Naučimo srednja škola

MAT liga

2024./2025

1. kolo 2024./2025.

1. Jana je u školu donijela bombone. Željela ih je podijeliti svojim prijateljima i prijateljicama tako da ona i svatko iz društva dobije jednak broj bombona. Shvatila je da joj za to nedostaje još 5 bombona pa je odlučila 3 bombona spremiti u torbu. Nakon toga što je to napravila, svatko je dobio jednak broj bombona. Koja od navedenih tvrdnji sigurno nije točna?

A. Jana ima 5 prijateljica	**B.** svatko je iz društva dobio 4 bombona	**C.** Jana je bombone dala jednakom broju prijatelja i prijateljica	**D.** Jana je ukupno podijelila manje od 20 bombona	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Da bi svatko iz društva dobio jednak broj bombona, Jana treba imati broj bombona koji je višekratnik broja ljudi u društvu tj. koji se bez ostatka mogu podijeliti s brojem ljudi. Primjerice, ako je u društvu 5 ljudi, svatko će dobiti isti broj bombona ako ih je 5, 10, 15, 20 itd. To znači da broj ljudi treba biti djelitelj broja bombona.

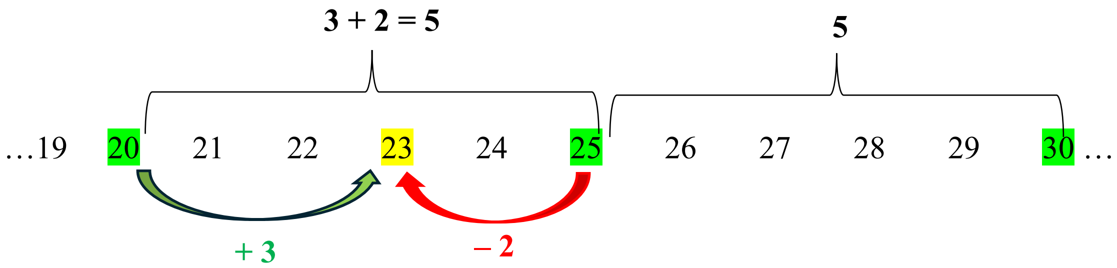
Pogledajmo na jednom primjeru što ako broj bombona nije višekratnik broja ljudi u društvu.

Jana ima 23 bombona i želi ih podijeliti na 5 ljudi

↓

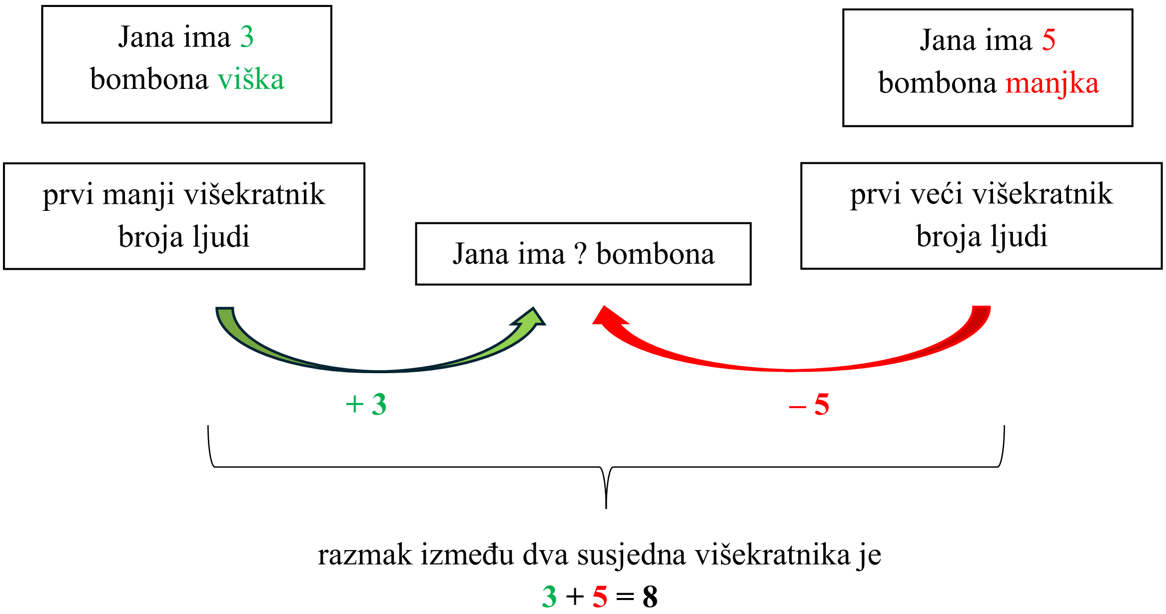
broj 23 nije višekratnik broja 5

prvi manji višekratnik broja 5 je 20	prvi veći višekratnik broja 5 je 25
↓	↓
Jana ima 3 bombona viška	Jana ima 2 bombona manjka
↓	↓
$23 = 5 \cdot 4 + 3$	$23 = 5 \cdot 5 - 2$



Nakon ovog primjera bit će nam jasnije što možemo zaključiti iz teksta zadatka.

Jana je shvatila je da joj za to nedostaje još 5 bombona pa je odlučila 3 bombona spremiti u torbu.



Zaključujemo da je u društvu osmero ljudi, a jedna od njih je Jana.

Provjerimo sada ponuđena rješenja. Budući da želimo provjeriti koja od danih tvrdnji sigurno nije točna, dovoljno je pronaći jedan primjer kada bi tvrdnja bila točna da bismo je odbacili kao rješenje zadatka.

A. Jana ima 5 prijateljica ⟶ moguće je da Jana ima 5 prijateljica i 2 prijatelja

B. svatko je iz društva dobio 4 bombona ⟶ moguće je da je Jana podijelila $4 \cdot 8 = 32$ bombona

C. Jana je bombone dala jednakom broju prijatelja i prijateljica ⟶ Jana ima 7 prijatelja i prijateljica, pa njihov broj ne može biti jednak (7 je neparan)

D. Jana je ukupno podijelila manje od 20 bombona ⟶ moguće je da je Jana podijelila 16 bombona (svakom po 2)

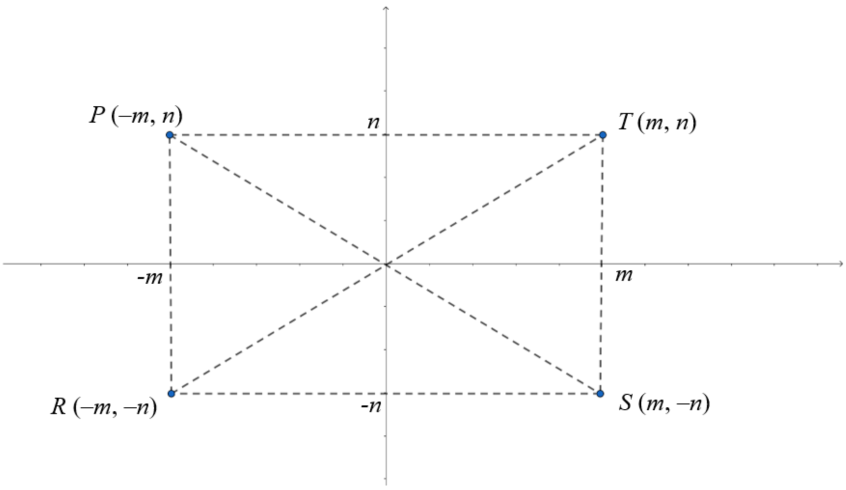
Točan odgovor je C.

2. Apscisa točke A dvokratnik je ordinate točke A_1 koja je točki A simetrična s obzirom na os ordinata. Osim toga, ordinata točke A za 7 je veća od apscise točke A_2 koja je točki A_1 simetrična s obzirom na ishodište. U kojem se kvadrantu nalazi točka A?

A. IV.	**B.** III.	**C.** II.	**D.** I.	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pogledajmo što vrijedi za točke koje su simetrične s obzirom na jednu os ili ishodište koordinatnog sustava.



Zaključimo:

- točke simetrične s obzirom na os apscisa imaju jednake apscise i suprotne ordinate (npr. S i T)
- točke simetrične s obzirom na os ordinata imaju suprotne apscise i jednake ordinate (npr. P i T)
- točke simetrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava imaju suprotne apscise i ordinate (npr. S i P)

Označimo nepoznate koordinate točke s $A\ (x, y)$.

apscisa točke A dvokratnik je ordinate točke A₁ koja je točki A simetrična s obzirom na os ordinata

$A_1\ (-x, y)$

$x = 2y$

ordinata točke A za 7 je veća od apscise točke A₂ koja je točki A₁ simetrična s obzirom na ishodište

$A_2\ (x, -y)$

$y = 7 + x$

$x = 2y$ i $y = 7 + x \quad \Rightarrow \quad y = 7 + 2y \quad \Rightarrow \quad y = -7 \quad \Rightarrow \quad x = -14 \quad \Rightarrow \quad A(-7, -14)$

Točka A nalazi se u III. kvadrantu.

Točan odgovor je B.

3. U jednakokračnom trokutu ABC veličina kuta $\angle ACB$ nasuprot osnovice je 40º. Točka T je na stranici $\overline{AC}$ i vrijedi da je $|AB| = |AT|$. Točka M je na dužini $\overline{BT}$ i vrijedi da je $|TC| = |TM|$. Kolika je veličina kuta $\angle BMC$?

A. 125º	**B.** 155.5º	**C.** 152.5º	**D.** 157.5º	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

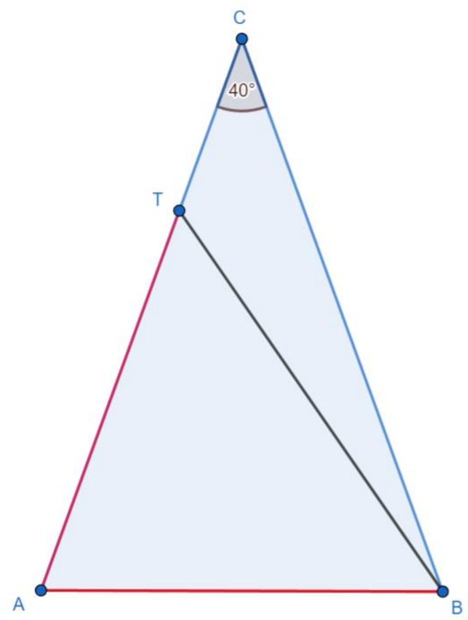
Rješenje.

Nacrtajmo jednakokračan trokut s danim oznakama.

Budući da je kut nasuprot osnovice veličine 40°, kutovi uz osnovicu veličine su $\frac{180°-40°}{2} = 70°$.

$|AB| = |AT| \;\;\Rightarrow$ trokut ABT je jednakokračan.

$|\angle TBA| = |\angle ATB| = \dfrac{180° - 70°}{2} = 55°$



Nacrtajmo sada i točku M.

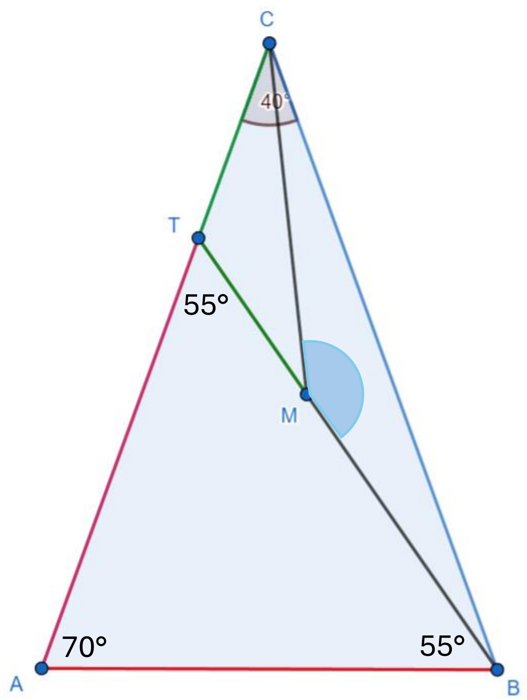
$|TC| = |TM| \Rightarrow$ trokut MCT je jednakokračan.

$|\angle CMT| = |\angle TCM| = \dfrac{55°}{2} = 22.5°$

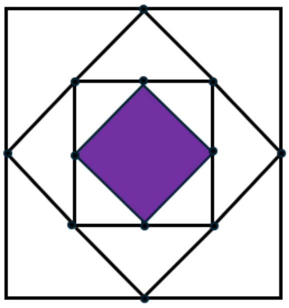
Kut BMC susjedni je kut kuta CMT pa je

$$|\angle BMC| = 180° - |\angle CMT|$$
$$= 180° - 22.5°$$
$$= 157.5°$$

Točan odgovor je D.



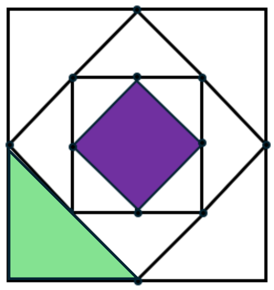
4. Ivana je nacrtala kvadrat. Svaku stranicu kvadrata podijelila je na dva jednaka dijela i spojila susjedne točke kao na slici. Dobila je novi kvadrat kojem je opet stranice podijelila na dva jednaka dijela i spojila susjedne točke. Isto je napravila još jednom i četvrti kvadrat koji je tako dobila obojila je ljubičastom bojom kao na slici. Kako se odnose opsezi prvog i četvrtog nacrtanog kvadrata?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$4 : \sqrt{2}$	$4 : 2\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}+1) : 2$	$4\sqrt{2} : 1$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Duljinu stranice najvećeg kvadrata označimo sa a. Njegov je opseg $4a$.



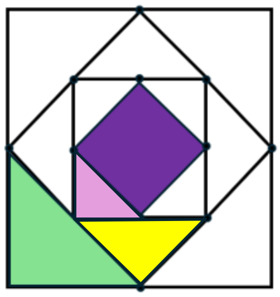
Izračunajmo duljinu stranice drugog kvadrata.
Stranica drugog kvadrata hipotenuza je jednakokračnog trokuta duljine stranice $\frac{a}{2}$.

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Izračunajmo duljinu stranice trećeg kvadrata.
Stranica trećeg kvadrata hipotenuza je jednakokračnog trokuta duljine stranice $\frac{a_2}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \quad a_3 = \frac{a}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{a}{2}$$

Izračunajmo duljinu stranice četvrtog kvadrata.
Stranica četvrtog kvadrata hipotenuza je jednakokračnog trokuta duljine stranice $\frac{a_3}{2} = \frac{a}{4}$.



$$\Rightarrow \quad a_4 = \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Opseg četvrtog kvadrata je $o_4 = 4a_4 = 4\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4} = a\sqrt{2}$.

Opsezi prvog i četvrtog nacrtanog kvadrata odnose se kao:

$$o_1 : o_4 = (4a) : (a\sqrt{2}) = 4 : \sqrt{2}$$

Točan odgovor je A.

5. Za koliko cijelih brojeva vrijedi da im je kvadrat manji od $1234^2 - 2468$?

A. 1234	**B.** 2465	**C.** 1233	**D.** 2467	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Označimo cijeli broj sa n.

$$n^2 < 1234^2 - 2468$$

Budući da je broj 2468 dvostruko veći od broja 1234, nadopunit ćemo dani brojevni izraz do potpunog kvadrata.

$$\begin{aligned} 1234^2 - 2468 &= 1234^2 - 2 \cdot 1234 \cdot 1 + 1^2 - 1 \\ &= (1234 - 1)^2 - 1 \\ &= 1233^2 - 1 \end{aligned}$$

$n^2 < 1233^2 - 1$

$n^2 \leq 1232^2$

$|n| \leq 1232$

$-1232 \leq n \leq 1232$

Prirodnih brojeva koji zadovoljavaju dobiveni sustav nejednakosti je 1232, a cijelih:

$$1232 \cdot 2 + 1 = 2464 + 1 = 2465.$$

Točan odgovor je B.

6. Veličine kutova trokuta *ABC* odnose se kao 1 : 2 : 3. Kako se odnose duljine polumjera opisane i upisane kružnice tom trokutu?

A. $(\sqrt{3}+1):1$	**B.** 2 : 1	**C.** $2:(\sqrt{3}+1)$	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Iz danog omjera izračunajmo kutove trokuta.

$$\alpha : \beta : \gamma = 1:2:3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = k, \beta = 2k, \gamma = 3k$$

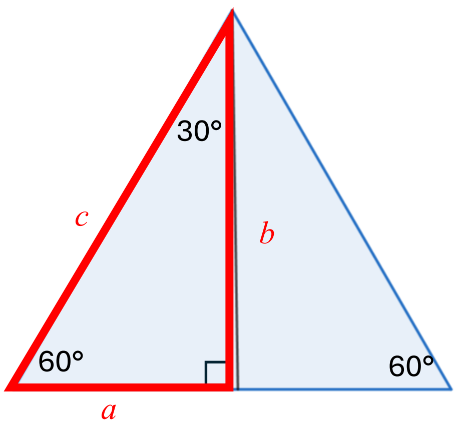
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad k + 2k + 3k = 180° \Rightarrow \quad k = 30°$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°$$

Dakle, trokut je pravokutan pa su duljine opisane i upisane kružnice:

$$r_u = \frac{a+b-c}{2}, \qquad r_o = \frac{c}{2}$$

Međutim, trokut s kutovima 30°- 60°- 90° pola je jednakostraničnog trokuta pa sve duljine stranica možemo izraziti preko jedne. Izrazimo *a* i *b* preko *c*.



$$a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$r_u = \frac{a+b-c}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2}-c\right) = \frac{c}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\cdot c$$

Izračunajmo sada i omjer polumjera.

$$r_o : r_u = \frac{c}{2} : \frac{(\sqrt{3}-1)c}{4} = 1 : \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

Racionalizirajmo dobiveni izraz.

$$r_o : r_u = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1}$$

Točan odgovor je A.