

# Naučimo - predmetna nastava



## 2. kolo 2023./2024.

1. Anja, Ruža i njihov brat Bruno treniraju različite sportove: ritmičku gimnastiku, umjetničko klizanje i atletiku. Tata Igor tijekom je tjedan dana znakom  $x$  u tablicu zapisivao koji je dan tko imao trening, ali se pritom zabunio i napravio dvije pogreške. Jedan dan Ružin je trening upisao polje iznad (Anji), a jedan dan je Anjin trening upisao u pogrešan dan. Bruno je trenirao točno kako je tata zapisao u tablicu. Ako znamo da su dva dana u tjednu trenirali svi troje i da nedjeljom nije trenirao nitko, koliko je dana u tjednu dvoje od njih troje imalo trening?

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	$x$			$x$	$x$		$x$
Ruža		$x$		$x$			
Bruno	$x$		$x$	$x$		$x$	

A.	B.	C.	D.	E.
0	1	2	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Da bismo odredili koliko je dana u tjednu dvoje od njih troje imalo trening, trebamo najprije pronaći tatine pogreške. Čitajmo podatak po podatak i pogledajmo što možemo zaključiti.

*Jedan dan Ružin je trening upisao polje iznad (Anji).*

Pogledajmo tablicu. Tata je mogao pogriješiti u ponedjeljak i u petak jer je u ta dva dana upisan trening Anji, a Ruži nije.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	$x$			$x$	$x$		$x$
Ruža	?	$x$		$x$	?		
Bruno	$x$		$x$	$x$		$x$	

Iz navedene tvrdnje ne možemo zaključiti koji je dan tata u tablici pogriješio. Čitajmo dalje.

*jedan dan je Anjin trening upisao u pogrešan dan.*

Navedena tvrdnja nam sama za sebe ne govori dovoljno da bismo mogli odrediti tatinu pogrešku.

*znamo da su dva dana u tjednu trenirali svi troje*

Trenutno iz tablice možemo pročitati da su svi troje trenirali u četvrtak. Nedostaje nam još jedan dan za kojeg znamo da je u tablici točno zabilježen Brunin trening. Možemo zaključiti da je Ružin trening greškom upisan Anji onaj dan

kada je Bruno imao trening. Kako je tata mogao pogriješiti u ponedjeljak i petak, a u petak Bruno nije trenirao, zaključujemo da je trening koji je umjesto Ruži zapisan Anji bio u ponedjeljak. „Popravimo tablicu“.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja				<b>x</b>	<b>x</b>		<b>x</b>
Ruža	<b>x</b>	<b>x</b>		<b>x</b>			
Bruno	<b>x</b>		<b>x</b>	<b>x</b>		<b>x</b>	

Ostalo je još ispraviti trening koji je Anji upisan u krivi dan. S obzirom na to da su dva dana u tjednu svi zajedno trenirali, a Ruža i Bruno su zajedno trenirali u ponedjeljak i četvrtak, zaključujemo da je Anja te dane imala treninge. Dakle, jedan Anjin trening treba biti u ponedjeljak. Treba još pronaći koji je trening umjesto ponedjeljka zapisan neki drugi dan.

*nedjeljom nije trenirao nitko*

Kako je Anji upisan trening u nedjelju, tako zaključujemo da je taj trening pogrešno upisan. Dakle, Anja nije trenirala u nedjelju već u ponedjeljak. Zapišimo sada tablicu s točnim podacima.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	<b>x</b>			<b>x</b>	<b>x</b>		
Ruža	<b>x</b>	<b>x</b>		<b>x</b>			
Bruno	<b>x</b>		<b>x</b>	<b>x</b>		<b>x</b>	

Nema dana u tjednu u kojem dvoje od njih troje ima trening.

Točan odgovor je A.

2. Anja, Ruža i njihov brat Bruno treniraju različite sportove: ritmičku gimnastiku, umjetničko klizanje i atletiku. Tata Igor tijekom je tjedan dana znakom  $x$  u tablicu zapisivao koji dan je tko imao trening, ali se pritom zabunio i napravio dvije pogreške. Jedan dan Ružin je trening upisao polje iznad (Anji), a jedan dan Anjin je trening upisao u pogrešan dan. Bruno je trenirao točno kako je tata zapisao u tablicu. Ako znamo da nedjeljom nema treninga i da nitko nema trening tri dana zaredom, koliko dana u tjednu je dvoje od njih troje imalo trening?

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	$x$	$x$		$x$	$x$		$x$
Ruža		$x$		$x$			
Bruno	$x$		$x$	$x$		$x$	

<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b>
3	2	1	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Da bismo odredili koliko je dana u tjednu dvoje od njih troje imalo trening, trebamo najprije pronaći tatine pogreške. Čitajmo podatak po podatak i pogledajmo što možemo zaključiti.

*Jedan dan Ružin je trening upisao polje iznad (Anji).*

Pogledajmo tablicu. Tata je mogao pogriješiti u ponedjeljak i u petak jer je u ta dva dana upisan trening Anji, a Ruži nije.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	$x$	$x$		$x$	$x$		$x$
Ruža	↑ ?	$x$		$x$	↑ ?		
Bruno	$x$		$x$	$x$		$x$	

Iz navedene tvrdnje ne možemo zaključiti koji je dan tata u tablici pogriješio. Čitajmo dalje.

*jedan dan je Anjin trening upisao u pogrešan dan.*

Navedena tvrdnja nam sama za sebe ne govori dovoljno da bismo mogli odrediti tatinu pogrešku.

*znamo da nedjeljom nema treninga*

Anji je trening upisan u nedjelju. Pronašli smo pogrešno upisan trening, međutim još ne znamo u koji ga dan treba upisati.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	$x$	$x$		$x$	$x$		$x$
Ruža	↑ ?	$x$		$x$	↑ ?		
Bruno	$x$		$x$	$x$		$x$	

*nitko nema trening tri dana zaredom*

Otkrili smo do sada da je tata pogreškom trening umjesto Ruži upisao Anji u ponedjeljak ili u petak i da je Anji upisano da je trenirala u nedjelju umjesto neki drugi dan.

Provjerimo je li Ruža trenirala u ponedjeljak ili petak.

Najprije pretpostavimo da je Ruža imala trening u ponedjeljak i to zapišimo u tablicu.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja		x		x	x		x
Ruža	x	x		x			
Bruno	x		x	x		x	

Potrebno je još Anjin trening s nedjelje prebaciti na neki drugi dan. Pritom treba paziti da Anja nije trenirala tri dana zaredom. Jedina mogućnost je u ponedjeljak. Zapišimo tablicu sa svim ispravljenim greškama.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	x	x		x	x		
Ruža	x	x		x			
Bruno	x		x	x		x	

Iz tablice sada možemo pročitati da je dvoje od njih troje imalo trening samo u utorak.

Ostaje nam još provjeriti drugu mogućnost. Je li Ruža mogla trenirati u petak?

Pretpostavimo da je Ruža trenirala u petak. Zapišimo tablicu.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	x	x		x			x
Ruža		x		x	x		
Bruno	x		x	x		x	

Treba provjeriti gdje sve možemo prebaciti trening koji je Anji greškom upisan u nedjelju.

S obzirom na to da nitko ne trenira tri dana zaredom, Anja je mogla imati trening u petak, ali i u subotu.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	x	x		x	x		
Ruža		x		x	x		
Bruno	x		x	x		x	

ili

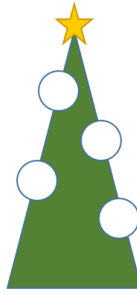
	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	x	x		x		x	
Ruža		x		x	x		
Bruno	x		x	x		x	

U oba slučaja dvoje od njih troje imaju trening dva dana u tjednu.

Stoga zaključujemo da su dvoje od njih troje mogli trenirati jedan dan ili dva dana u tjednu. Nije moguće odrediti koliko su treninga dvoje od njih troje imali tijekom tjedna.

Točan odgovor je D.

3. Ines želi obojiti kuglice na boru, a ima samo ljubičastu i plavu bojicu. Ako ne želi da plavih bude više od ljubičastih, na koliko različitih načina to može napraviti?



A. više od 12	B. 12	C. 11	D. manje od 11	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
------------------	----------	----------	-------------------	------------------------------------

Rješenje.

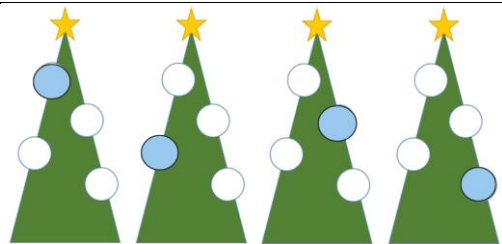
1. način

Na boru su 4 kuglice. Važno je uočiti da su kuglice ili plave ili ljubičaste. Stoga je dovoljno odrediti koje će kuglice biti plave. Na preostalim mjestima bit će ljubičaste kuglice. Plavih kuglica nema više nego ljubičastih. Pogledajmo najprije koliko plavih kuglica može biti.

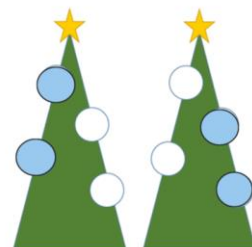
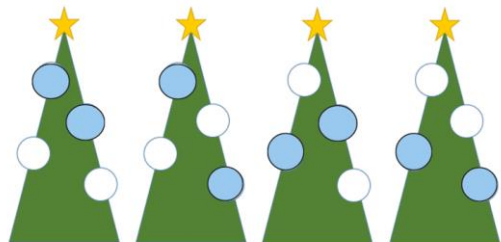
Na boru nema plavih kuglica.



Na boru je jedna plava kuglica.  
Plavom bojom može biti obojena svaka od 4 kuglice.



Na boru su dvije plave kuglice.  
Pogledajmo koliko je mogućnosti.



Na boru ne može biti više od dvije plave kuglice jer bi ih tada bilo više nego ljubičastih kuglica. Ines može obojiti kuglice na boru tako ne bude plavih više nego ljubičastih na 11 različitih načina.

## 2. način

Važno je uočiti da je dovoljno promatrati položaje kuglica jedne boje jer su na ostalim mjestima kuglice druge boje. Mi ćemo promatrati plave kuglice. Plavih kuglica nema više nego ljubičastih. Navedeno znači da plavih kuglica može biti niti jedna, jedna ili najviše dvije.

Uočimo da imamo kuglicu lijevo gore, lijevo dolje, desno gore i desno dolje. Stoga plave kuglice možemo označiti slovom P, a njihov položaj zapisati kako slijedi.

Nema plavih kuglica.


Jedna plava kuglica.

P	

P	

	P

	P

Dvije plave kuglice.

P	P

P	
	P

	P
P	

P	P

P	
P	

	P
	P

Ukupno je 11 načina na koje Ines može kuglice bora obojati dvjema zadanim bojama, a da plavih kuglica nema više nego ljubičastih.

Točan odgovor je C.

4. Nogometna ekipa škole dobila je nove dresove s brojevima od 1 do 11. Ivica i Jurica prvi su birali i izabrali su dresove s brojevima čiji je ukupni zbroj znamenaka 7. Toma i Ivo birali su nakon njih i željeli su dresove čiji je ukupni zbroj znamenaka 6, a takav je bio samo jedan par majica. Ako je Toma dobio najveći broj od njih četvorice, koji je najmanji broj izabran?

A.	B.	C.	D.	E.
1	2	3	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pogledajmo koje su dresove mogli izabrati Ivica i Jurica. Tražimo dva prirodna broja od 1 do 11 kojima je zbroj znamenaka 7.

1 i 6  
2 i 5  
3 i 4  
5 i 11  
6 i 10

Pogledajmo koje su dresove mogli izvući Toma i Ivo odnosno kojim je (različitim) prirodnim brojevima od 1 do 11 zbroj znamenaka 6.

1 i 5  
2 i 4  
4 i 11  
5 i 10

Nakon što su Ivica i Jurica izabrali svoje dresove Tomi i Ivi je ostao samo jedan par majica od mogućih 4. To znači da preostale tri mogućnosti sadržavaju dresove koje su već izvukli Ivica i Jurica. Pogledajmo za svaki par koji su mogli izvući Ivica i Jurica pojavljuju li se ti brojevi u parovima brojeva koji odgovaraju Tomi i Ivi.

izabrali Ivica i Jurica	1 i 6	2 i 5	3 i 4	5 i 11	6 i 10
preostalo Tomi i Ivi	<del>1 i 5</del> 2 i 4 4 i 11 5 i 10	<del>1 i 5</del> <del>2 i 4</del> 4 i 11 <del>5 i 10</del>	1 i 5 <del>2 i 4</del> <del>4 i 11</del> 5 i 10	<del>1 i 5</del> 2 i 4 <del>4 i 11</del> <del>5 i 10</del>	1 i 5 2 i 4 4 i 11 <del>5 i 10</del>
broj preostalih parova	3 para	1 par	2 para	1 par	3 para

Jedan par brojeva ostaje u dva slučaja.

Zapišimo te dvije mogućnosti izdvojeno.

Ivica i Jurica

2 i 5

Toma i Ivo

4 i 11

Ivica i Jurica

5 i 11

Toma i Ivo

2 i 4

S obzirom na to da je Toma dobio najveći broj od njih četvorice zaključujemo da je Toma izvukao dres s brojem 11. Naime, ako su Ivica i Jurica izvukli dresove s brojevima 5 i 11, onda su Toma i Ivo mogli izvući samo brojeve 2 i 4, a u tom slučaju Toma nema najveći broj.

Zaključujemo da su Ivica i Jurica izvukli dresove s brojevima 2 i 5, a Toma i Ivo dresove s brojevima 4 i 11 pa je broj 2 najmanji izvučeni broj.

Točan odgovor je B.

5. Borna je maratonac i na treningu treba otrčati zadani broj krugova oko igrališta. U 17:15 je završio jednu sedminu svog treninga. U idućih pet minuta otrčao je još 5 krugova. Shvatio je da će mu preostati tri četvrtine treninga kad otrči još jedan krug. Koliko krugova Borna treba istrčati nakon 17:20?

<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b>
28	43	42	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Označimo s  $x$  broj pretrčanih krugova na jednome treningu.

U 17:15 Borna je istrčao  $\frac{1}{7}$  treninga što je  $\frac{1}{7}x$ .

Od 17:15 do 17:20 pretrčao je još 5 krugova što znači da je od početka treninga pa do 17:20 pretrčao ukupno

$$\frac{1}{7}x + 5 \text{ krugova.}$$

Tada je shvatio da će ako pretrči još jedan krug ostati  $\frac{3}{4}$  treninga. To znači da će nakon tog pretrčanog kruga odraditi  $\frac{1}{4}$  treninga.

Navedeno možemo zapisati kako slijedi.

$$\frac{1}{7}x + 5 + 1 = \frac{1}{4}x$$

Riješimo jednadžbu.

$$\frac{1}{7}x + 5 + 1 = \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{7}x + 6 = \frac{1}{4}x \quad / \cdot 28$$

$$4x + 168 = 7x$$

$$168 = 3x$$

$$x = 56$$

Bornin se trening sastoji od 56 istrčanih krugova oko igrališta.

U zadatku se traži broj istrčanih krugova nakon 17:20 što je za jedan krug više od tri četvrtine treninga.

$$\frac{3}{4} \cdot 56 + 1 = 42 + 1 = 43$$

Borna nakon 17:20 treba još istrčati 43 kruga.

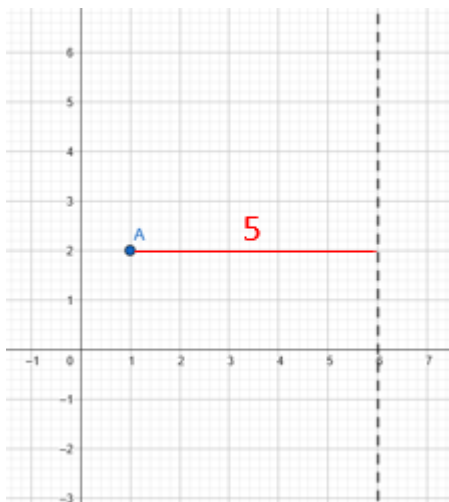
Točan odgovor je B.

6. Točke  $A(1, 2)$  i  $B(6, y)$  krajnje su točke hipotenuze pravokutnog trokuta  $ABC$  kojem su katete usporedne s koordinatnim osima, a površina iznosi 30 kvadratnih jedinica. Koliko može biti  $y$ ?

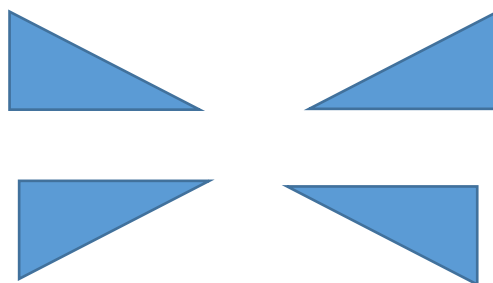
<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
6	8	12	14	

Rješenje.

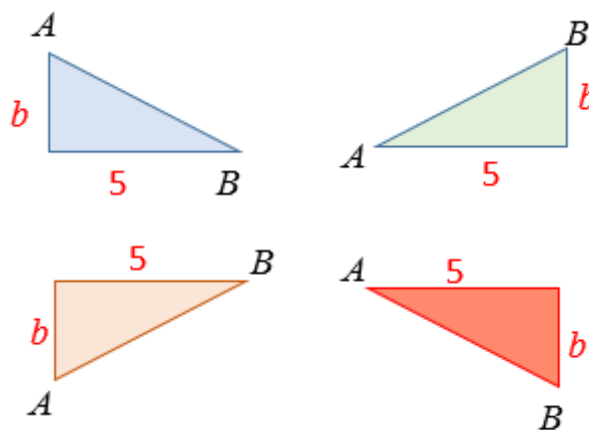
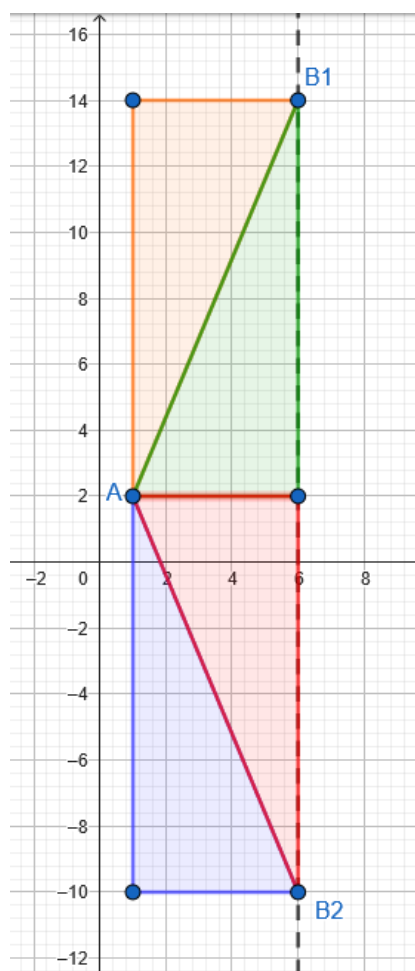
Nacrtajmo zadano. Točka  $B$  pripada pravcu  $x = 6$ . Udaljenost točke  $A$  od tog pravca je 5.



Skicirajmo u kojem položaju se može nalaziti pravokutan trokut kojem su katete paralelne s koordinatnim osima.



Budući da su  $A$  i  $B$  krajnje točke hipotenuze pravokutnog trokuta  $ABC$ , mogućnosti su slijedeće:



Površina svakog od tih trokuta jednaka je  $\frac{5 \cdot b}{2}$ .

S obzirom na to da je površina jednaka 30, zaključujemo da je duljina katete  $b = 12$ .

Nacrtajmo trokute u koordinatnom sustavu.

$B_1(6, 14)$  i  $B_2(6, -10)$

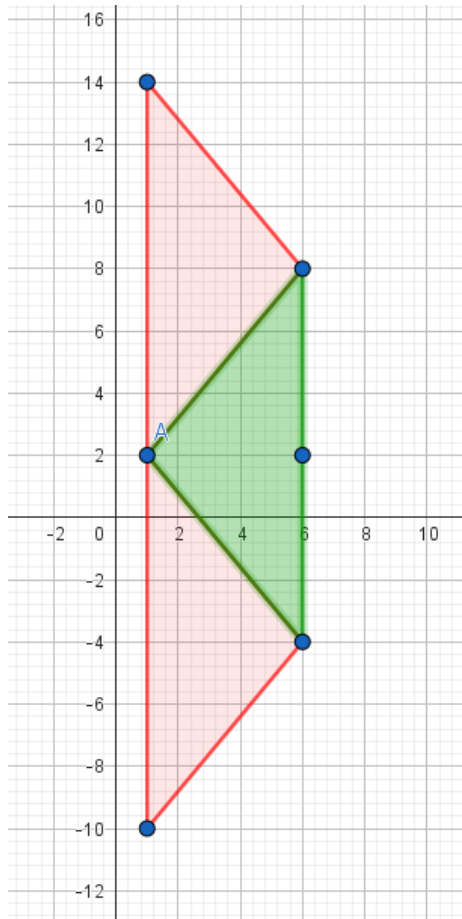
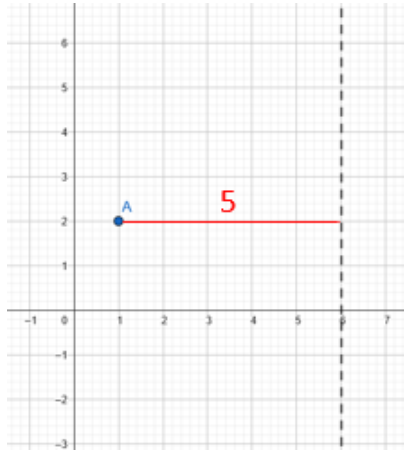
Točan odgovor je D.

7. Točke  $A(1, 2)$  i  $B(6, y)$  vrhovi su jednakokračnog trokuta kojem je osnovica usporedna s osi ordinata, a površina iznosi 30 kvadratnih jedinica. Koliko takvih trokuta postoji?

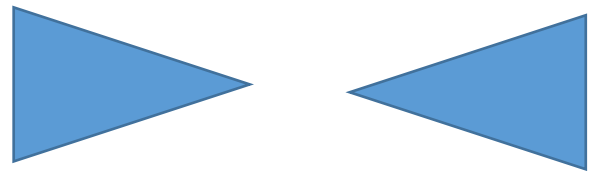
<b>A.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>	<b>D.</b>	<b>E.</b> ne želimo odgovoriti na pitanje
0	1	2	3	

Rješenje.

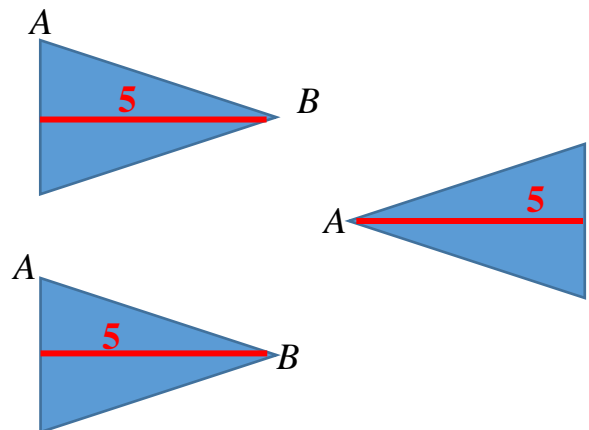
Nacrtajmo zadano. Točka  $B$  pripada pravcu  $x = 6$ . Udaljenost točke  $A$  od tog pravca je 5.



Skicirajmo u kojem položaju se može nalaziti jednakokračan trokut kojem je osnovica usporedna s osi ordinata.



Budući da je vrh  $A$  lijevo od vrha  $B$ , mogućnosti su sljedeće:



Površina svakog od tih trokuta jednaka je 30.

Duljina visine na osnovicu je svakom 5.

Iz  $P_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2}$  slijedi da je duljina osnovice 12.

Nacrtajmo ta 3 trokuta u koordinatnom sustavu.

Točan odgovor je D.