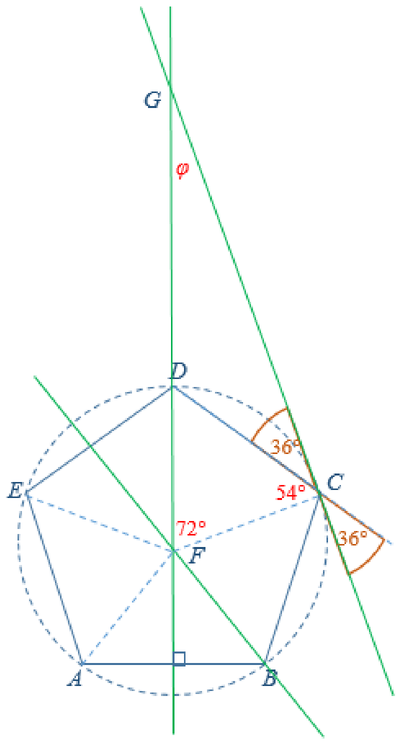
11. U pravilnom peterokutu *ABCDE* simetrala stranice $\overline{AB}$ siječe simetralu unutarnjeg kuta pri vrhu *B* u točki *F* i siječe simetralu vanjskog kuta pri vrhu *C* u točki *G*. Kolika je veličina kuta $\angle FGC$?

A. 24°	**B.** 36°	**C.** 18°	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.



Primijetimo da je simetrala stranice pravilnog peterokuta ujedno i simetrala nasuprotnog kuta te da je točka *F* središte peterokuta.



$$|\angle CFD| = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$|\angle DCF| = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

$$|\angle DCB| = 2 \cdot 54° = 108°$$

Vanjski kut peterokuta: $180° - 108° = 72°$

$$\varphi = 180° - (72° + 54° + 36°)$$

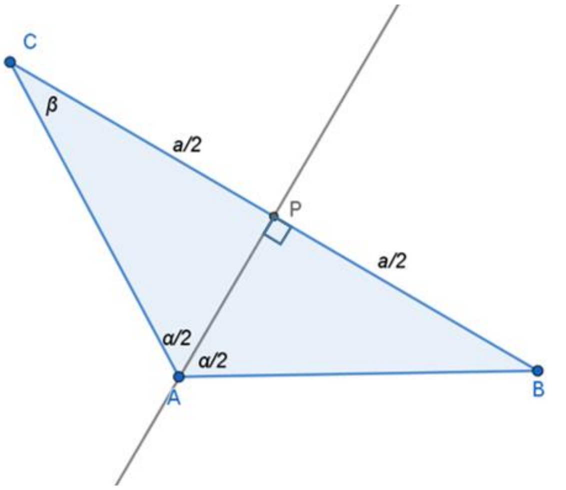
$$\varphi = 18°$$

Točan odgovor je C.

12. U trokutu ABC pravac koji sadrži simetralu stranice $\overline{BC}$ podudara se sa simetralom tupog kuta veličine α nasuprot njoj. Kolika je veličina manjeg kuta što ga simetrala kuta pri vrhu B zatvara sa simetralom stranice $\overline{AC}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\frac{3}{4}\alpha - 45°$	$45° - \frac{3}{4}\alpha$	$\frac{1}{2}\alpha - 90°$	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

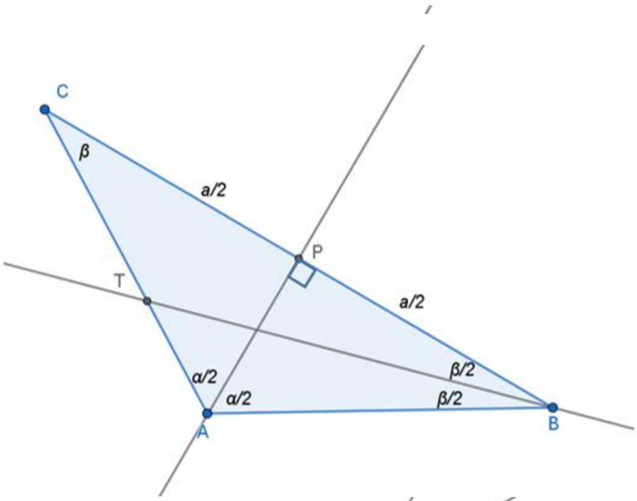
Rješenje.



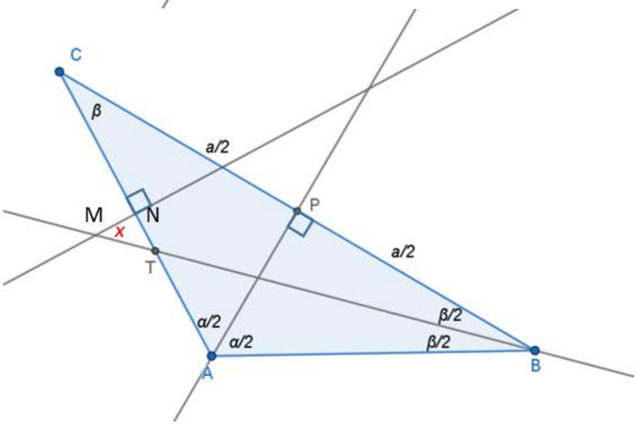
Nacrtajmo skicu. U trokutu ABC pravac koji sadrži simetralu stranice $\overline{BC}$ podudara se sa simetralom kuta veličine α nasuprot nje.

ΔABP i ΔACP imaju zajedničku stranicu $\overline{AP}$, a u oba su trokuta kutovi uz tu stranicu veličina $\frac{\alpha}{2}$ i 90°. Zaključujemo da su trokuti sukladni prema poučku K-S-K. Iz navedenoga slijedi da su kutovi trokuta ABC s vrhovima u točkama B i C jednakih veličina. Označimo ih s β. S obzirom na to da je u svim ponuđenim odgovorima veličina traženog kuta iskazana pomoću α, iskažimo β pomoću α.

$$\alpha + 2\beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$$



Nacrtajmo simetralu kuta pri vrhu B i istaknimo točku T u kojoj simetrala kuta pri vrhu B siječe $\overline{AC}$.



Preostalo je nacrtati simetralu stranice $\overline{AC}$ i istaknuti traženi kut. Označimo ga s x.
Presjek simetrale stranice $\overline{AC}$ sa simetralom kuta β označili smo s M, a presjek sa stranicom $\overline{AC}$ s N.

x ćemo izračunati iz trokuta MTN nakon što odredimo veličinu kuta $\angle ATB$.

$$|\angle ATB| = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2} = 180° - \alpha - \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = 135° - \frac{3\alpha}{4}$$

Kutovi $\angle NTM$ i $\angle ATB$ su vršni.

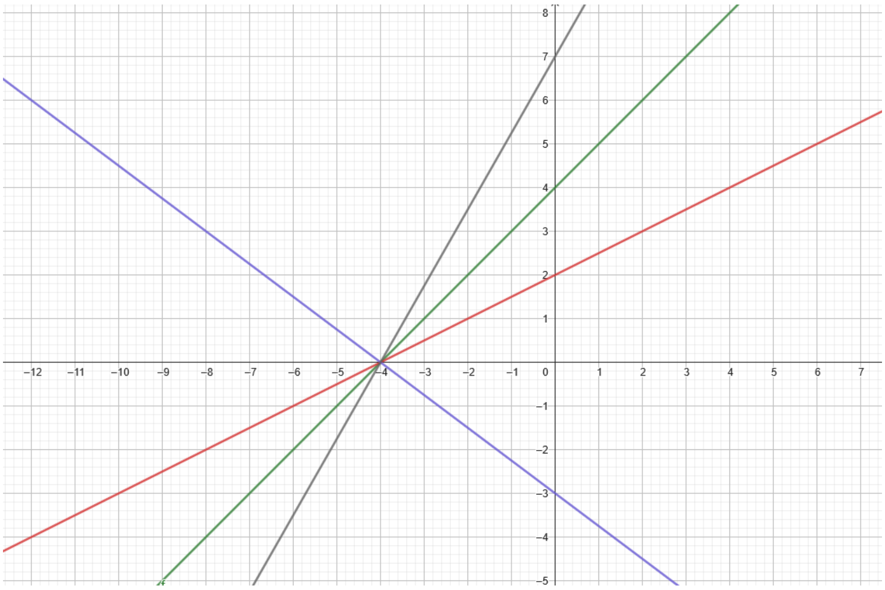
$$x = 90° - \left(135° - \frac{3\alpha}{4}\right) = \frac{3\alpha}{4} - 45°$$

Točan odgovor je A.

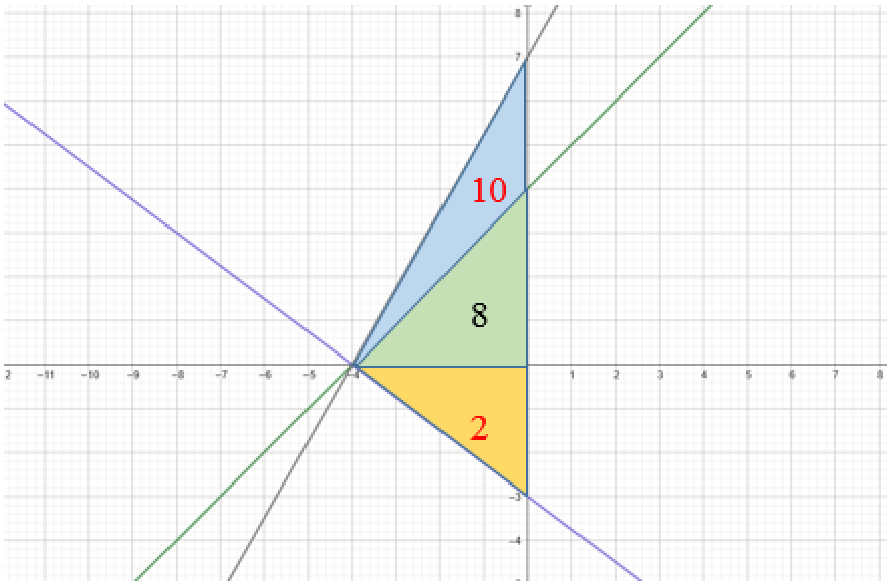
13. Površina trokuta što ga s osi ordinata zatvaraju pravci $y = x + 4$ i $\frac{x}{-4} + \frac{y}{n} = 1$ jednaka je 10. Kolika može biti duljina odsječka pravca $\frac{x}{-4} + \frac{y}{n} = 1$ između koordinatnih osi?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\sqrt{79}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{97}$	$\sqrt{19}$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.



Skicirajmo u koordinatnom sustavu pravac $y = x + 4$ i neki pravac kojem je odsječak na x osi jednak –4. Pritom ne smijemo zaboraviti da traženi pravac može rasti (odsječkom na osi ordinata većom od 4 ili manjoj od 4) ili padati, pa ćemo promatrati tri slučaja.



Površina trokuta što ga pravac $y = x + 4$ zatvara s koordinatnim osima je $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ pa je površina trokuta što ga zatvaraju pravci $y = x + 4$ i $\frac{x}{-4} + \frac{y}{n} = 1$ s osi ordinata za 2 veća. To znači da je odsječak na osi ordinata traženog pravca $\frac{x}{-4} + \frac{y}{n} = 1$ veći od 4 ili negativan.

Dakle, površina trokuta što ga pravac $\frac{x}{-4} + \frac{y}{n} = 1$ zatvara s koordinatnim osima je 18 (kod rastućeg pravca) ili 2 (kod padajućeg pravca).

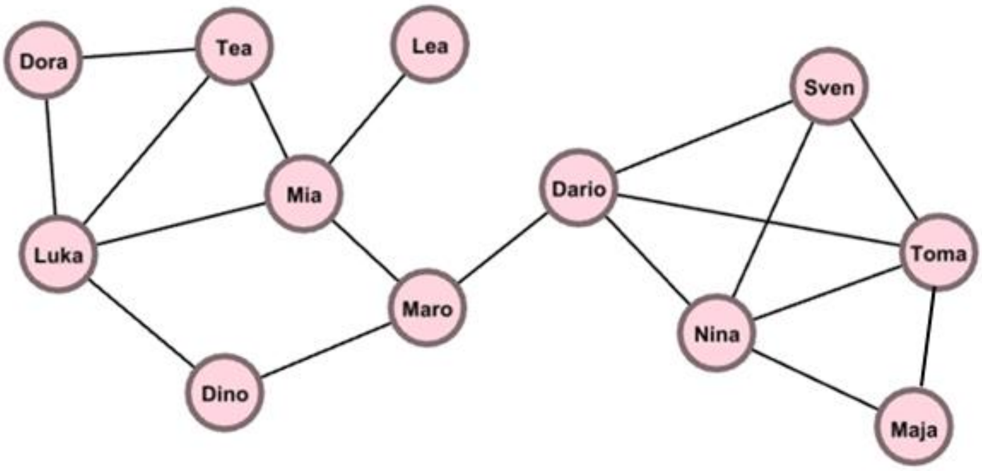
$$\frac{|4 \cdot n_1|}{2} = 18 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 9 \quad \text{ili} \quad \frac{|4 \cdot n_2|}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad n_2 = -1$$

Dobili smo pravce $\frac{x}{-4} + \frac{y}{9} = 1$ i $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-1} = 1$.

Duljina odsječaka pravca između koordinatnih osi su: $d_1 = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{97}$ i $d_2 = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

Točan odgovor je C.

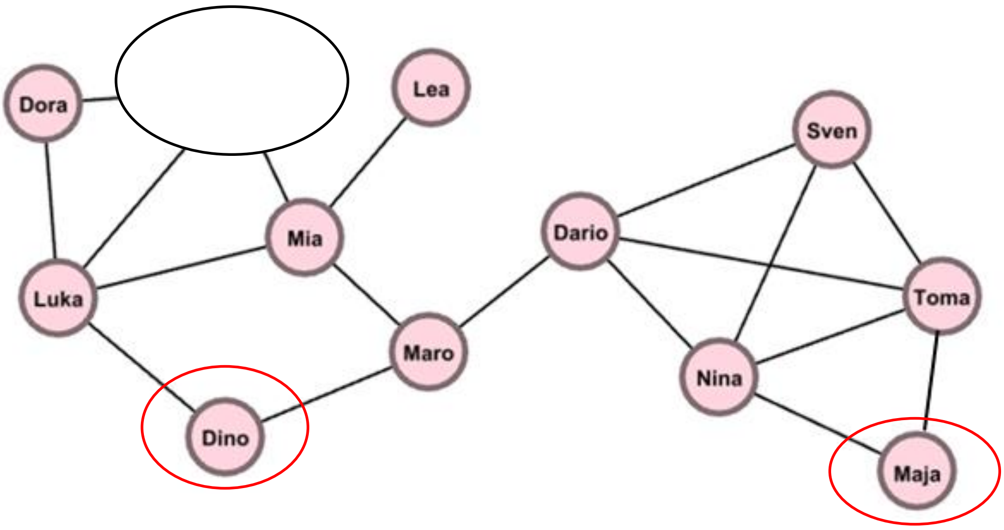
14. Lea želi pomoću svojih prijatelja Maji poslati poruku. Koliko ima različitih načina na koje ta poruka može stići do Maje ako Lea želi da Tea ne primi poruku i da Dino pročita poruku? Poruke se mogu slati samo između osoba koje su povezane crtama, a ista osoba poruku ne može dobiti dva puta.



A.	B.	C.	D.	E.
10	9	8	19	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Lea želi da Tea ne primi poruku i da Dino pročita poruku pa ćemo istaknuti to na skici.



Primijetimo da će poruku sigurno pročitati Maro i Dario jer je to jedini put koji povezuje grupu djece lijevo s grupom djece desno na slici. Sada je jasno da će početak puta biti:

Lea – Mia – Luka – Dino – Maro – Dario

Preostalo je prebrojati sve putove od Darija do Maje.

Dario – Sven – Toma – Maja
Dario – Sven – Nina –Toma – Maja
Dario – Sven – Toma – Nina – Maja
Dario – Sven – Nina – Maja

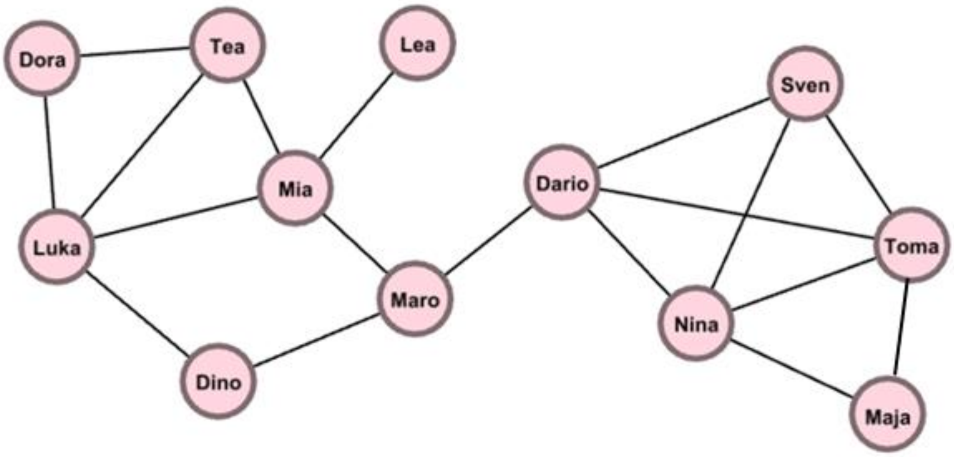
Dario – Toma – Maja
Dario – Toma – Nina – Maja
Dario – Toma – Sven – Nina – Maja

Dario – Nina – Maja
Dario – Nina – Toma – Maja
Dario – Nina – Sven – Toma – Maja

Ukupno je 10 načina.

Točan odgovor je A.

15. Lea želi pomoću svojih prijatelja Maji poslati poruku. Koliko ima različitih putova kojima ta poruka može doći do Maje, a da, osim Maje, poruku ne primi više od šest Leinih prijatelja? Poruke se mogu slati samo između osoba koje su povezane crtama, a ista osoba poruku ne može dobiti dva puta.



A. 11	**B.** 9	**C.** 12	**D.** 13	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Primijetimo da će poruku sigurno pročitati Mia, Maro i Dario jer je to jedini put koji povezuje grupu djece lijevo s grupom djece desno na slici. Dakle, osim njih troje poruku smije pročitati još samo troje Leinih prijatelja.

Ispišimo odvojeno sve putove od Lee do Mara i sve putove od Darija do Maje. Za svaki put napisat ćemo u zagradi koliko Leinih prijatelja (osim Mie, Mara i Darija) sadrži.

1) Lea – Mia – Maro (0)
2) Lea – Mia – Luka – Dino – Maro (2)
3) Lea – Mia – Tea – Luka – Dino – Maro (3)
4) Lea – Mia – Tea – Dora – Luka – Dino – Maro (4)

a) Dario – Sven – Toma – Maja (2)
b) Dario – Sven – Nina –Toma – Maja (3)
c) Dario – Sven –Toma – Nina – Maja (3)
d) Dario – Sven – Nina – Maja (2)

e) Dario – Toma – Maja (1)
f) Dario – Toma – Nina – Maja (2)
g) Dario – Toma – Sven – Nina – Maja (3)

h) Dario – Nina – Maja (1)
i) Dario – Nina – Toma – Maja (2)
j) Dario – Nina – Sven – Toma – Maja (3)

Budući za zbroj broja u prvom stupcu i broja u drugom stupcu može biti najviše 3, to je moguće u sljedećim slučajevima:

1) se može kombinirati sa svakim u drugom stupcu – 10 načina

2) se može kombinirati s e) i h) – 2 načina

3) se ne može kombinirati niti s nijednim brojem iz drugog stupca – 0 načina

4) put je dulji od 3 – 0 načina

Ukupno je 10 + 2 + 0 + 0 = 12 načina.

Točan odgovor je C.

16. Za koliko rješenja (x, y) jednadžbe $\operatorname{tg}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+y^2=2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-y-1\right]$ vrijedi $|x+y|<10$?

A.	B.	C.	D.	E.
15	13	12	14	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

$$\operatorname{tg}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+y^2=2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-y-1\right] \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+y^2-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+2y+2=0$$

$$\operatorname{tg}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1+y^2+2y+1=0 \Rightarrow \left[\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]^2+(y+1)^2=0$$

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0 \qquad \text{i} \qquad y+1=0$$

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \qquad \text{i} \qquad y=-1$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbf{Z} \qquad \text{i} \qquad y=-1$$

$$x=\frac{k\pi}{2}, \quad k\in\mathbf{Z} \qquad \text{i} \qquad y=-1$$

$$|x+y|<10 \Rightarrow \left|\frac{k\pi}{2}-1\right|<10 \Rightarrow -10<\frac{k\pi}{2}-1<10 \Rightarrow -9<\frac{k\pi}{2}<11$$

$$\Rightarrow -18<k\pi<22 \Rightarrow -5.7\ldots<k<7.0.. \Rightarrow k\in\{-5,-4,\ldots,5,6,7\}$$

Točan odgovor je B.

17. Koliki je zbroj svih rješenja jednadžbe $1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{4}+\ldots=4^{\log_2\sqrt{3+x}}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\sqrt{7}$	0	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	jednadžba nema realnih rješenja	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Uvjet: $3 + x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -3$

Za $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ je $1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{4}+\ldots$ konvergentan.

$$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad -1<\frac{x-1}{2}<1 \quad\Rightarrow\quad -2<x-1<2 \quad\Rightarrow\quad -1<x<3$$

$$1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{4}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}=\frac{2}{2-x+1}=\frac{2}{3-x}$$

$$4^{\log_2\sqrt{3+x}}=2^{2\log_2\sqrt{3+x}}=2^{\log_2(3+x)}=3+x$$

$$1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{4}+\ldots=4^{\log_2\sqrt{3+x}} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3-x}=3+x \quad\Rightarrow\quad 2=9-x^2 \quad\Rightarrow\quad x^2=7 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{7}$$

Ali, $-\sqrt{7}<-1$ pa jednadžba ima samo jedno rješenje $x=\sqrt{7}$.

Točan odgovor je A.