Naučimo predmetna nastava

3. kolo 2023./2024.

5.5. U danom nizu znamenaka precrtaj pola znamenaka tako da šesteroznamenkasti broj koji je preostao bude najmanji moguć. Koliki je zbroj znamenaka tako dobivenog broja?

235960462475

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
17	22	20	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Niz se sastoji od 12 znamenaka. Potrebno je prekrižiti 6 znamenaka tako da broj koji ostane bude najmanji mogući šesteroznamenkasti broj.

1. način

Tražimo najmanju moguću znamenku koja može biti na mjestu stotisućice, a to je 2. S obzirom da druga dvojka u zadanome nizu iza sebe ima još samo tri znamenke, jedina mogućnost je da prva znamenka traženoga broja bude prva dvojka.

235960462475

Najmanja znamenka iza nje mogla bi biti 0. Budući da iza nule imamo još 6 znamenaka, a u šesteroznamenkastome broju nam ih nedostaje još 4, zaključujemo da nula doista može biti na mjestu desettisućice.To znači da trebamo prekrižiti sve znamenke između 2 i 0.

2~~3596~~0462475

Trebamo prekrižiti još dvije znamenke, a najmanja znamenka koja još nije prekrižena je 2. Između 0 i 2 su dvije znamenke koje trebamo prekrižiti.

2~~3596~~0~~46~~2475

Križanjem navedenih znamenaka ostaje nam broj 202 475.

Zbroj znamenaka tog broja je 2 + 0 + 2 + 4 + 7 + 5 = 20.

2. način

Tražimo prvu znamenku šesteroznamenkastog broja. To znači da ona može biti bilo koja osim posljednjih 5 znamenaka.

$$2359604\underbrace{62475}_{5}$$

Budući da želimo naći najmanji šesteroznamenkasti broj, među promatranima tražimo najmanju znamenku. Najmanja je 0, ali ona ne može biti prva znamenka pa odabiremo znamenku 2.

$$2359604\underbrace{62475}_{5}$$

Druga znamenka koju želimo odabrati može biti bilo koja osim posljednje 4 znamenke.

$$23596046\underbrace{2475}_{4}$$

Najmanja znamenka od promatranih je 0 i nju ćemo odabrati.

$$23596046\underbrace{2475}_{4}$$

Treća znamenka koju želimo odabrati može biti bilo koja osim posljednje 3 znamenke.

$$2\cancel{3596}0462\underbrace{475}_{3}$$

Najmanja znamenka od promatranih je 2 i nju ćemo odabrati.

$$2\cancel{3596}0462\underbrace{475}_{3}$$

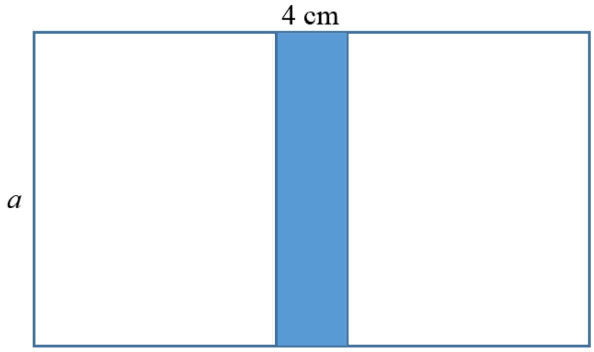
Budući da trebamo odabrati još tri znamenke, a preostale su nam samo tri znamenke, to znači da više nemamo izbora. Traženi broj je:

$$2\cancel{3596}0\cancel{46}2475.$$

Zbroj znamenaka tog broja je 2 + 0 + 2 + 4 + 7 + 5 = 20.

Točan odgovor je C.

5.9. Branka je od kartona izrezala dva kvadrata duljine stranice a. Nakon toga kvadrate je preklopila kako bi dobila veliki pravokutnik. Pritom je presjek kvadrata (obojen na crtežu) pravokutnik kojem je širina 4 cm. Koliko iznosi a, ako je površina velikog pravokutnika 9 puta veća od površine obojenog pravokutnika?



A. 20 cm	**B.** 12 cm	**C.** 18 cm	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

1. način

Krenimo od obojenog pravokutnika. Duljine stranica tog pravokutnika, iskazane u centimetrima, su a i 4. Stoga vrijedi da je njegova površina $P_P = 4a$.

Veliki je pravokutnik dobiven preklapanje dvaju kvadrata pa je njegova površina P_V manja od površine dvaju kvadrata za površinu dijela u kojem se ti kvadrati preklapaju, odnosno za površinu plavog pravokutnika P_P.

$$P_V = 2 \cdot P_{\square} - P_P$$

$$P_V = 2 \cdot a \cdot a - P_P$$

Površina velikog pravokutnika 9 je puta veća od površine plavog pravokutnika.

$$P_V = 9 \cdot P_P$$

$$2 \cdot a \cdot a - P_P = 9 \cdot P_P$$

Iz navedenoga slijedi:

$$2 \cdot a \cdot a = 9 \cdot P_P + P_P$$

$$2 \cdot a \cdot a = 10 \cdot P_P.$$

Dakle, dva kvadrata imaju površinu jednaku površini 10 plavih pravokutnika. Prepolovimo navedene vrijednosti.

$$a \cdot a = 5 \cdot P_P$$

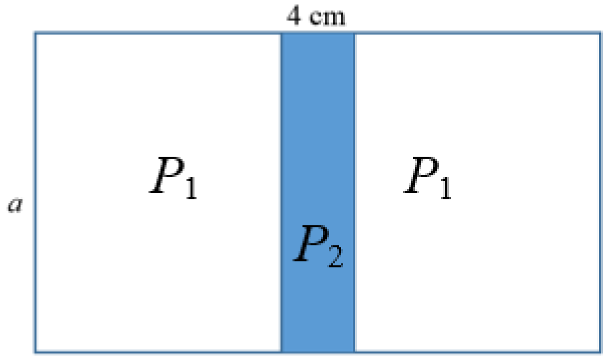
$$a \cdot a = 5 \cdot 4 \cdot a$$

$$a \cdot a = 20 \cdot a$$

Zaključujemo da vrijedi: $a = 20$ cm.

2. način

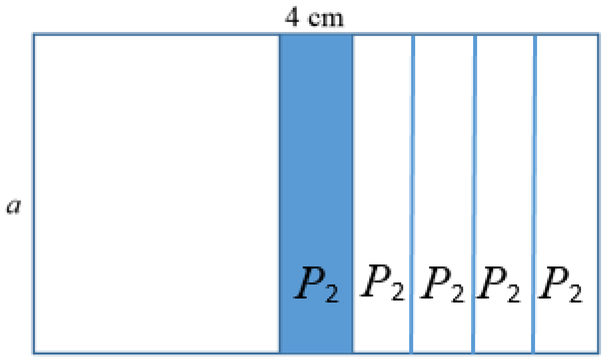
Dijelove površina označimo s P_1 i P_2.



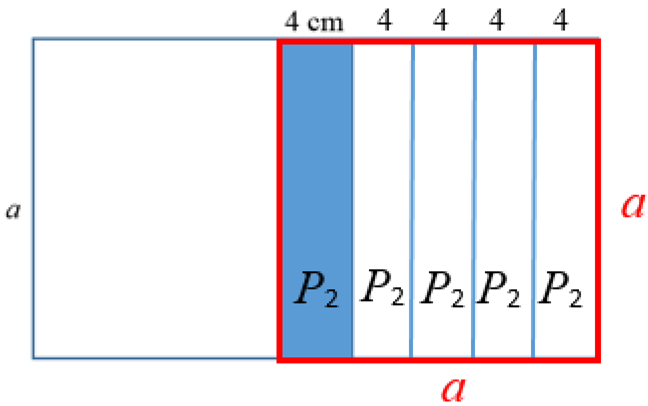
Ukupna površina je 9 puta veća od P_2.

$$2P_1 + P_2 = 9 \cdot P_2 \quad \Rightarrow \quad 2P_1 = 8 \cdot P_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 4 \cdot P_2$$

Budući da su P_1 i P_2 površine pravokutnika iste visine, zaključujemo da bijeli pravokutnik možemo podijeliti na 4 plava pravokutnika.



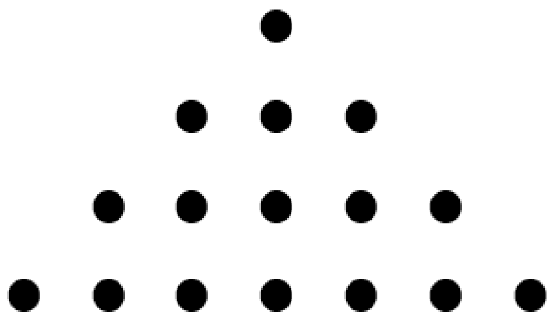
To znači da je stranica početnog kvadrata 5 puta dulja od stranice plavog pravokutnika površine P_2.



$$a = 5 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Točan odgovor je A.

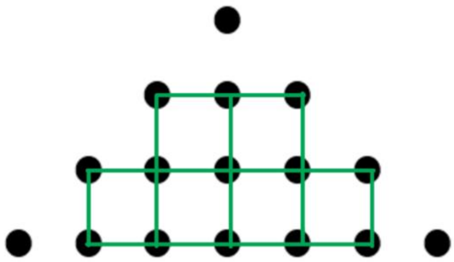
5.11. Koliko postoji kvadrata kojima su vrhovi u točkicama?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
7	9	10	11	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

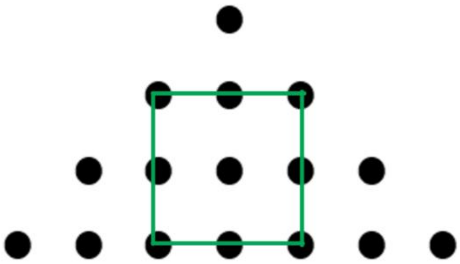
Nacrtajmo najprije sve kvadrate koji su poput zelenog i prebrojimo ih.



Broj kvadrata

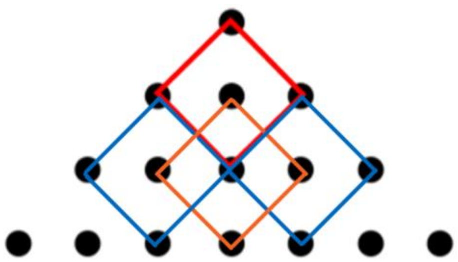
6

Pogledajmo postoje li veći kvadrati u istome položaju kao i prethodni.



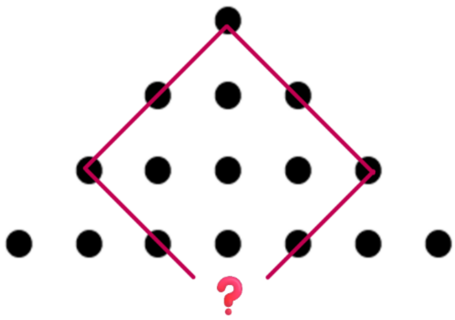
1

Prebrojimo kvadrate poput crvenog.



4

Provjerimo postoji li veći kvadrat u istome položaju kao i prethodni.



Takav kvadrat ne postoji.

Ukupno je 6 + 1 + 4 = 11 kvadrata kojima su vrhovi u točkicama.

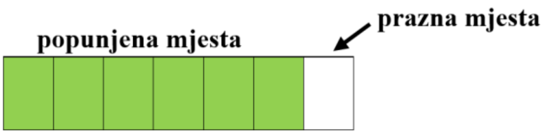
Točan odgovor je D.

5.13. Učenici idu na izlet dvama autobusima koji imaju po 56 sjedala. Broj popunjenih mjesta 7 je puta veći od broja praznih mjesta. Na svakih 14 učenika koji idu na izlet ide jedna učiteljica u pratnji. To znači, ako je broj učenika na izletu najviše 14, u pratnji ide jedna učiteljica, za 15 do 28 učenika potrebne su dvije učiteljice u pratnji, 29 do 42 učenika prate tri učiteljice itd. Koliko učenika ide na izlet?

A. 92	**B.** 90	**C.** 89	**D.** 91	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

U autobusima je ukupno 2 · 56 = 112 mjesta. Broj popunjenih mjesta 7 je puta veći od broja praznih mjesta. Prikažimo to crtežom.



Ukupan broj mjesta u autobusima možemo podijeliti na 8 dijelova od čega je 7 dijelova popunjeno, a jedan dio čine prazna sjedala.

112 : 8 = 14.

Zaključujemo da je u autobusima 14 praznim mjesta i 14 · 7 = 98 punih mjesta. Dakle, ukupan broj osoba u autobusu je 98. Potrebno je odrediti koliko je među njima učenika.

Na svakih 14 učenika ide jedna učiteljica pa 14 učenika i jednu učiteljicu možemo promatrati kao jednu skupinu od 15 osoba. Provjerimo koliko takvih skupina može biti među 98 osoba.

$$\begin{array}{l} 98 : 15 = 6 \\ \underline{-\ 90} \\ \quad\ 8 \end{array} \qquad\qquad 98 = 6 \cdot 15 + 8$$

14 učenika učiteljica

Među 98 osoba u autobusu imamo 6 puta po 14 učenika koje prati jedna učiteljica i još 8 osoba. Kako su sve četrnaestorke učenika pokrivene pratnjom učiteljica, tako je među tih 8 preostalih osoba sigurno jedna učiteljica. Stoga je među preostalih 8 osoba 7 učenika.

Dakle u autobusu je 6 ·14 + 7 = 91 učenik.

Točan odgovor je D.

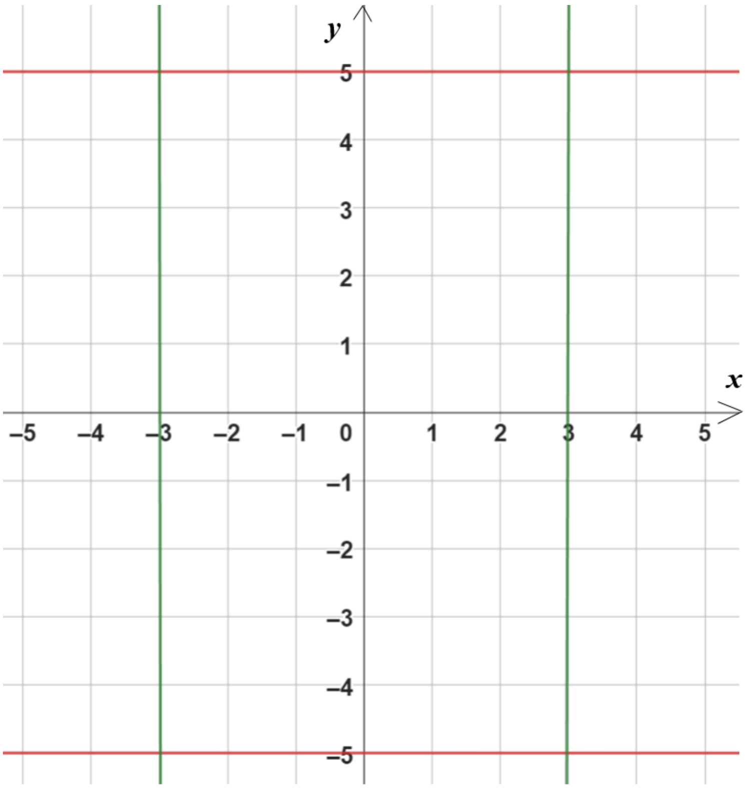
6.6. Udaljenost točke $A(m, n)$ od osi apscisa je 5, a od osi ordinata 3. Ako je zbroj brojeva m i n pozitivan, a umnožak negativan, koliko je $m - n$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
–2	8	2	–8	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Sve točke koordinatne ravnine koje su od osi apscisa udaljene 5 imaju y-koordinatu jednaku 5 ili −5.
Svim točkama koordinatne ravnine koje su od osi ordinata udaljene 3 x-koordinata je jednaka 3 ili −3.
Iz navedenog možemo zaključiti da rješenje tražimo među točkama kojima je m jednak 3 ili −3, a n jednak 5 ili −5.

Prikažimo sve grafički.
Crveni pravci sadržavaju sve točke koordinatne ravnine kojima je y-koordinata jednaka 5 ili −5, a zeleni pravci sadržavaju sve točke koordinatne ravnine kojima je x-koordinata jednaka 3 ili −3.



Točka $A(m, n)$ jedna je od četiri točke presjeka crvenih i zelenih pravaca. Stoga koordinate točke A mogu biti:

(3, 5), (−3, 5), (−3, −5) ili (3, −5).

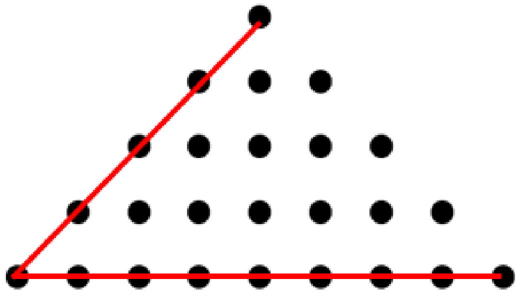
Zbroj koordinata treba biti pozitivan, a to vrijedi samo za (3, 5) i (−3, 5) jer je $3 + 5 = 8 > 0$ i $-3 + 5 = 2 > 0$.

Umnožak koordinata točke A treba biti negativan. Od prethodne dvije mogućnosti samo za (−3, 5) vrijedi navedeno jer $-3 \cdot 5 = -15 < 0$, a $3 \cdot 5 = 15 > 0$.

Zaključujemo da zadana točka A ima koordinate (−3, 5). Razlika x i y-koordinate točke A je $-3 - 5 = -8$.

Točan odgovor je D.

6.12. Koliko postoji kvadrata kojima su vrhovi u točkicama, a jedan im je par stranica usporedan s jednom od nacrtanih dužina?

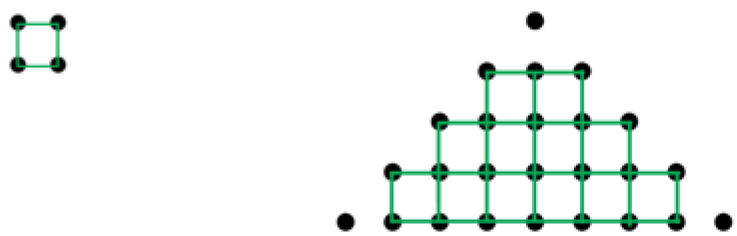


A. 26	**B.** 16	**C.** 25	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

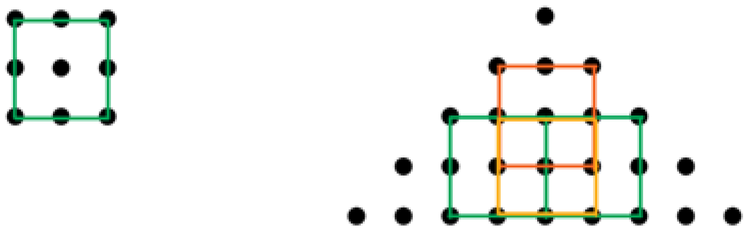
Rješenje

Nacrtajmo najprije kvadrat određene veličine i u određenome položaju, potom prebrojimo koliko se takvih kvadrata može nacrtati.

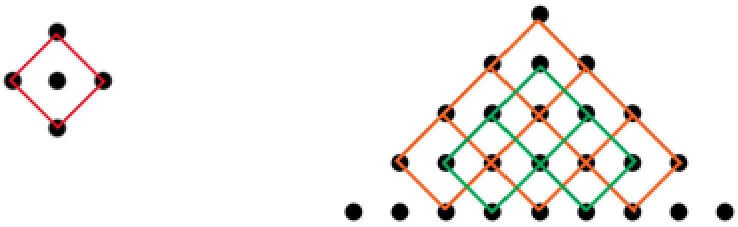
Broj kvadrata



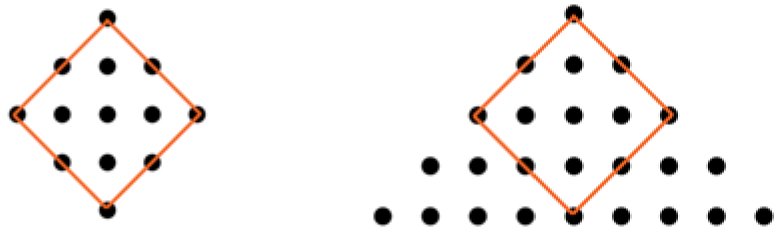
12



4



9

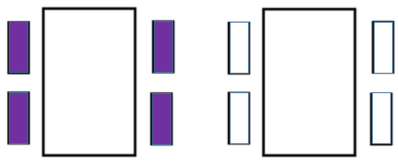


1

Ukupno je 12 + 4 + 9 + 1 = 26 kvadrata.

Točan odgovor je A.

6.14. Učiteljica i učenici pripremaju učionicu za rad u skupinama. Uz jedan stol stavili su 4 ljubičaste, a uz drugi 4 bijele stolice. Na koliko različitih načina mogu na ista mjesta staviti stolice tako da uz svaki stol bude isti broj ljubičastih i bijelih stolica sa slike?



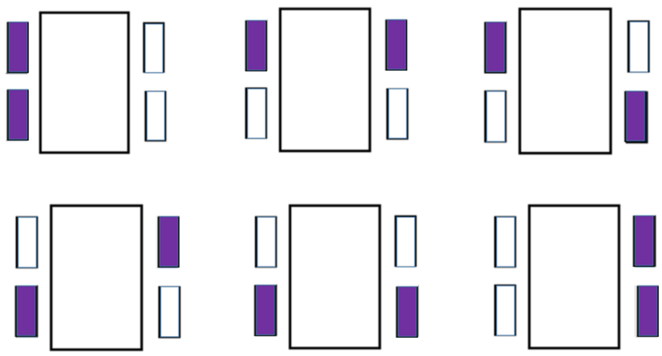
A.	B.	C.	D.	E.
12	18	24	36	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Ako su za svakim stolom četiri stolice, a one mogu biti bijele ili ljubičaste i treba biti isti broj jednih i drugih, onda možemo zaključiti da je jedino moguće da su za svakim stolom dvije bijele i dvije ljubičaste stolice.

S obzirom na to da se radi o samo dvije boje dovoljno je istražiti različite mogućnosti rasporeda stolica jedne boje jer će na preostalim mjestima biti one druge.

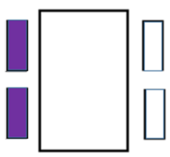
Pogledajmo moguće rasporede stolica za jednim stolom.



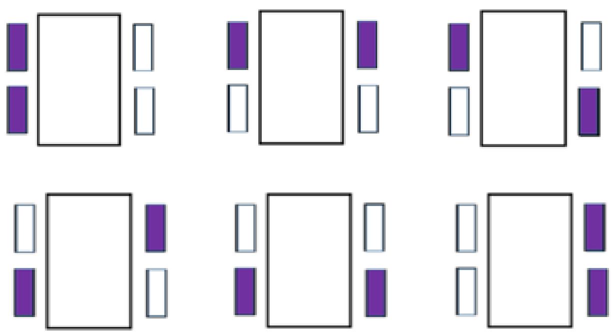
Imamo 6 rasporeda na koje dvije ljubičaste i dvije bijele stolice možemo na zadana mjesta složiti oko jednoga stola.

Pretpostavimo da smo stolice za prvim stolom složili tako da su lijevo dvije ljubičaste i desno dvije bijele. Tada stolice za drugim stolom možemo složiti na 6 načina.

1. stol



2. stol



Možemo zaključiti da za svaki raspored stolica oko jednog stola postoji 6 rasporeda stolica oko drugoga stola pa je ukupan broj rasporeda jednak $6 \cdot 6 = 36$.

Točan odgovor je D.

7.8. Igor je počeo obnavljati svoj stan. Znao je da mu samome za obnovu treba 60 dana. Nakon 20 dana Igor je povrijedio ruku pa je ostatak posla napravio njegov prijatelj Luka. Luka je posao završio za 30 dana. Koji bi dan završili obnovu stana da su cijelo vrijeme radili zajedno?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
20	25	28	26	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

Pogledajmo najprije koliko posla Igor napravi u jednome danu.
Ako Igoru samome treba 60 dana da napravi cijeli posao, onda u jednome danu napravi $\frac{1}{60}$ posla.
Pogledajmo sada koliko je posla ostalo Luki za napraviti te koliko posla Luka napravi u jednome danu.

Igor je radio 20 dana, a za cijeli posao bi mu samome trebalo 60 dana. To znači da bi, da je nastavio raditi sam, posao koji mu je ostao, a koji je preuzeo Luka, Igor napravio za 40 dana. Dakle, posao koji je ostao Luki jednak je $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ukupnog posla.

Luki je za taj dio posla trebalo 30 dana što znači da je u jednom danu napravio $\frac{1}{30}$ tog posla.

Navedeno znači da Luka u jednome danu napravi $\frac{1}{30}$ od $\frac{2}{3}$ ukupnog posla što je $\frac{1}{30} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{45}$ posla.

Kada bi radili zajedno Igor i Luka bi u jednome danu obavili $\frac{1}{60} + \frac{1}{45}$ posla.

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{45} = \frac{3+4}{180} = \frac{7}{180}$$

Dakle, radeći zajedno u jednome bi danu obavili $\frac{7}{180}$ cijeloga posla.

Označimo li broj dana s n imamo:

$$n \cdot \frac{7}{180} = 1$$

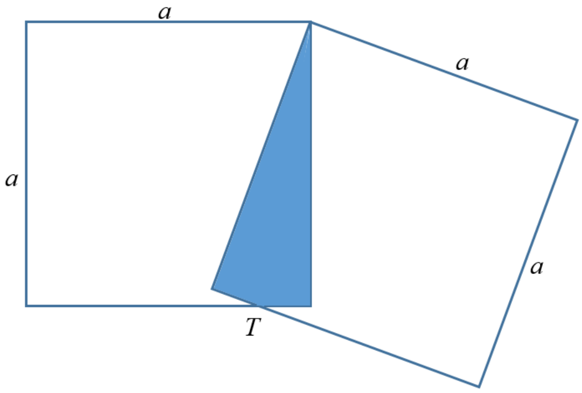
$$n = 1 : \frac{7}{180}$$

$$n = \frac{180}{7} = 25\frac{5}{7}$$

Zaključujemo da bi Igoru i Luki trebalo 25 cijelih dana i dio 26. dana da, radeći zajedno, obnove stan, odnosno s poslom bi završili 26. dan.

Točan odgovor je D.

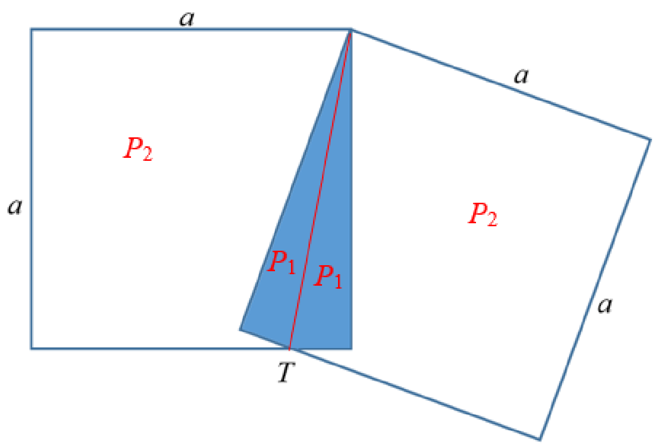
7.14. Branka je od kartona izrezala dva kvadrata duljine stranice a. Nakon toga kvadrate je preklopila kao na slici. U kojem omjeru točka T dijeli stranicu kvadrata ako je površina dobivenog lika 17 puta veća od površine obojenog četverokuta?



A. 1 : 6	**B.** 1 : 8	**C.** 1 : 9	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Obojeni četverokut podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta. Sukladni su po SSK.

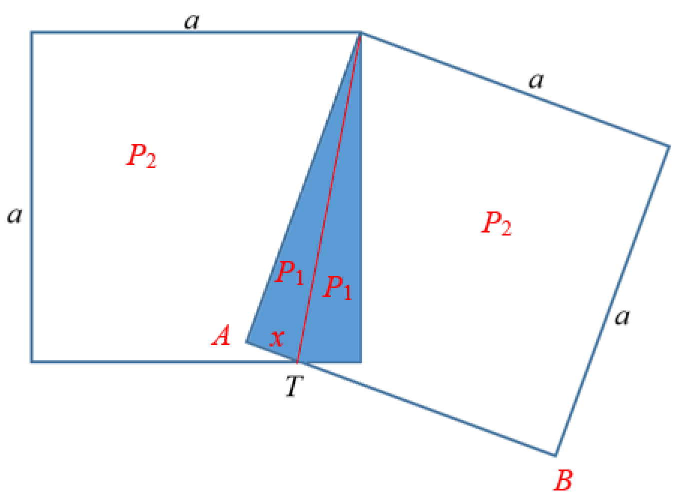


Dijelove površina označimo s P_1 i P_2.

Zapišimo jednakošću da je površina dobivenog lika 17 puta veća od površine obojenog četverokuta.

$$2P_1 + 2P_2 = 17 \cdot 2P_1$$
$$2P_2 = 32P_1$$
$$2\left(a^2 - 2P_1\right) = 32P_1$$
$$2a^2 - 4P_1 = 32P_1$$
$$2a^2 = 36P_1$$
$$a^2 = 18P_1$$

Označimo nepoznatu duljinu $|AT|$ katete pravokutnog trokuta s x.



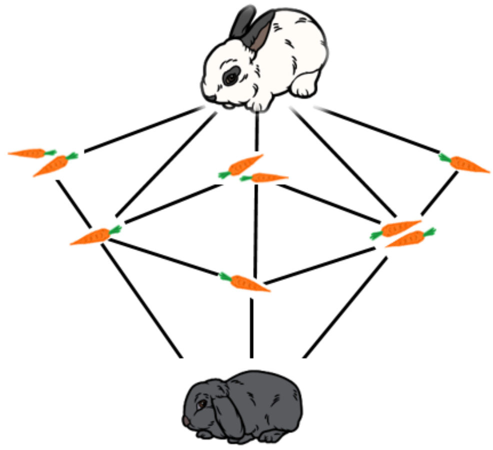
$$a^2 = 18 \cdot \frac{ax}{2}$$
$$a^2 = 9ax$$
$$x = \frac{a}{9}$$

Točka T dijeli stranicu kvadrata $\overline{AB}$ u omjeru:

$$|AT| : |TB| = x : (a - x) = \frac{a}{9} : \frac{8a}{9} = 1 : 8$$

Točan odgovor je B.

7.15. Zečica Mili želi se nacrtanim putovima popeti do Lili. Pritom će pojesti sve mrkve na koje naiđe i neće ponavljati dijelove puta. Koliko je načina da Mili dođe do Lili ako će pojesti četiri mrkve?

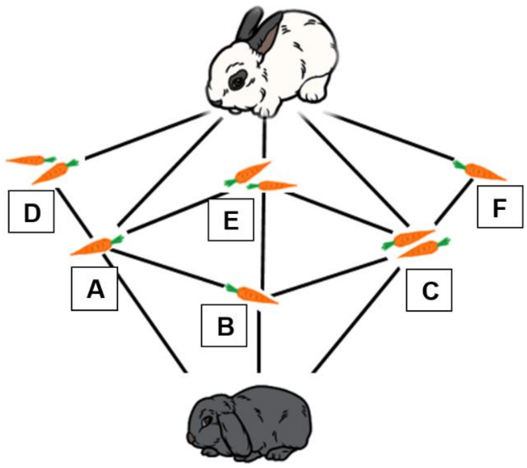


A.	B.	C.	D.	E.
8	7	6	5	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje

1. način

Označimo slovima A, B, C, D, E i F raskrižja na putovima od Mili do Lili.



Pogledajmo putove na kojima Mili može pojesti točno četiri mrkve.

Počnimo od raskrižja A i pogledajmo kojim putem Mili može proći.

Mili – A – B – C – Lili

Mili – A – B – E – Lili

Ne postoji niti jedan drugi put koji počinje s A, a na kojem je četiri mrkve.

Pogledajmo putove kojima je B prvo raskrižje.

Mili – B – A – D – Lili

Mili – B – A – E – Lili

Mili – B – E – A – Lili

Mili – B – C – F – Lili

Ostaje nam još provjeriti putove kojima je prvo raskrižje C.

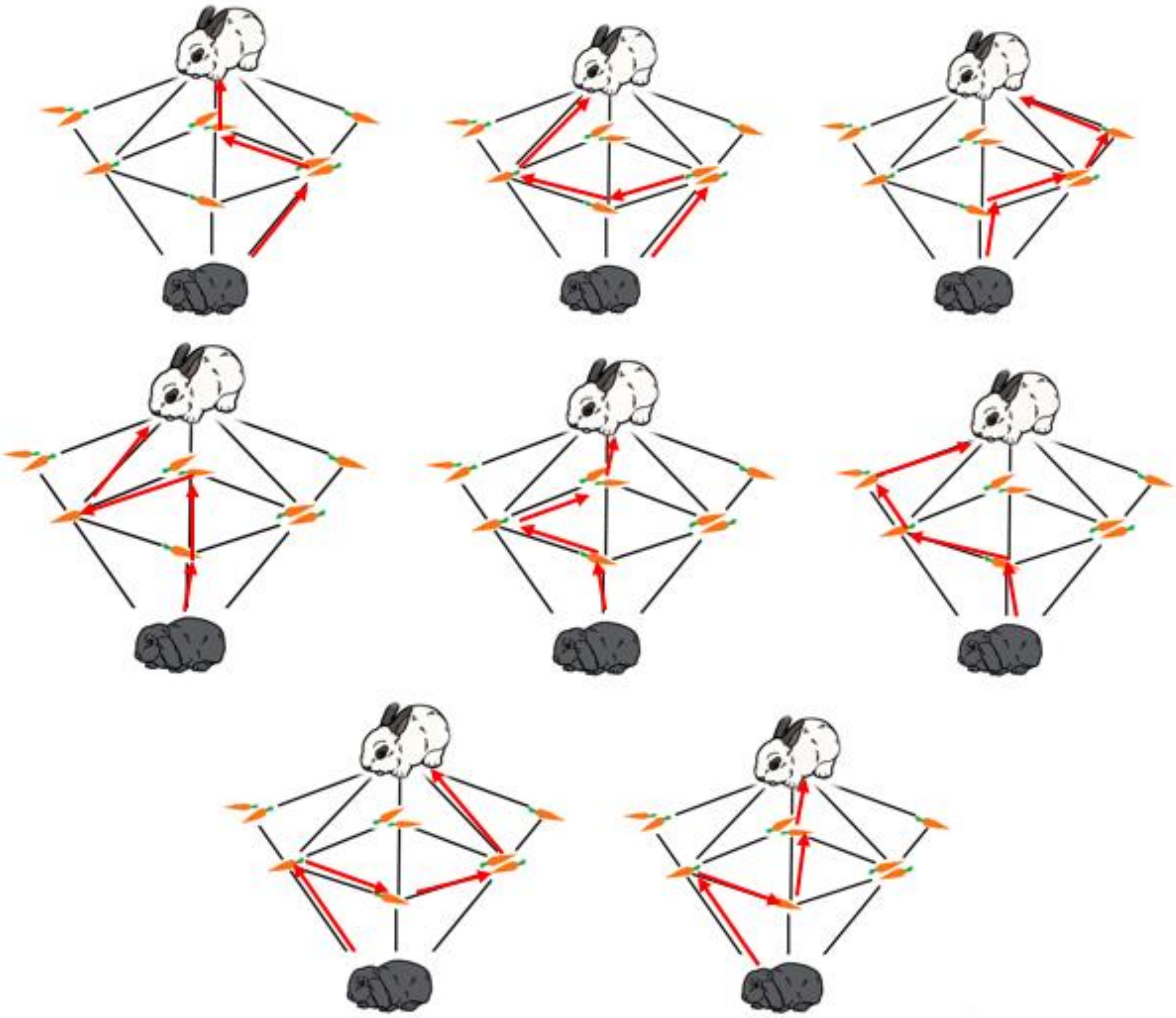
Mili – C – B – A – Lili

Mili – C – E – Lili

Mili može doći do Lili, a da pri tome pojede četiri mrkve, na 8 načina.

2. način

Skicirajmo sve putove.



Točan odgovor je A.

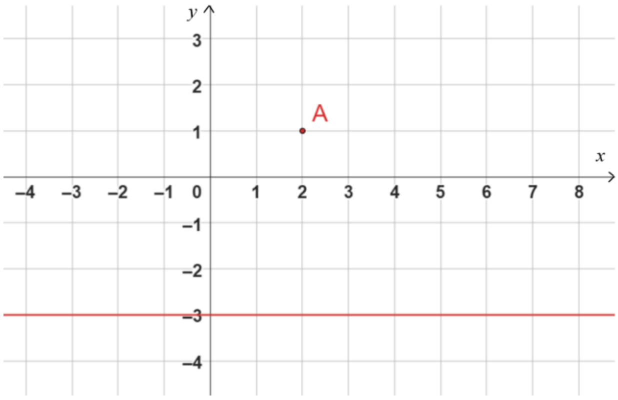
8.4. Točke (2, 1) i (x, –3) vrhovi su pravokutnog trokuta kojem su katete usporedne s koordinatnim osima, a površina iznosi 16 kvadratnih jedinica. Koliko takvih trokuta postoji?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2	4	6	više od 6	ne želimo odgovoriti na pitanje

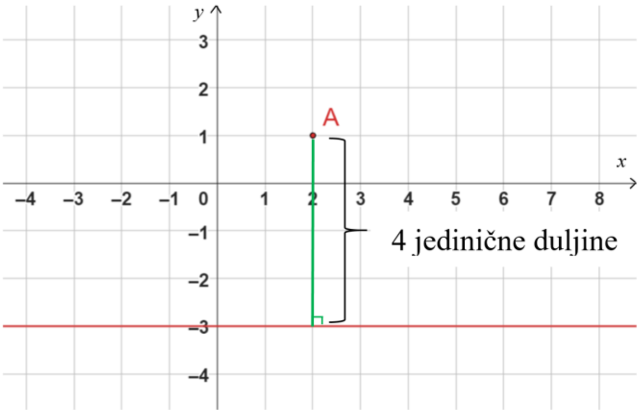
Rješenje

Sve točke s koordinatama (x, –3) pripadaju pravcu usporednom s x-osi koji y-os siječe u točki (0, −3).

Nacrtajmo točku A(2, 1) i navedeni pravac u koordinatnoj ravnini.



Točka A od pravca je udaljena 4 jedinične duljine.



S obzirom na to da su katete zadanog trokuta usporedne s koordinatnim osima, jedan vrh trokuta je u točki A, a drugi na crvenom pravcu, možemo zaključiti da jedna kateta toga trokuta ima duljinu 4. Nadalje, ta je kateta usporedna s y-osi.

Kako zadani trokut ima površinu 16 kvadratnih jedinica, a jedna mu je kateta duga 4 jedinične dužine, tako možemo odrediti duljinu druge katete. Označimo $a = 4$ i b nepoznatu duljinu druge katete.

$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

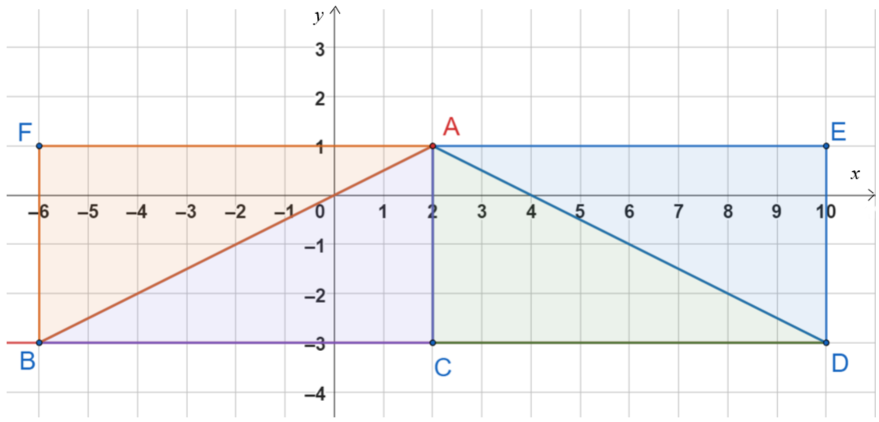
Uvrštavanjem poznatih vrijednosti dobivamo $\frac{4 \cdot b}{2} = 16$ iz čega slijedi da je $b = 8$.

Ponovimo sve što smo do sada zaključili.

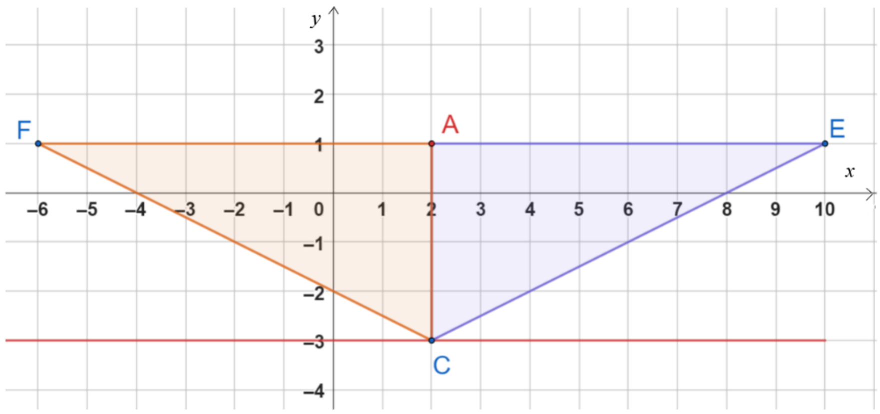
Trokuti koje tražimo imaju jedan vrh u točki A, barem jedan vrh ima y-koordinatu jednaku –3 (na crvenom je pravcu), katete trokuta usporedne su s koordinatnim osima, kateta usporedna s y-osi duga je 4, a kateta usporedna s x-osi duga je 8 jediničnih duljina.

Razmotrimo moguće položaje.

Nacrtajmo sve trokute u kojma je vrh *A* krajnja točka hipotenuze.



Nacrtajmo trokute kojima je *A* vrh uz pravi kut.



Postoji 6 trokuta sa zadanim svojstvima.

Točan odgovor je C.