Naučimo – srednja škola

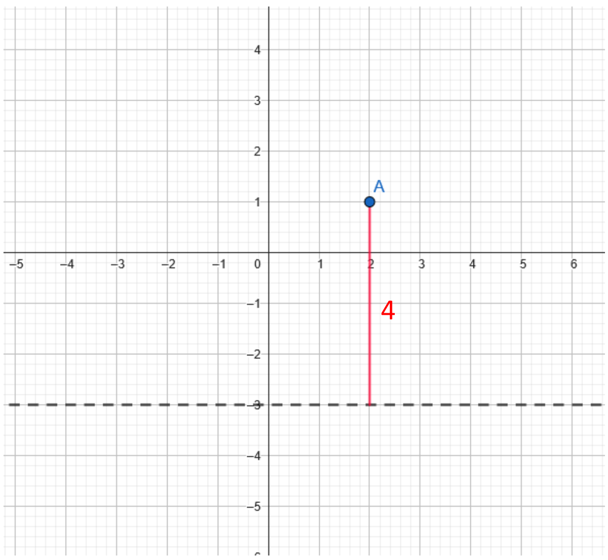
3. kolo 2023./2024.

1. Točke (2, 1) i (x, –3) vrhovi su pravokutnog trokuta kojem su katete usporedne s koordinatnim osima, a površina iznosi 16 kvadratnih jedinica. Koliko takvih trokuta postoji?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2	4	6	više od 6	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Nacrtajmo zadano. Točka B pripada pravcu y = –3. Udaljenost točke A od tog pravca je 4.



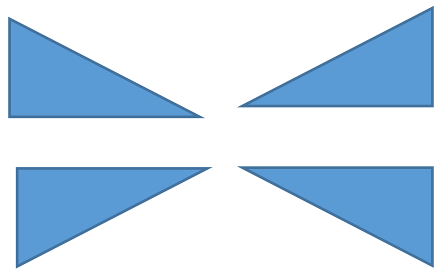
Površina svakog od tih trokuta jednaka je $\frac{4 \cdot a}{2}$.

S obzirom na to da je površina jednaka 16, zaključujemo da je duljina katete a = 8.

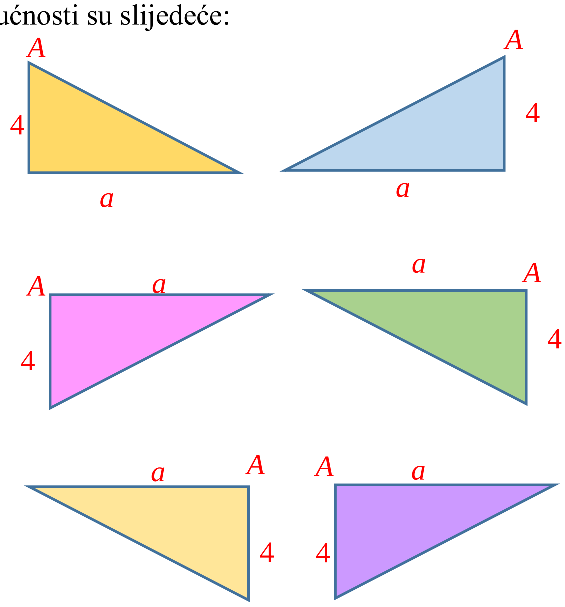
Nacrtajmo trokute u koordinatnom sustavu.

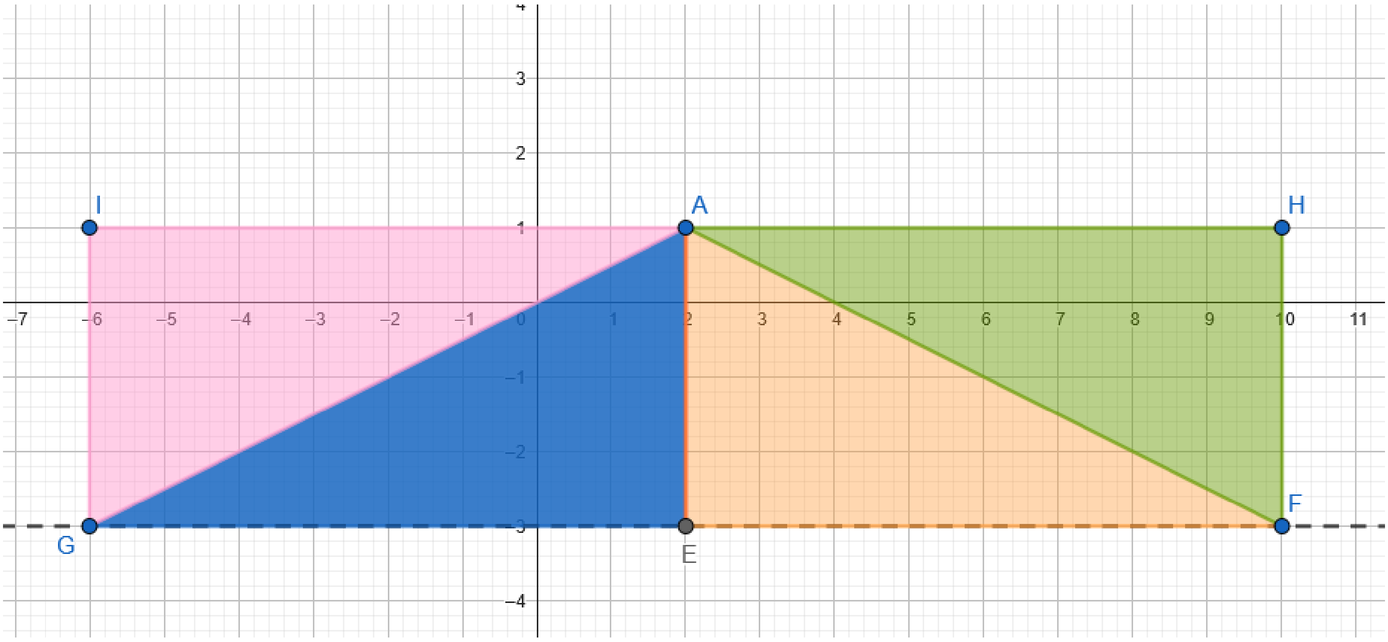
$E(2,-3)$, $F(10,-3)$, $G(-6,-3)$, $H(10,1)$, $I(-6,1)$

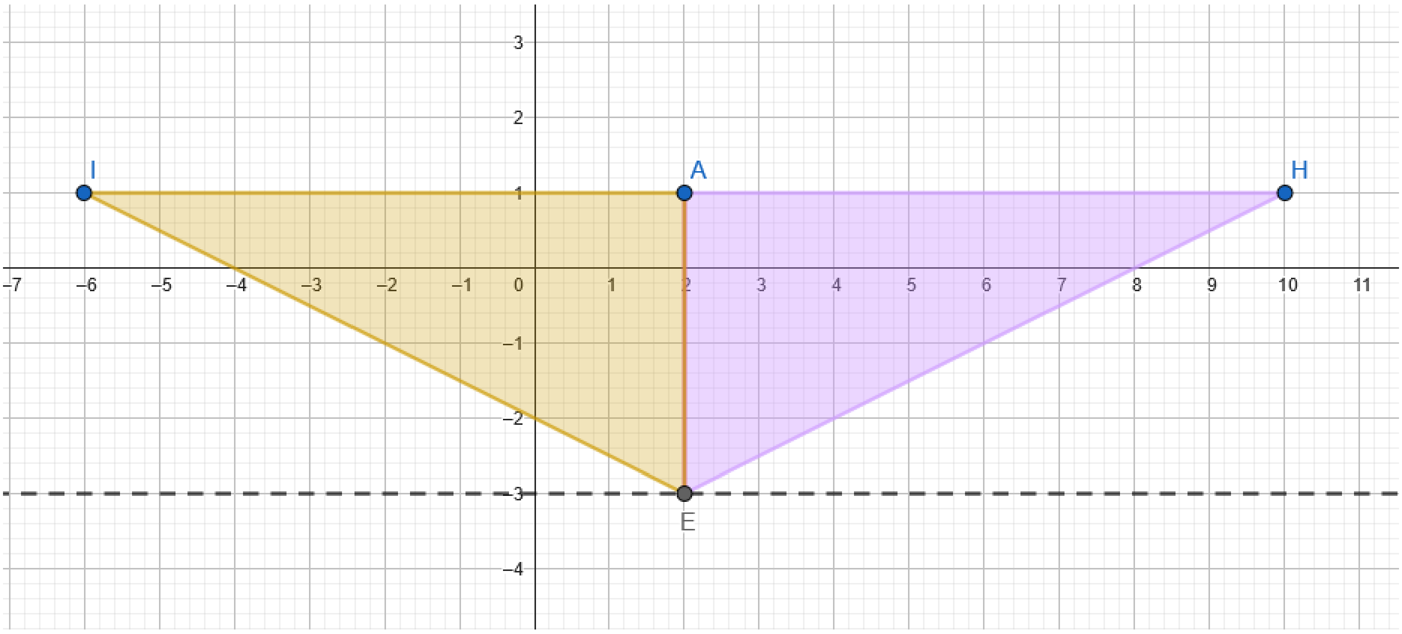
Skicirajmo u kojem se položaju može nalaziti pravokutan trokut kojem su katete paralelne s koordinatnim osima.



Budući da su A i B vrhovi pravokutnog trokuta ABC, mogućnosti su slijedeće:







Točan odgovor je C.

2. Koliko cjelobrojnih rješenja (m,n) ima jednadžba $m^2+n^2=4m-2n$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
8	4	2	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

$$m^2+n^2=4m-2n \quad \Rightarrow \quad m^2+n^2-4m+2n=0 \quad \Rightarrow \quad m^2-4m+4+n^2+2n+1=4+1$$

$$\Rightarrow \quad (m-2)^2+(n+1)^2=4+1$$

Zbroj dvaju kvadrata prirodnih brojeva jednak je 5, a to je moguće samo kada su to 1 i 4.

Jedna od mogućnosti da se to dogodi je:

$$\begin{cases}(m-2)^2=1\\(n+1)^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m-2=\pm1\\n+1=\pm2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=1 \text{ ili } m=3\\n=-3 \text{ ili } n=1\end{cases}$$

$$(m,n)\in\{(1,-3),(1,1),(3,-3),(3,1)\}$$

Ali, ako zamijenimo kvadrate 1 i 4 dobit ćemo još 4 rješenja, pa je ukupan broj cjelobrojnih rješenja dane jednadžbe 2 · 4 = 8.

Točan odgovor je A.

3. Koliko cjelobrojnih rješenja (a,b,c) ima jednadžba $a^2+b^2+c^2=2a+4b+6c$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
12	24	48	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

$$a^2+b^2+c^2=2a+4b+6c \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2+c^2-2a-4b-6c=0$$

$$a^2-2a+1+b^2-4b+4+c^2-6c+9=1+4+9 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=1+4+9$$

Zbroj triju kvadrata prirodnih brojeva jednak je 14, a to je moguće samo kada su to 1, 4 i 9.

Jedna od mogućnosti da se to dogodi je:

$$\begin{cases}(a-1)^2=1\\(b-2)^2=4\\(c-3)^2=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-1=\pm1\\b-2=\pm2\\c-3=\pm3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0 \text{ ili } a=2\\b=0 \text{ ili } b=4\\c=0 \text{ ili } c=6\end{cases}$$

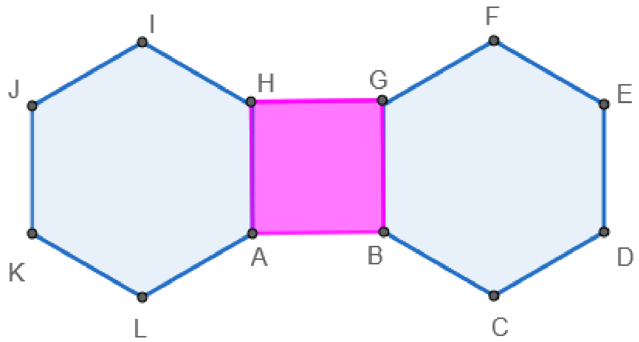
$$(a,b,c)\in\{(0,0,0),(0,0,6),(0,4,0),(0,4,6),(2,0,0),(2,0,6),(2,4,0),(2,4,6)\}$$

Postoji 8 rješenja u ovom slučaju.

Međutim, kvadrate 1, 4 i 9 možemo na 6 načina poredati, pa je ukupan broj cjelobrojnih rješenja dane jednadžbe 6 · 8 = 48.

Točan odgovor je C.

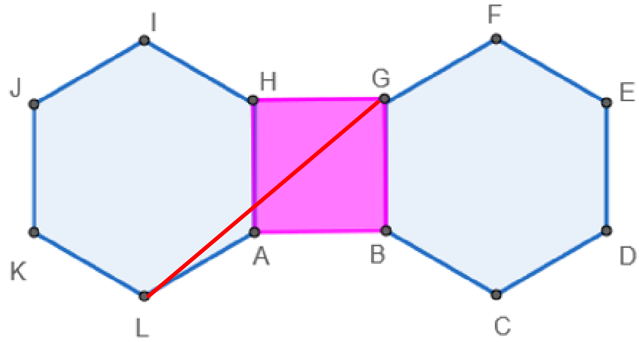
4. Kvadratu *ABGH* duljine stranice a na slici s lijeve i desne strane docrtani su pravilni šesterokuti. Kolika je udaljenost točaka G i L ?



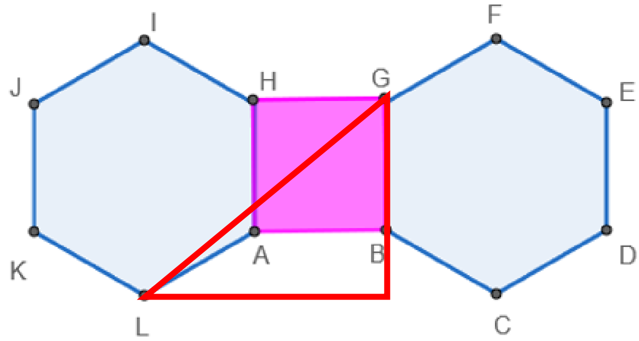
A.	B.	C.	D.	E.
$a\sqrt{4+\sqrt{3}}$	$a\sqrt{6+2\sqrt{3}}$	$a\left(1+\sqrt{2}\right)$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

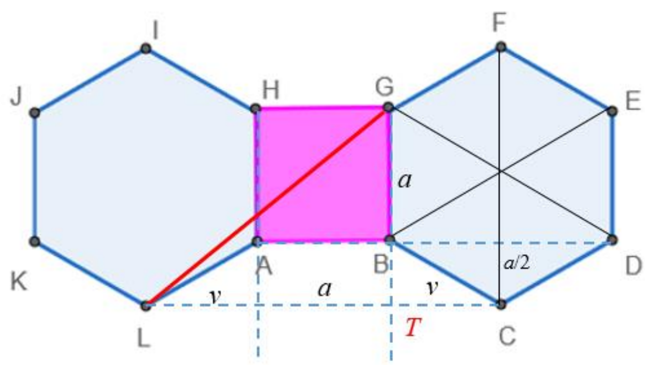
Uočimo traženu udaljenost.



Promotrimo trokut *GLT*.



Trokut je pravokutan i tražena udaljenost je duljina njegove hipotenuze.



$$|LG|=\sqrt{|LT|^2+|TG|^2}=\sqrt{(a+v)^2+\left(a+\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(a+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}a^2}=\sqrt{a^2+\sqrt{3}a^2+\frac{3}{4}a^2+\frac{9}{4}a^2}=a\sqrt{4+\sqrt{3}}$$

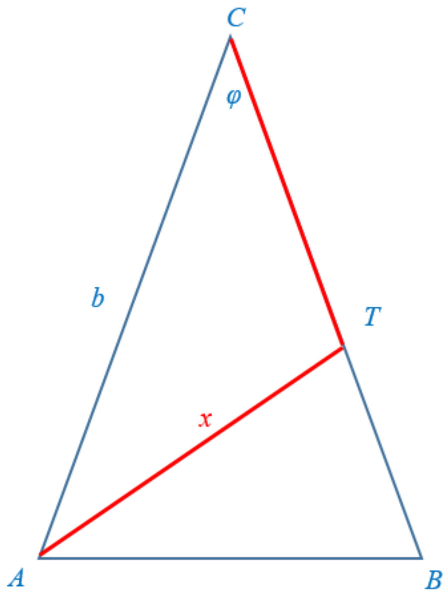
Točan odgovor je A.

5. U jednakokračnom trokutu ABC veličina kuta nasuprot osnovici $\overline{AB}$ je φ. Točka T pripada kraku $\overline{BC}$ duljine b i jednako je udaljena od točaka A i C. Kolika je duljina dužine $\overline{AT}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$b\sin\varphi$	$\dfrac{2b}{\cos\varphi}$	$\dfrac{b}{2\cos\varphi}$	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

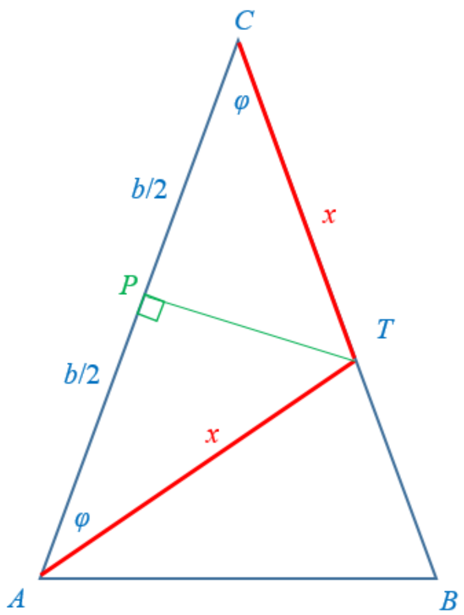
Rješenje.

Nacrtajmo zadano i traženu duljinu označimo s x.



Trokut ATC je jednakokračan pa je $|\angle TAC| = \varphi$.

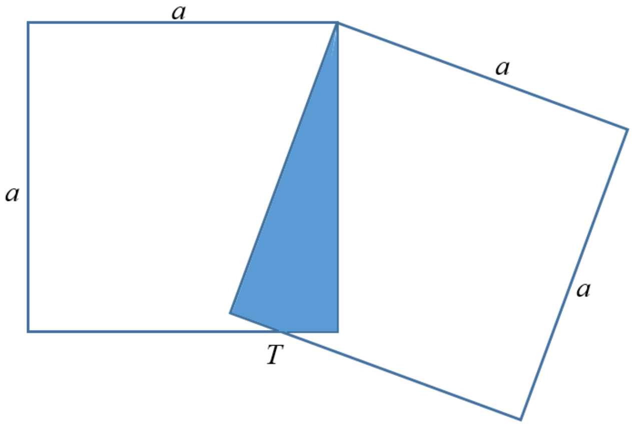
Povucimo visinu na osnovicu i promotrimo pravokutan trokut ATP.



$$\cos\varphi = \frac{|AP|}{|AT|} = \frac{\frac{b}{2}}{x} = \frac{b}{2x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{2\cos\varphi}$$

Točan odgovor je C.

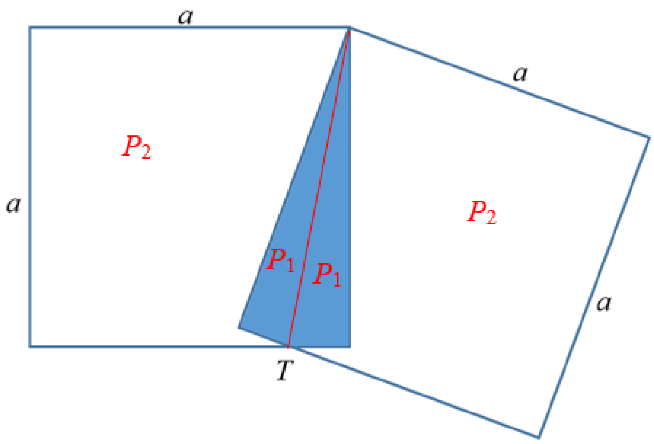
6. Branka je od kartona izrezala dva kvadrata duljine stranice a. Nakon toga kvadrate je preklopila kao na slici. U kojem omjeru točka T dijeli stranicu kvadrata ako je površina dobivenog lika 17 puta veća od površine obojenog četverokuta?



A. 1 : 6	**B.** 1 : 9	**C.** 1 : 8	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Obojeni četverokut podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta. Sukladni su po SSK.

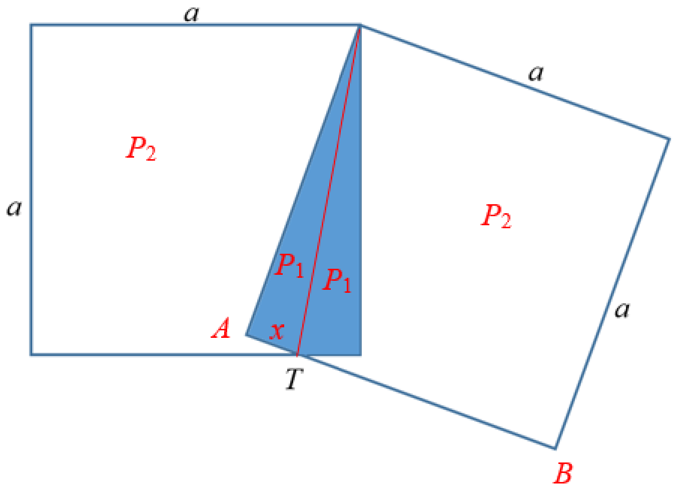


Dijelove površina označimo s P_1 i P_2.

Zapišimo jednakošću da je površina dobivenog lika 17 puta veća od površine obojenog četverokuta.

$$2P_1 + 2P_2 = 17 \cdot 2P_1$$
$$2P_2 = 32P_1$$
$$2\left(a^2 - 2P_1\right) = 32P_1$$
$$2a^2 - 4P_1 = 32P_1$$
$$2a^2 = 36P_1$$
$$a^2 = 18P_1$$

Označimo nepoznatu duljinu $|AT|$ katete pravokutnog trokuta s x.



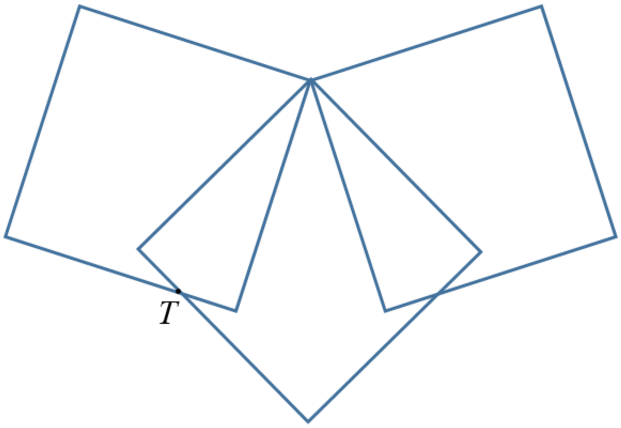
$$a^2 = 18 \cdot \frac{ax}{2}$$
$$a^2 = 9ax$$
$$x = \frac{a}{9}$$

Točka T dijeli stranicu kvadrata $\overline{AB}$ u omjeru:

$$|AT| : |TB| = x : (a - x) = \frac{a}{9} : \frac{8a}{9} = 1 : 8$$

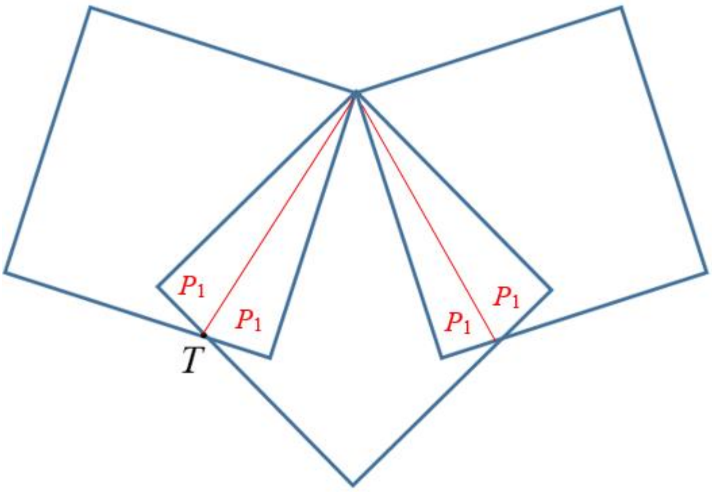
Točan odgovor je C.

7. Branka je od kartona izrezala tri sukladna kvadrata. Nakon toga kvadrate je složila kao na slici tako da su preklopljene površine jednake. U kojem omjeru točka T dijeli stranicu kvadrata ako se površina dobivenog lika i površina jednog kvadrata odnose kao 25 : 9?



A. 1 : 6	**B.** 1 : 9	**C.** 1 : 8	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.



Četverokute koji čine preklopljeni dio površine podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta. Sukladni su po SSK. Površine dobivenih pravokutnih trokuta označimo s P_1.

Dobiveni lik sastoji se od lijevog i desnog kvadrata te strelice u sredini.

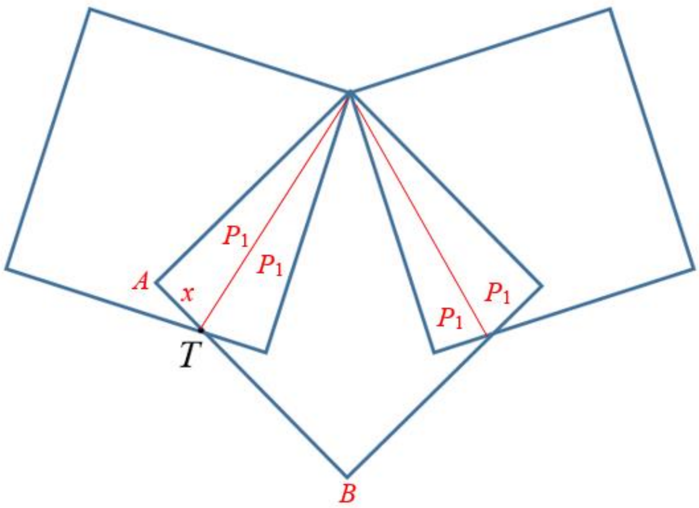
$$a^2+\left(a^2-4P_1\right)+a^2=3a^2-4P_1$$

Zapišimo jednakošću da se površina dobivenog lika i površina jednog kvadrata odnose kao 25 : 9.

$$\left(3a^2-4P_1\right):a^2=25:9$$
$$27a^2-36P_1=25a^2$$
$$a^2=18P_1$$

Označimo nepoznatu duljinu $|AT|$ katete pravokutnog trokuta s x.

$$a^2=18\cdot\frac{ax}{2}\quad\Rightarrow\quad a^2=9ax\quad\Rightarrow\quad x=\frac{a}{9}$$

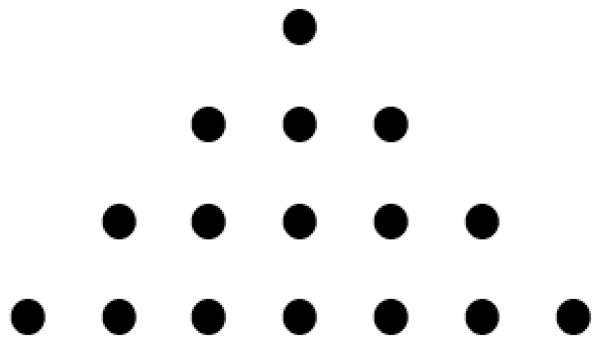


Točka T dijeli stranicu kvadrata $\overline{AB}$ u omjeru:

$$|AT|:|TB|=x:(a-x)=\frac{a}{9}:\frac{8a}{9}=1:8$$

Točan odgovor je C.

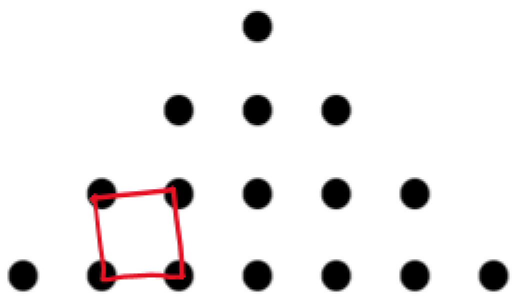
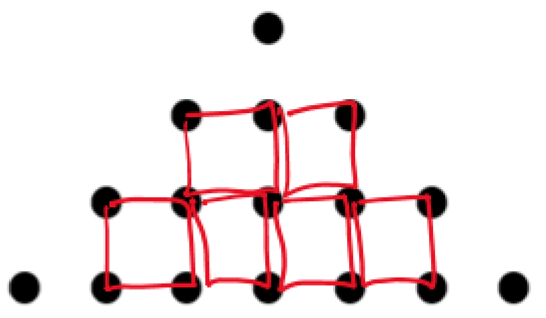
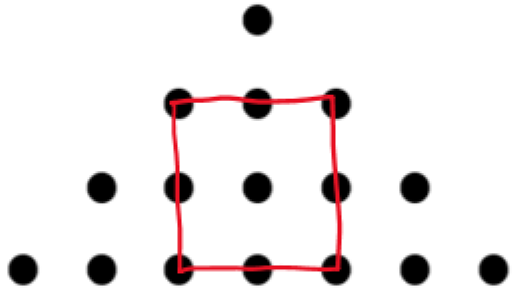
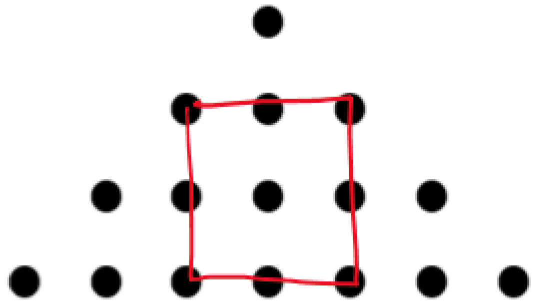
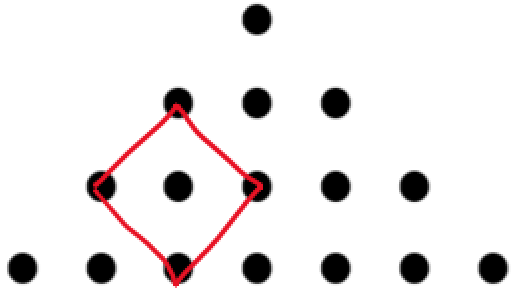
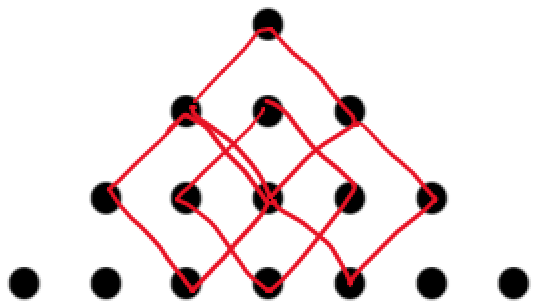
8. Koliko postoji kvadrata i pravokutnika kojima su svi vrhovi u točkicama?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
18	20	16	22	ne želimo odgovoriti na pitanje

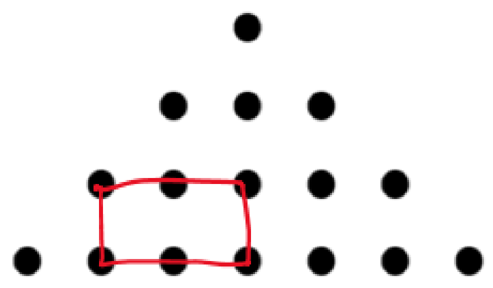
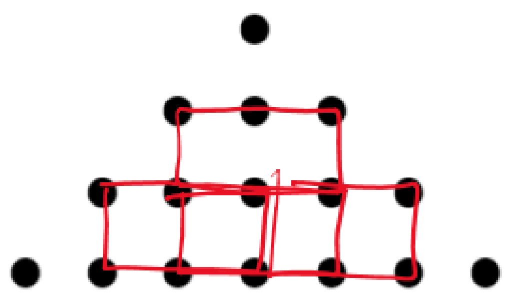
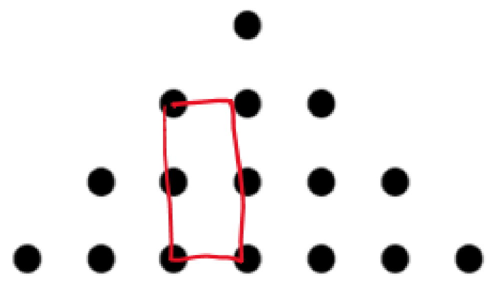
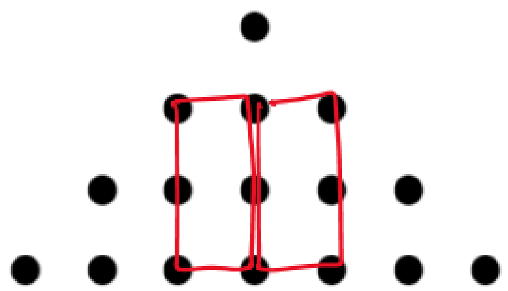
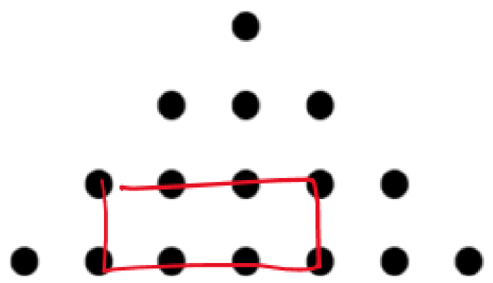
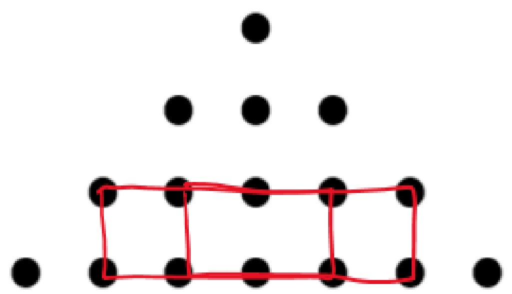
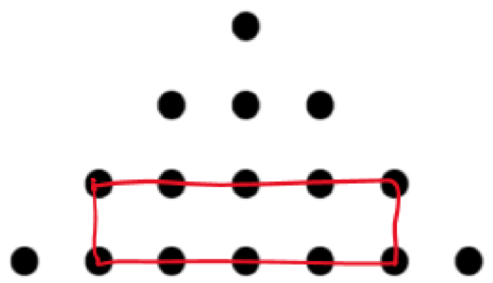
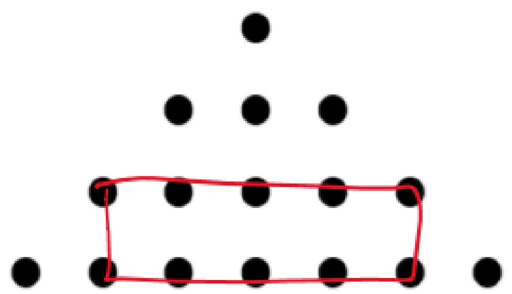
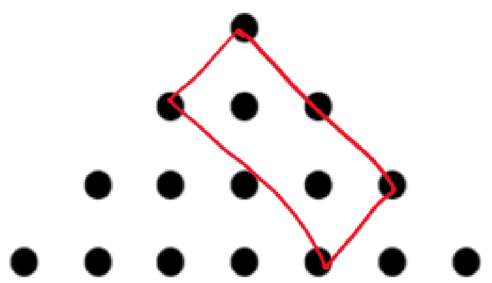
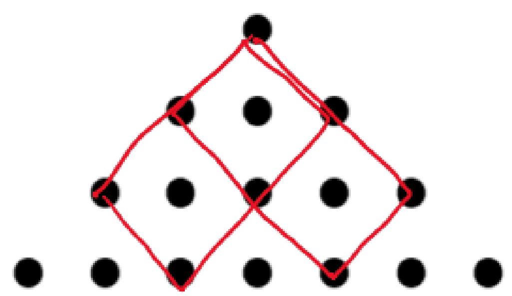
Rješenje.

Prebrojimo prvo kvadrate.

oblik koji brojimo	broj četverokuta toga oblika	
		6
		1
		4

Ukupno je 6 + 1 + 4 = 11 kvadrata.

Prebrojimo sada pravokutnike različitih duljina stranica.

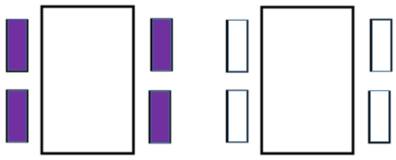
oblik koji brojimo	broj četverokuta toga oblika	
		4
		2
		2
		1
		2

Ukupno je 4+ 2 + 2 + 1 + 2 = 11 pravokutnika koji nisu kvadrati.

Dakle, kvadrata i pravokutnika je 11 + 11 = 22.

Točan odgovor je D.

9. Učiteljica i učenici pripremaju učionicu za rad u skupinama. Uz jedan stol stavili su 4 ljubičaste, a uz drugi 4 bijele stolice. Na koliko različitih načina mogu na ista mjesta staviti stolice tako da uz svaki stol bude isti broj ljubičastih i bijelih stolica sa slike?

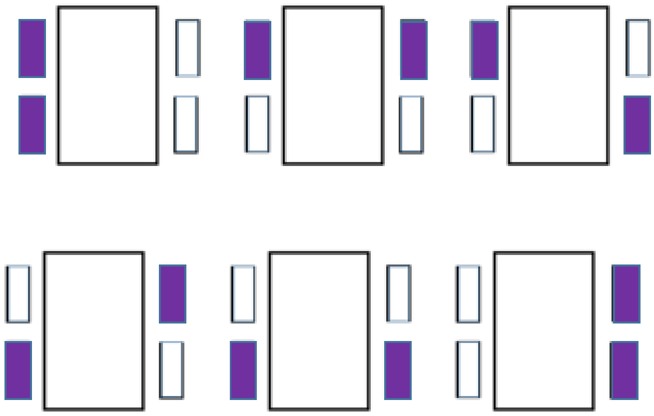


A.	B.	C.	D.	E.
12	18	24	36	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Ako za svakim stolom treba biti isti broj ljubičastih i bijelih stolica sa slike tada za svakim stolom trebaju biti dvije ljubičaste i dvije bijele stolice.

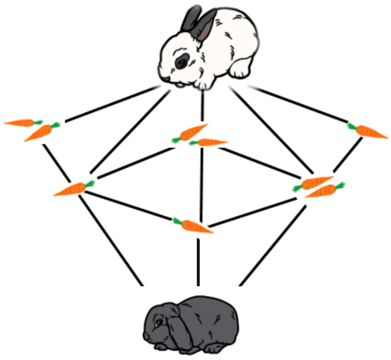
Pogledajmo na koliko načina možemo za jedan stol smjestiti dvije ljubičaste stolice. Na preostala dva mjesta bit će bijele stolice.



Dakle, za jedan stol dvije ljubičaste stolice možemo smjestiti na 6 načina. Budući da i za drugi stol to možemo napraviti na 6 načina, ukupan broj rasporeda je $6 \cdot 6 = 36$.

Točan odgovor je D.

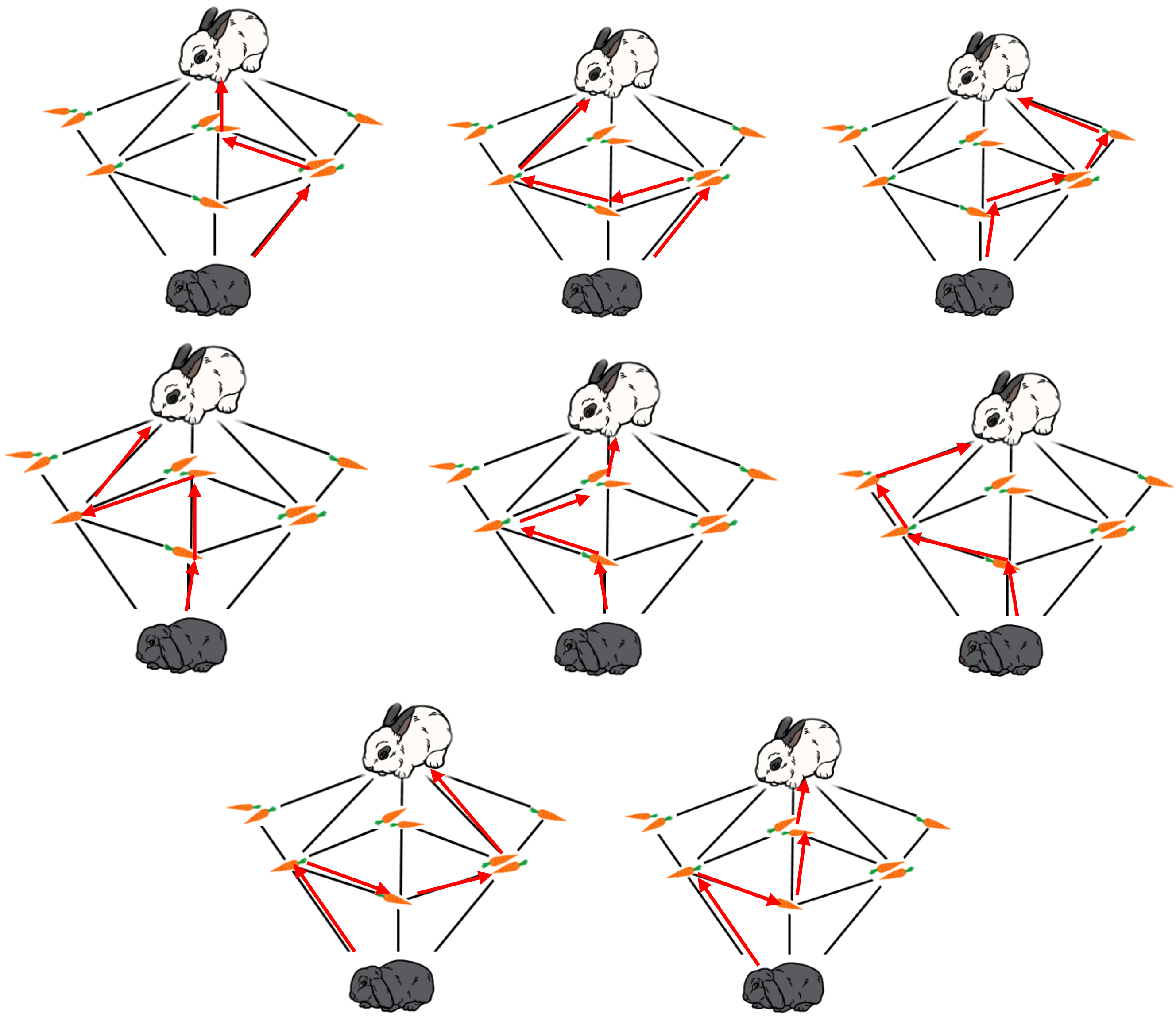
10. Zečica Mili želi se nacrtanim putevima popeti do Lili. Pritom će pojesti sve mrkve na koje naiđe i neće ponavljati dijelove puta. Koliko je načina da Mili dođe do Lili ako će pojesti četiri mrkve?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
8	7	6	5	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Skicirajmo sve putove.



Putova je 8.

Točan odgovor je A.