Naučimo - srednja škola

2. kolo 2023./2024.

1. Ako je dani sustav neodređen, kako se odnose realni parametri a i b?

$$\begin{cases} 2(a-x)+3by = x+y+5 \\ 2(y-6x-2) = 3a-by \end{cases}$$

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
3 : 2	2 : 5	2 : 3	8 : 3	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pojednostavnimo jednadžbe.

$$\begin{cases} 2(a-x)+3by = x+y+5 \\ 2(y-6x-2) = 3a-by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-2x+3by = x+y+5 \\ 2y-12x-4 = 3a-by \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-x+3by-y = 5-2a \\ -12x+2y+by = 3a+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+(3b-1)y = 5-2a \quad |\cdot 4 \\ -12x+(2+b)y = 3a+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12x+(12b-4)y = 20-8a \\ -12x+(2+b)y = 3a+4 \end{cases}$$

Budući da su koeficijenti uz x u obje jednadžbe jednaki, sustav će biti neodređen ako su jednaki i koeficijenti uz nepoznanicu y i slobodni član.

$$12b-4 = 2+b \quad \text{i} \quad 20-8a = 3a+4$$
$$11b = 6 \quad \text{i} \quad 11a = 16$$

$$b = \frac{6}{11} \quad \text{i} \quad a = \frac{16}{11}$$

$$a : b = \frac{16}{11} : \frac{6}{11} = 16 : 6 = 8 : 3$$

Točan odgovor je D.

2. Anja, Ruža i njihov brat Bruno treniraju različite sportove: ritmičku gimnastiku, umjetničko klizanje i atletiku. Tata Igor tijekom je tjedan dana znakom ***x*** u tablicu zapisivao koji dan je tko imao trening, ali se pritom zabunio i napravio dvije pogreške. Jedan dan Ružin je trening upisao polje iznad (Anji), a jedan dan Anjin je trening upisao u pogrešan dan. Bruno je trenirao točno kako je tata zapisao u tablicu. Ako znamo da su dva dana u tjednu trenirali svi troje i da nedjeljom nije trenirao nitko, koliko je dana u tjednu dvoje od njih troje imalo trening?

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	x			x	x		x
Ruža		x		x			
Bruno	x		x	x		x	

A.	B.	C.	D.	E.
0	1	2	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Dva dana u tjednu su trenirali svi troje.
Budući da su Brunovi dani točno upisani zaključujemo da to mogu biti samo ponedjeljak, srijeda, četvrtak ili subota. Međutim, to ne mogu biti srijeda i subota jer u tim danima ni Ruža ni Anja nemaju zabilježen trening pa dozvoljenim premještanjem ne možemo popuniti dva polja.
Budući da četvrtkom već treniraju svi troje, preostalo je provjeriti ponedjeljak.

Spustimo Anjin ponedjeljak Ruži.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja				x	x		x
Ruža	x	x		x			
Bruno	x		x	x		x	

Preostalo je jedan Anjin trening premjestiti na ponedjeljak. To mora biti nedjelja, jer nedjeljom nije nitko trenirao.

	P	U	S	Č	P	S	N
Anja	x			x	x		
Ruža	x	x		x			
Bruno	x		x	x		x	

Ne postoji dan u tjednu u kojem je treniralo dvoje od njih troje.

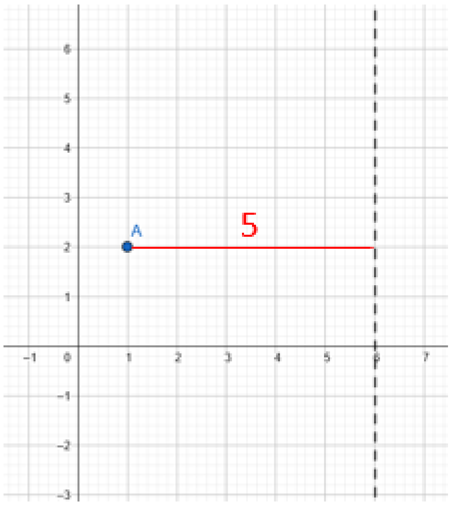
Točan odgovor je A.

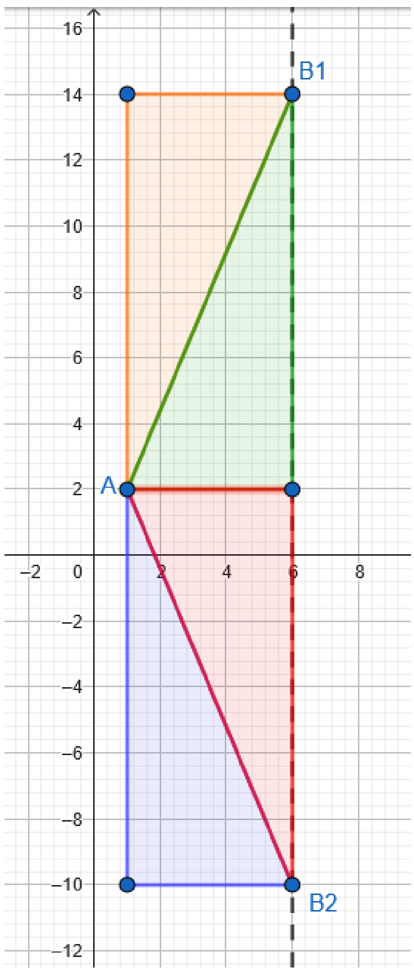
3. Točke $A(1,\ 2)$ i $B(6,\ y)$ krajnje su točke hipotenuze pravokutnog trokuta ABC kojem su katete usporedne s koordinatnim osima, a površina iznosi 30 kvadratnih jedinica. Koliki može biti y?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
6	8	12	14	ne želimo odgovoriti na pitanje

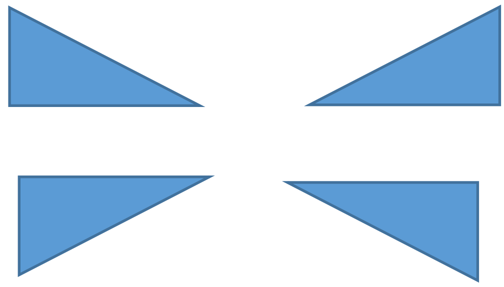
Rješenje.

Nacrtajmo zadano. Točka B pripada pravcu $x = 6$. Udaljenost točke A od tog pravca je 5.

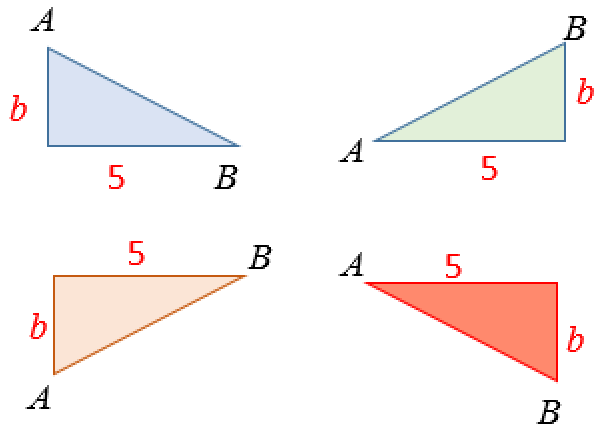




Skicirajmo u kojem položaju se može nalaziti pravokutan trokut kojem su katete paralelne s koordinatnim osima.



Budući da su A i B krajnje točke hipotenuze pravokutnog trokuta ABC, mogućnosti su slijedeće:



Površina svakog od tih trokuta jednaka je $\dfrac{5 \cdot b}{2}$.

S obzirom na to da je površina jednaka 30, zaključujemo da je duljina katete $b = 12$.

Nacrtajmo trokute u koordinatnom sustavu.

$B_1(6,14)$ i $B_2(6,-10)$

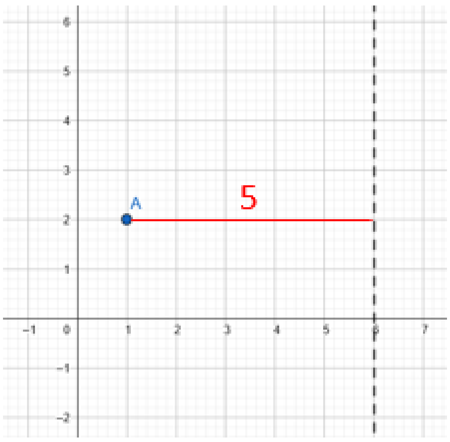
Točan odgovor je D.

4. Točke $A(1, 2)$ i $B(6, y)$ vrhovi su jednakokračnog trokuta kojem je osnovica usporedna s osi apscisa, a površina iznosi 30 kvadratnih jedinica. Koliko postoji takvih trokuta?

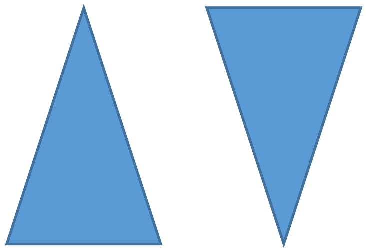
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2	3	4	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

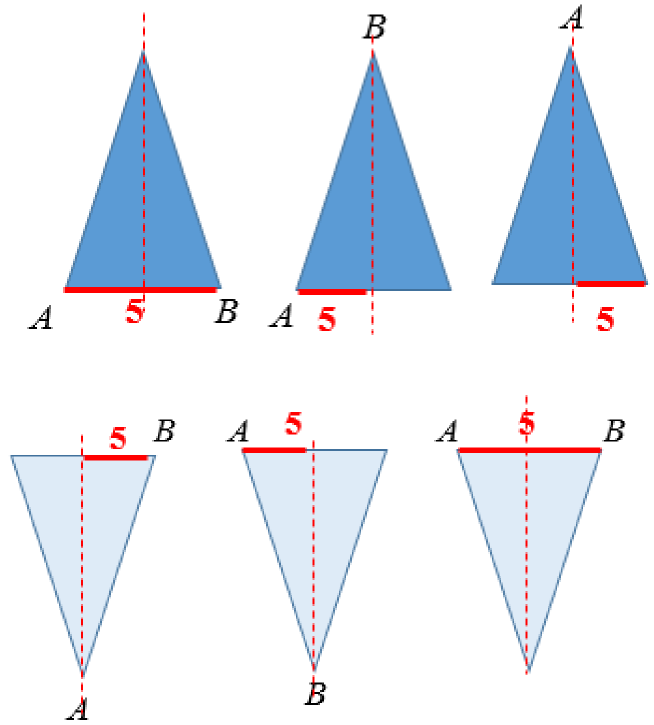
Nacrtajmo zadano. Točka B pripada pravcu $x = 6$. Udaljenost točke A od tog pravca je 5.

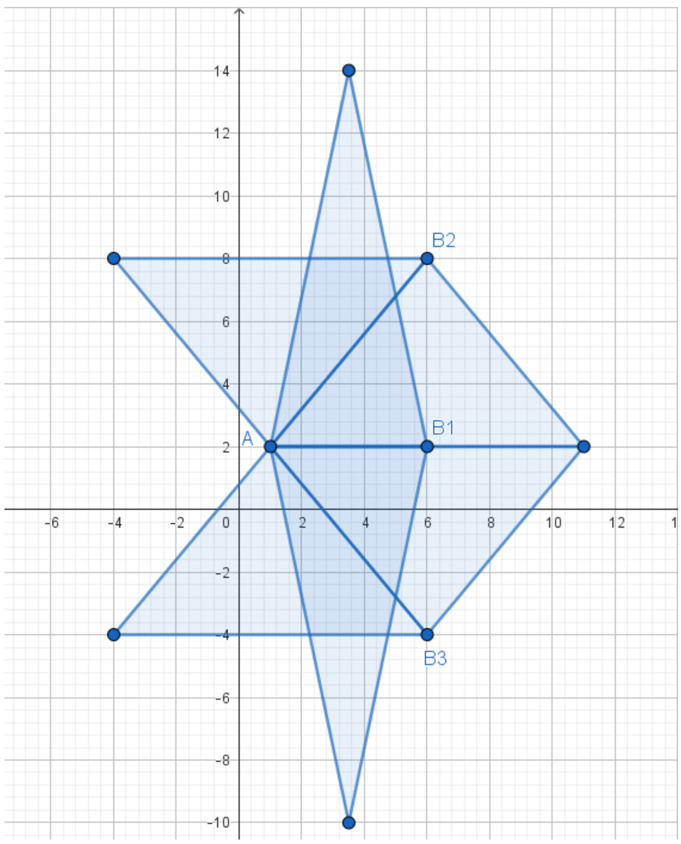


Skicirajmo u kojem položaju se može nalaziti jednakokračan trokut kojem je osnovica usporedna s osi apscisa.



Budući da je vrh A lijevo od vrha B, mogućnosti su sljedeće:





Površina svakog od tih trokuta jednaka je 30. Osnovice su im 5 ili 10. Iz $P_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2}$ slijedi da su visine na osnovicu duljine 12 ili 6. Nacrtali smo svih 6 trokuta u koordinatnom sustavu.

Točan odgovor je D.

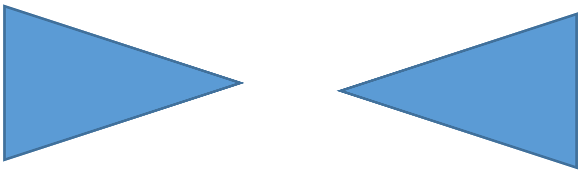
5. Točke $A(1, 2)$ i $B(6, y)$ vrhovi su jednakokračnog trokuta kojem je osnovica usporedna s koordinatnom osi, a površina iznosi 30 kvadratnih jedinica. Koliko postoji takvih trokuta?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
4	7	8	9	ne želimo odgovoriti na pitanje

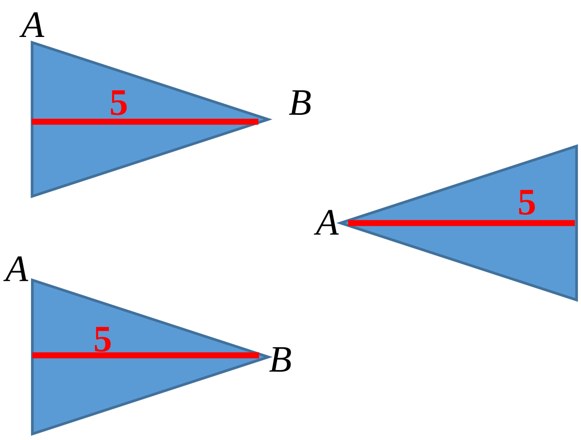
Rješenje.

U prethodnom zadatku nacrtali smo 6 jednakokračnih trokuta kojima je osnovica usporedna s osi apscisa. Preostalo je naći trokute kojima je osnovica usporedna s osi ordinata.

Skicirajmo u kojem položaju se može nalaziti jednakokračan trokut kojem je osnovica usporedna s osi ordinata.

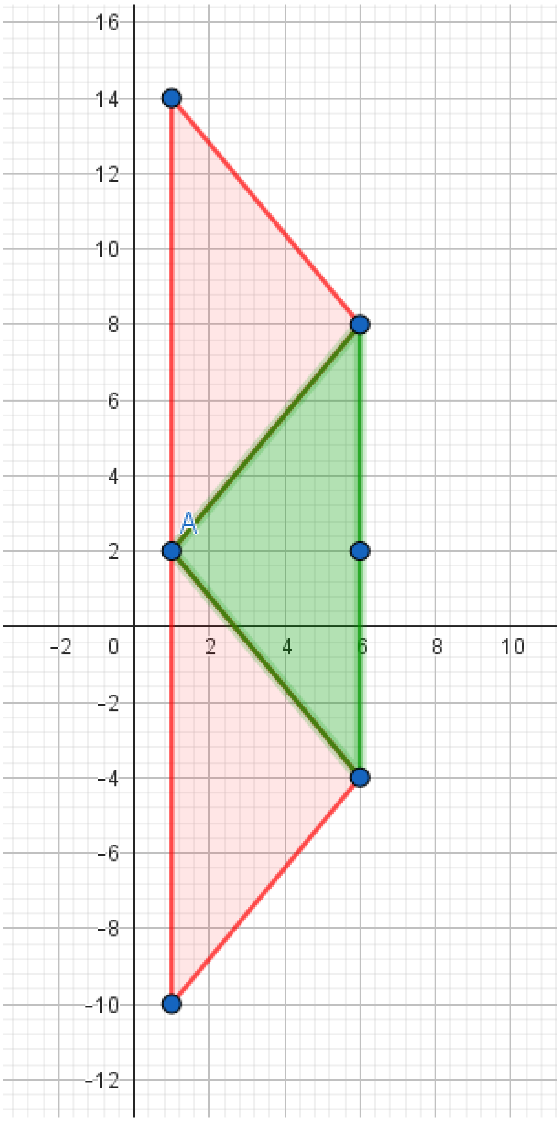


Budući da je vrh A lijevo od vrha B, mogućnosti su sljedeće:



Površina svakog od tih trokuta jednaka je 30. Duljina visine na osnovicu je svakom 5. Iz $P_\Delta = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$ slijedi da je duljina osnovice 12.

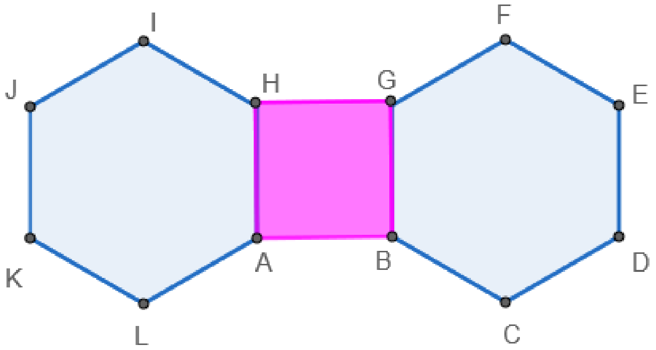
Nacrtajmo ta 3 trokuta u koordinatnom sustavu.



Trokuta je ukupno 6 + 3 = 9.

Točan odgovor je D.

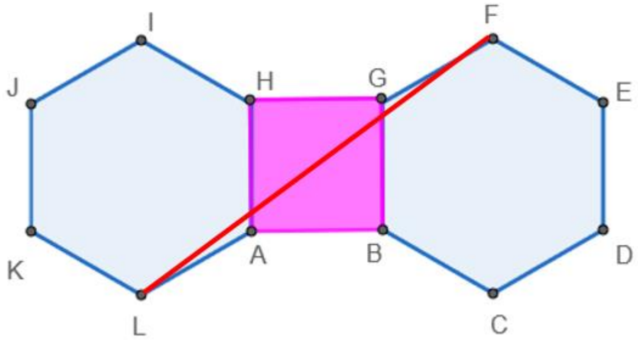
6. Kvadratu $ABGH$ duljine stranice a na slici s lijeve i desne strane docrtani su pravilni šesterokuti. Kolika je udaljenost točaka F i L ?



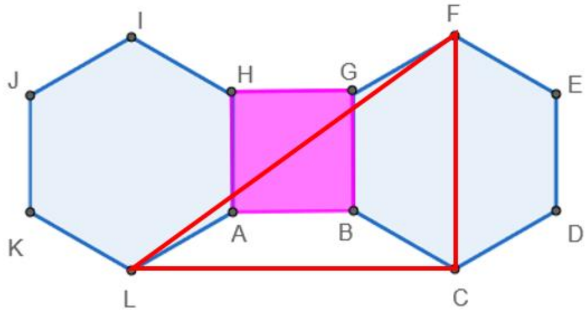
A.	B.	C.	D.	E.
$a\sqrt{6+2\sqrt{3}}$	$a\sqrt{8+2\sqrt{3}}$	$a\left(2+\sqrt{3}\right)$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

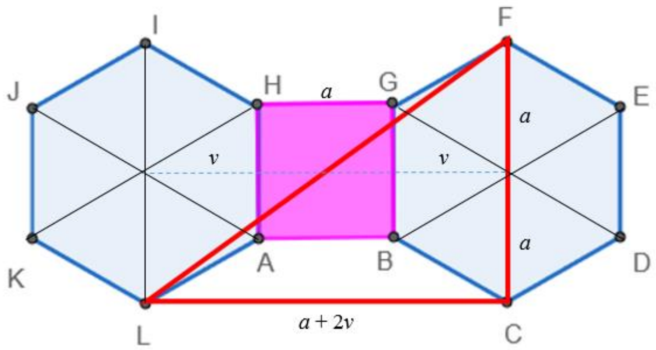
Uočimo traženu udaljenost.



Promotrimo trokut LCF.



Trokut je pravokutan i tražena udaljenost je duljina njegove hipotenuze.



$$|LF|=\sqrt{|LC|^2+|CF|^2}=\sqrt{(a+2v)^2+(2a)^2}=\sqrt{\left(a+a\sqrt{3}\right)^2+4a^2}=\sqrt{a^2+2\sqrt{3}a^2+3a^2+4a^2}=a\sqrt{8+2\sqrt{3}}$$

Točan odgovor je B.

7. Ako za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi da je $c < 0$ i $f(1) > 0$, koliko je danih tvrdnji sigurno točno?

- vodeći je koeficijent pozitivan
- umnožak je nultočki pozitivan
- ekstrem je pozitivan
- diskriminanta je pozitivna

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
4	3	2	1	ne želimo odgovoriti na pitanje

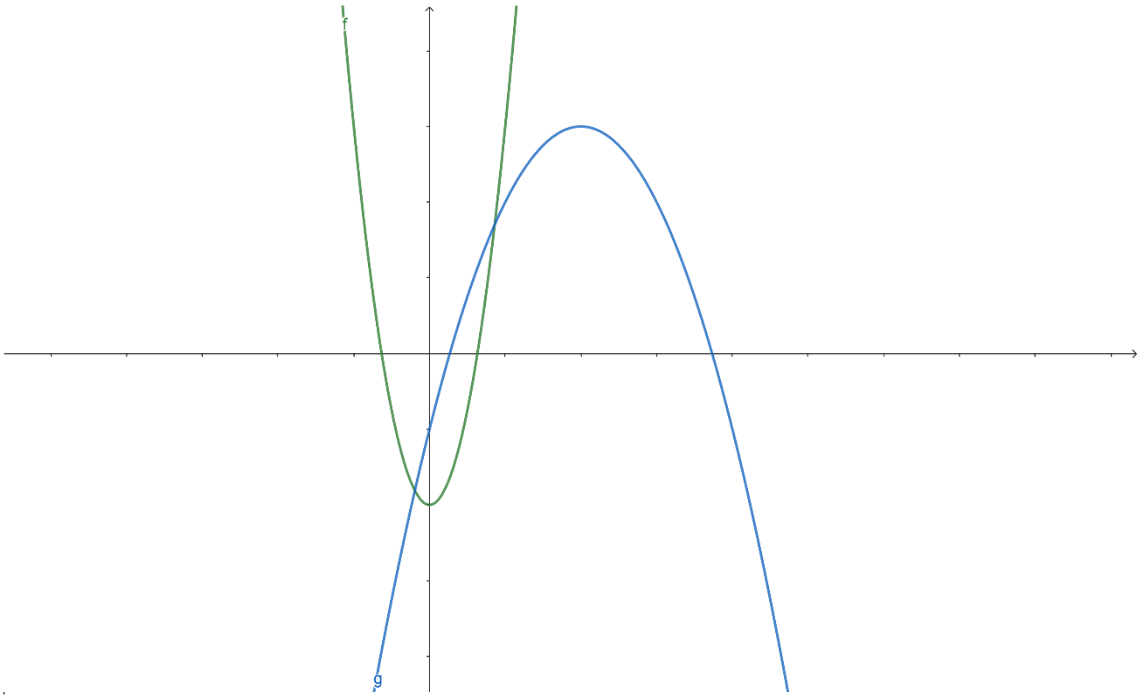
Rješenje.

$c < 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) < 0 \quad \Rightarrow$ graf funkcije siječe os ordinata u nekom negativnom broju

$f(1) > 0 \quad \Rightarrow$ za $x = 1$ graf funkcije ima pozitivnu vrijednost.

Budući da kvadratna funkcija mijenja predznak, zaključujemo da sigurno ima realne nultočke (diskriminanta pozitivna). Četvrta tvrdnja je uvijek točna.

Prve tri tvrdnje ne moraju biti točne. Da bismo ih opovrgnuli, dovoljno je skicirati graf jedne kvadratne funkcije koja ih ne zadovoljava.



„Plava funkcija“ ima negativan vodeći koeficijent, pa ne zadovoljava prvu tvrdnju.

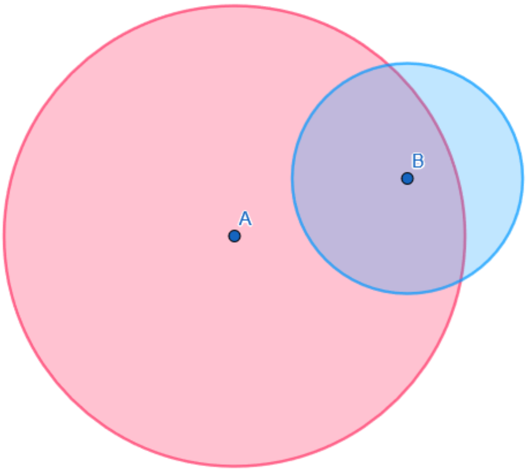
„Zelena funkcija“ ima nultočke različitog predznaka (umnožak im je negativan) i ekstrem joj je negativan. Ona ne zadovoljava drugu i treću tvrdnju.

Točan odgovor je D.

8. Površina presjeka manjeg i većeg kruga iznosi 25 % površine manjeg kruga, ali i 5 % površine njihove unije. Kako se odnose duljine polumjera manjeg i većeg kruga?

A.	B.	C.	D.	E.
$2:\sqrt{17}$	1 : 2	$1:\sqrt{3}$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.



Duljinu polumjera veće kružnice označimo s R, a manje s r.

$$P_{velika} = R^2\pi$$

$$P_{mala} = r^2\pi$$

Površina presjeka manjeg i većeg kruga iznosi 25 % površine manjeg kruga $\Rightarrow$ $P_{presjek} = r^2\pi \cdot 0.25$

Površina presjeka manjeg i većeg kruga iznosi 5 % površine njihove unije $\Rightarrow$ $P_{presjek} = P_{unija} \cdot 0.05$

$$\Rightarrow \quad P_{unija} \cdot 0.05 = r^2\pi \cdot 0.25$$

$$\Rightarrow \quad P_{unija} = 5r^2\pi$$

$$P_{unija} = P_{velika} + P_{mala} - P_{presjek}$$

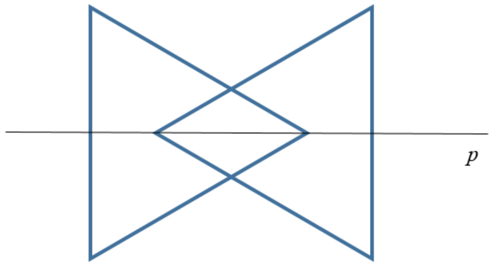
$$P_{unija} = R^2\pi + r^2\pi - P_{presjek} \quad \Rightarrow \quad 5r^2\pi = R^2\pi + r^2\pi - r^2\pi \cdot 0.25 \quad \Rightarrow \quad 4.25 \cdot r^2\pi = R^2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4.25} = \frac{100}{425} = \frac{4}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

Točan odgovor je A.

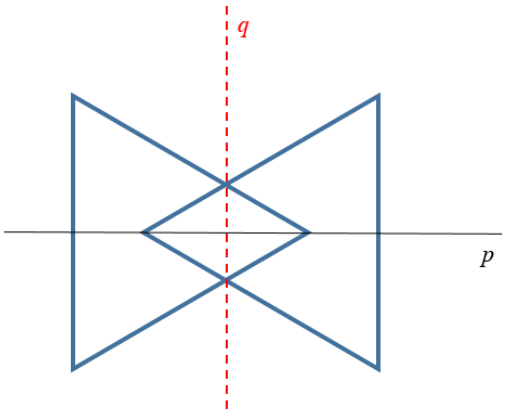
9. Duljine stranica jednakostraničnih trokuta na slici su 3 cm. Vrh jednog trokuta težište je drugog. Koliki je obujam tijela nastalog njihovom rotacijom oko pravca p?

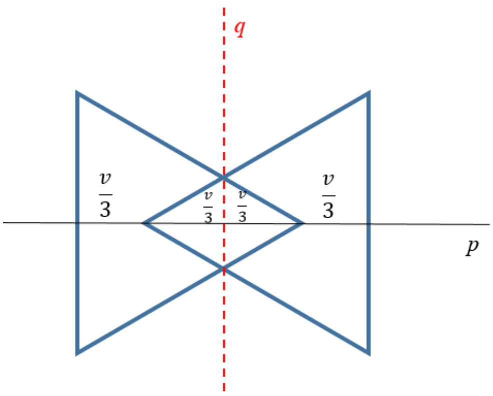


A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{13\sqrt{3}}{2}\pi\ \text{cm}^3$	$\frac{26\sqrt{3}}{3}\pi\ \text{cm}^3$	$\frac{13\sqrt{3}}{6}\pi\ \text{cm}^3$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Nacrtajmo pravac q točkama presjeka danih trokuta. Okomit je na pravac p i os je simetrije lika koji rotira pa je prepolovio udaljenost među težištima.





Odredimo volumen tijela nastalog rotacijom desne polovice i dobiveni rezultat pomnožimo s 2.

Tijelo nastalo rotacijom je krnji stožac. Volumen tog krnjeg stošca dobit ćemo kada iz volumena cijelog stošca oduzmemo volumen dopunjka.

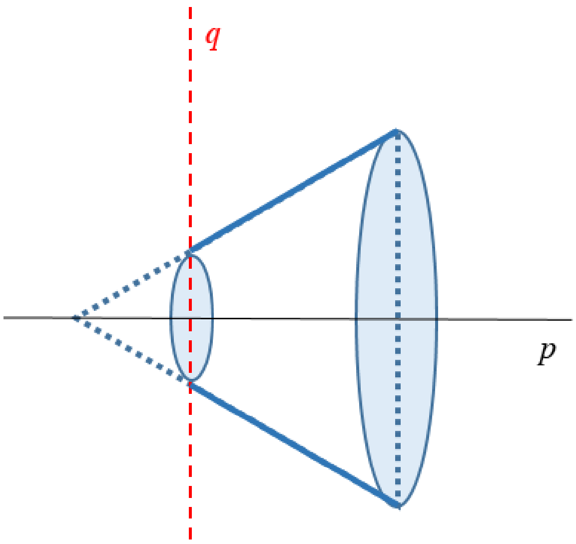
Duljina visine dopunjka v_1 je 3 puta manja od visine v cijelog stošca.

$$v : v_1 = 3 : 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad V : V_1 = 3^3 = 27$$

$$V_{krnji} = V - V_1 = 27V_1 - V_1 = 26V_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3} r_1^2 \pi \cdot v_1 = \frac{1}{3} 1^2 \pi \cdot \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

$$V_{krnji} = 26 \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{6} = \frac{13\sqrt{3}}{3}\pi$$



Ne zaboravimo da je traženi volumen dvostruko veći.

Točan odgovor je B.

10. Odredite skup vrijednosti funkcije $f(x)=|\log_2 x|-2$ na intervalu $\left[\frac{1}{4},2\right]$.

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\{-2\}$	$[-1,0]$	$[-2,0]$	$[-2,-1]$	ne želimo odgovoriti na pitanje

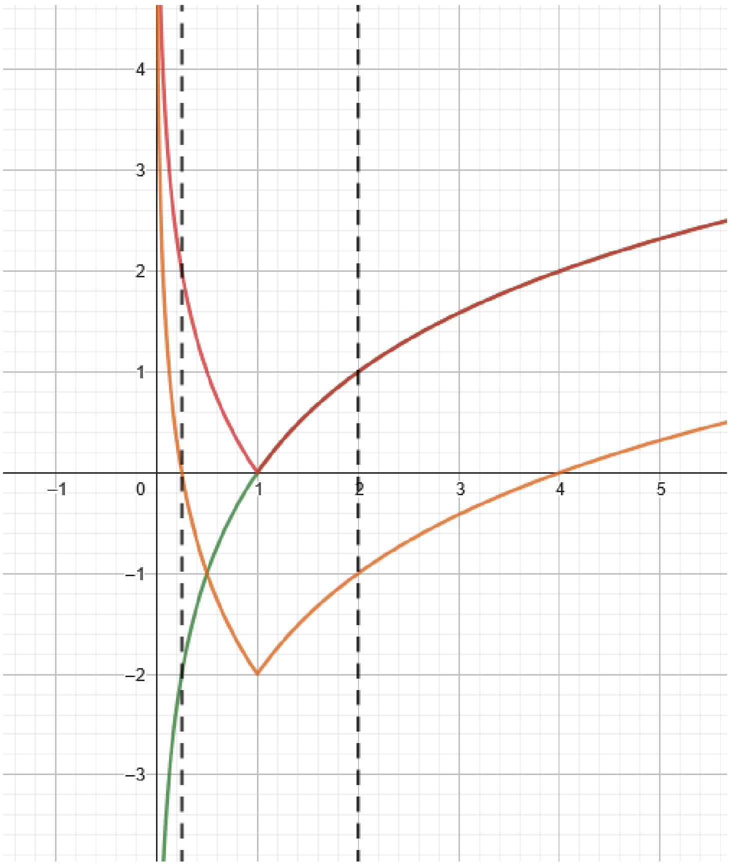
Rješenje.

Želimo nacrtati graf zadane funkcije.

$f_1(x)=\log_2 x$

$f_2(x)=|\log_2 x|$

$f(x)=|\log_2 x|-2$



Iako ih možemo pročitati s grafa, izračunajmo vrijednosti dane funkcije u rubnim točkama danog intervala.

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left|\log_2 \frac{1}{4}\right|-2=|-2|-2=2-2=0 \quad \text{i} \quad f(2)=|\log_2 2|-2=|1|-2=1-2=-1$$

Najmanja vrijednost funkcije na danom intervalu je –2 (za x = 1), a najveća 0 (za x = 0.25).

Slika funkcije je $[-2,0]$.

Točan odgovor je C.

11. Ako je $\sin x = t$, koliko je $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{ctg\left(17\pi - x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$\sqrt{1-t^2}$	$-\sqrt{1-t^2}$	$-t$	t	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pojednostavnimo svaki od četiri izraza.

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$ (sinus je neparna funkcija; komplementarne formule)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x-2\pi\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ (period kosinusa je 2π; kosinus je parna funkcija; komplementarne formule)

$ctg\left(17\pi - x\right) = ctg\left(-x\right) = -ctgx$ (periodičnost funkcije kotangens je π i neparna je)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos x + \sin\frac{3\pi}{2}\sin x = 0\cdot\cos x + \left(-1\right)\cdot\sin x = -\sin x$ (adicijska formula za kosinus)

Primijetimo da smo sva četiri izraza mogli pojednostavniti pomoću adicijskih formula, ali i na neki drugi način (crtajući trigonometrijsku kružnicu itd.)

$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{ctg\left(17\pi - x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)} = \frac{-\cos x\sin x}{-ctgx\cdot\left(-\sin x\right)} = \frac{-\cos x\sin x}{\cos x} = -\sin x$$

Točan odgovor je C.