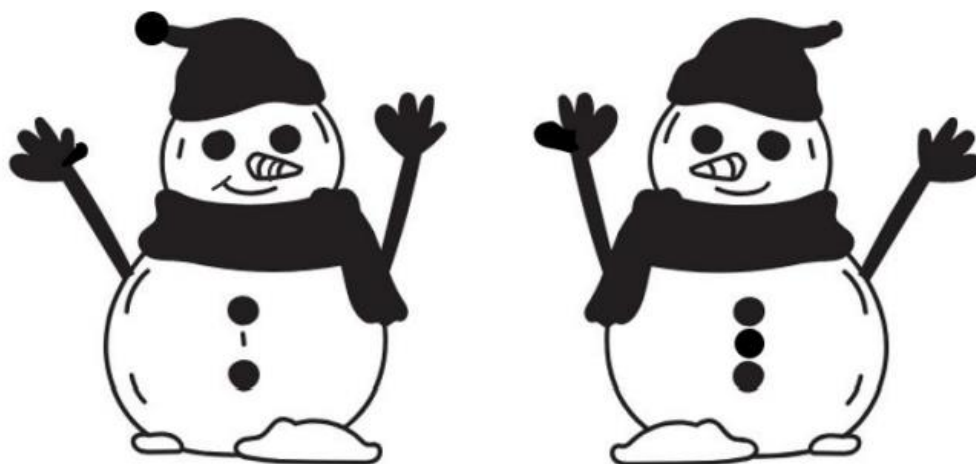


Naučimo srednja škola



2. kolo 2024./2025.

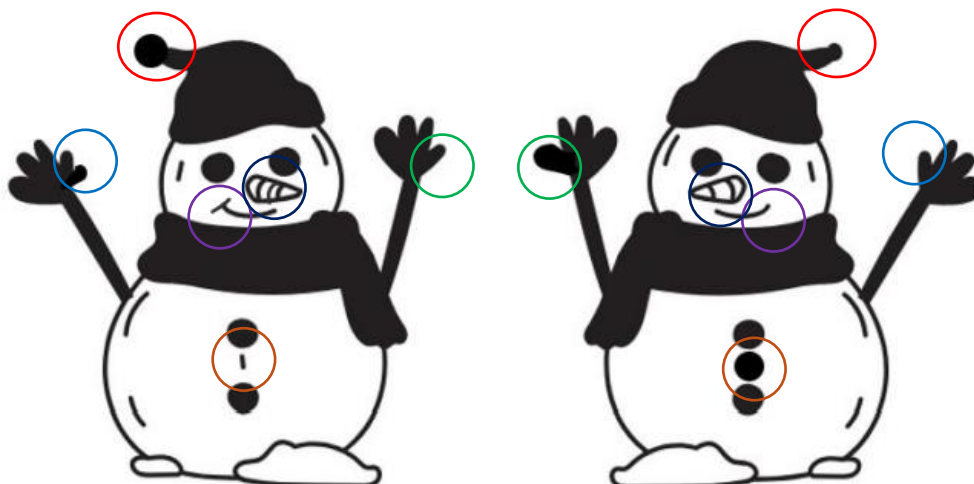
1. Ivona je nacrtala dva snjegovića. Osim što im je zamijenila lijeve i desne strane, koliko je još razlika napravila?



A.	B.	C.	D.	E.
3	6	5	4	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

- nos, usta, prsti na jednoj ruci, prsti na drugoj ruci, dugme, kapa



Točan odgovor je B.

2. Ivan je dobio zadatak da uredno složi razbacane stvari u 10 ladica svog ormara. Odlučio je svaki dan složiti najmanje dvije, a najviše četiri ladice. Danas je utorak i Ivan će započeti sa slaganjem. Budući da u subotu ide baki, treba završiti slaganje najkasnije u petak. Na koliko načina Ivan može rasporediti slaganje po danima vodeći računa o svemu navedenom?

A. 16	B. 10	C. 14	D. 12	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	---

Rješenje.

Ivan slaganje započinje u utorak, a treba ga završiti najkasnije u petak. Pogledajmo koliko dana ima na raspolaganju.

utorak	srijeda	četvrtak	petak
1	2	3	4

U najviše 4 dana Ivan treba složiti 10 ladica. Pritom trebamo paziti na to da će svaki dan složiti najmanje 2 i najviše 4 ladice.

Dakle, broj 10 trebamo prikazati kao zbroj najviše 4 pribrojnika (jer imamo najviše 4 dana) pri čemu su ti pribrojnici 2, 3 ili 4. Ispišimo redom sve mogućnosti za to.

$$10 = 4 + 4 + 2$$

$$10 = 4 + 3 + 3$$

$$10 = 4 + 2 + 2 + 2$$

$$10 = 3 + 3 + 2 + 2$$

Broj 10 možemo na 4 načina prikazati kao traženi zbroj.

Pogledajmo sada za svaki zbroj njegov moguć raspored po danima.

raspored po danima U S Č P	broj rasporeda	ukupno rasporeda
$10 = 4 + 4 + 2$ $10 = 4 + 2 + 4$ $10 = 2 + 4 + 4$	3	$3 + 3 + 4 + 6 = 16$
$10 = 4 + 3 + 3$ $10 = 3 + 4 + 3$ $10 = 3 + 3 + 4$	3	
$10 = 4 + 2 + 2 + 2$ $10 = 2 + 4 + 2 + 2$ $10 = 2 + 2 + 4 + 2$ $10 = 2 + 2 + 2 + 4$	4	
$10 = 3 + 3 + 2 + 2$ $10 = 3 + 2 + 3 + 2$ $10 = 3 + 2 + 2 + 3$ $10 = 2 + 3 + 3 + 2$ $10 = 2 + 3 + 2 + 3$ $10 = 2 + 2 + 3 + 3$	6	

Točan odgovor je A.

3. Neka su a , b i c znamenke za koje vrijedi da je $a > b > c > 0$. Kada napišemo i zbrojimo sve troznamenaste brojeve koji imaju te tri znamenke, dobit ćemo zbroj 2 220. Koliko postoji takvih trojki (a, b, c) ?

A.	B.	C.	D.	E.
4	3	5	2	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Troznamenastih brojeva s različitim znamenkama a , b i c je 6.

Zapišimo dani zbroj.

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 2220$$

Rastavimo sve brojeve po mjesnim vrijednostima.

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 2220$$

Pojednostavnimo lijevu stranu jednakosti.

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 2220$$

$$222a + 222b + 222c = 2220$$

$$a + b + c = 10$$

Dobili smo da je zbroj triju znamenaka jednak 10.

Ne smijemo zaboraviti da su a , b i c različite znamenke (jer je $a > b > c > 0$).

Napišimo sve mogućnosti za to.

$$10 = 7 + 2 + 1$$

$$10 = 6 + 3 + 1$$

$$10 = 5 + 4 + 1$$

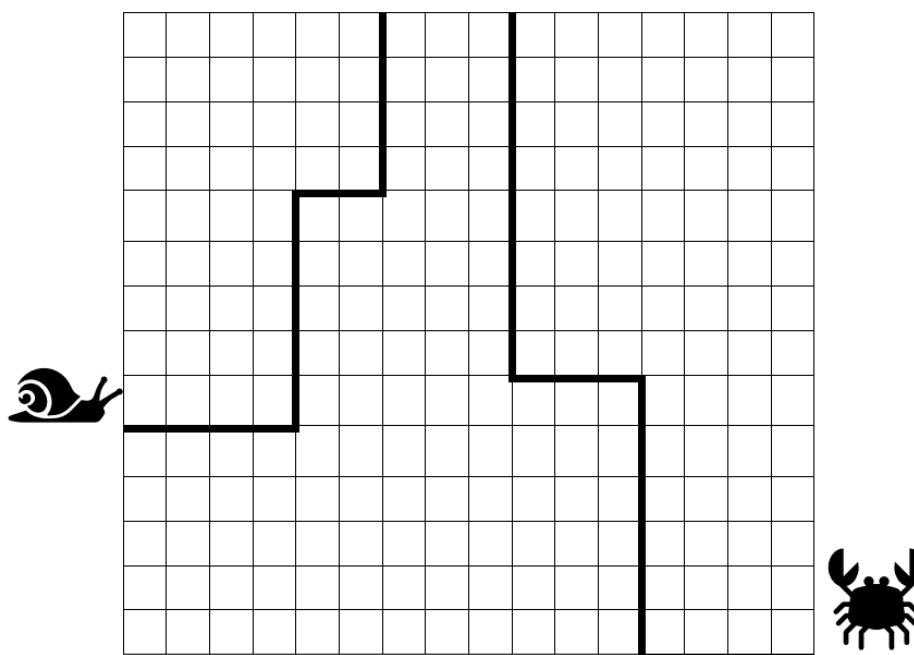
$$10 = 5 + 3 + 2$$

Postoje 4 trojke brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju uvjete zadatka.

$$(7, 2, 1), (6, 3, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 2)$$

Točan odgovor je A.

4. Rak i puž žele što prije proći nacrtanim putovima. Rak hoda tako da, nakon što napravi tri koraka prema naprijed, napravi jedan unazad i pritom, s ta četiri koraka, prijeđe dvije stranice kvadratića. Za to vrijeme puž prijeđe 1.5 stranicu kvadratića. Tko će prije stati na kraj puta?



A. istovremeno	B. rak	C. puž	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
----------------	--------	--------	-------------------------	------------------------------------

Rješenje.

Prebrojimo duljine puta (u stranicama kvadratića) puža i raka.

$$\text{Puž} \rightarrow 4 + 5 + 2 + 4 = 15$$

$$\text{Rak} \rightarrow 4 + 6 + 3 + 8 = 21$$

Zapišimo pregledno što nam je zadano.

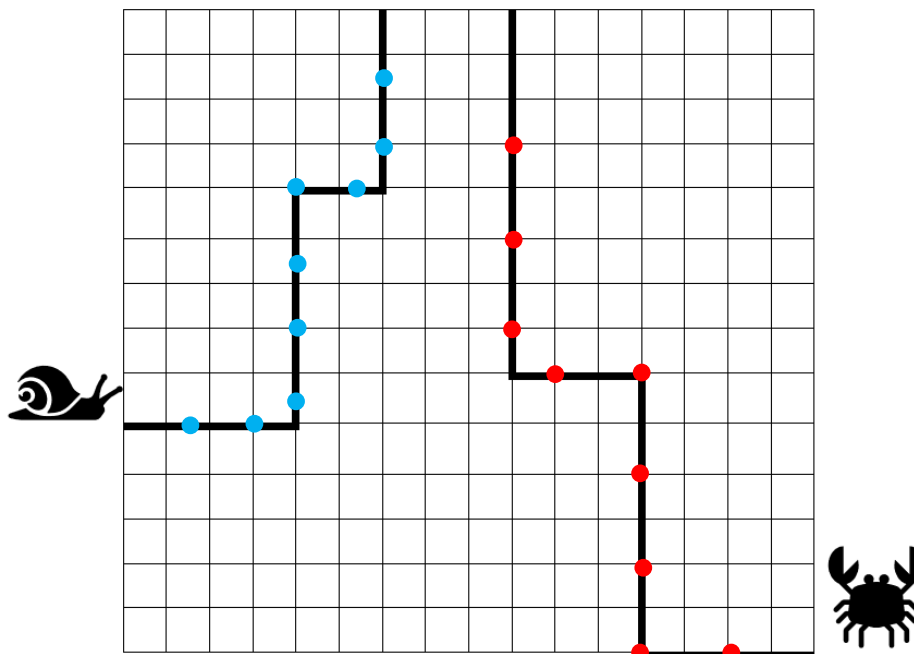
rak		puž
3 naprijed + 1 nazad = 4 koraka	2 stranice kvadratića	1.5 stranica kvadratića

Broj koraka koje rak napravi dvostruko je veći od broja stranica kvadratića. To znači da rak, da bi prošao 20 kvadratića, treba napraviti $20 \cdot 2 = 40$ koraka.

Jer je 20 desetorostruko veće od 2, pritom će i puž prijeći 10 puta dulji put, tj. $10 \cdot 1.5 = 15$ stranica kvadratića.

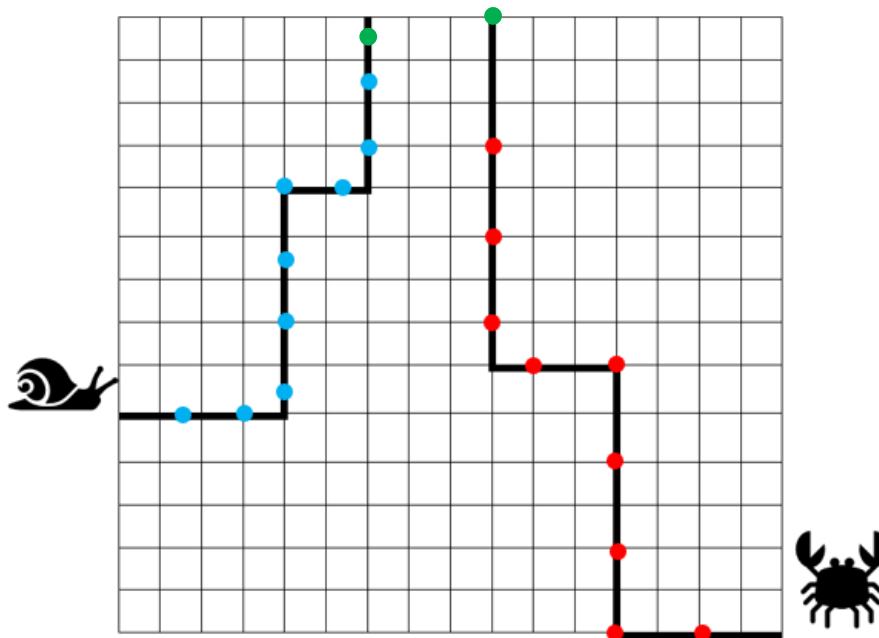
Budući da je duljina puta puža 15 stranica, a raka 21 stranica, mogli bismo brzopleto zaključiti da će, nakon što je rak napravio 40 koraka, puž biti na cilju, a rak još ne.

Ali, pogledajmo gdje su puž i rak bili nakon 9 prijeđenih „tura“ tj. nakon 36 rakova koraka.



Pužu nedostaje još 1.5 kvadratić, a raku 3.

Pogledajmo gdje će biti u trenutku kad rak napravi još 3 koraka.



Rak će stati na kraj puta, a pužu će nedostajati još malo (jer 1.5 kvadrat prijeđe za vrijeme koje treba raku za 4 koraka).

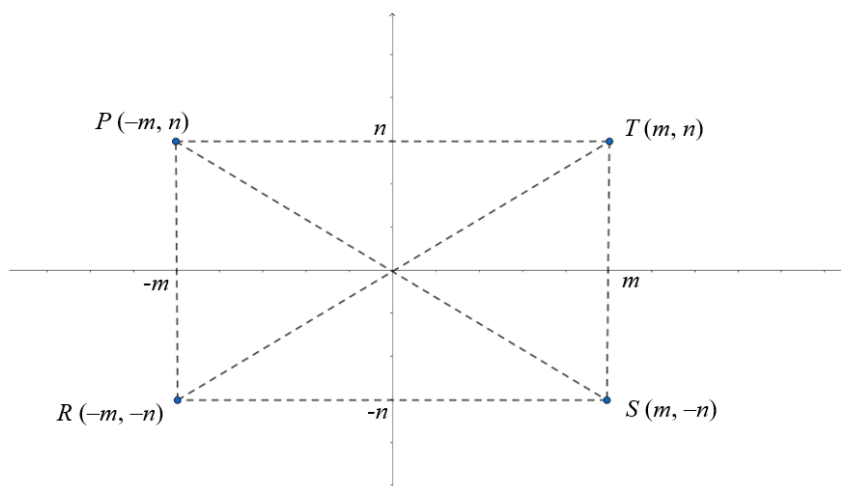
Točan odgovor na pitanje je B.

5. Apscisa točke A trokratnik je ordinate točke A_1 koja je točki A simetrična s obzirom na ishodište. Osim toga, ordinata točke A za 3 je manja od apscise točke A_2 koja je točki A_1 simetrična s obzirom os ordinata. U kojem se kvadrantu nalazi točka A ?

A.	B.	C.	D.	E.
IV.	III.	II.	I.	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pogledajmo što vrijedi za točke koje su simetrične s obzirom na jednu os ili ishodište koordinatnog sustava.



Zaključimo:

- točke simetrične s obzirom na os apscisa imaju jednake apscise i suprotne ordinate (npr. S i T)
- točke simetrične s obzirom na os ordinata imaju suprotne apscise i jednake ordinate (npr. P i T)
- točke simetrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava imaju suprotne apscise i ordinate (npr. S i P)

Označimo nepoznate koordinate točke s $A(x, y)$.

Apscisa točke A trokratnik je ordinate točke A_1 koja je točki A simetrična s obzirom na ishodište

$$\underbrace{\underbrace{}_{A_1(-x, -y)}}_{x = -3y}$$

ordinata točke A za 3 je manja od apscise točke A_2 koja je točki A_1 simetrična s obzirom os ordinata

$$\underbrace{\underbrace{}_{A_2(x, -y)}}_{y = x - 3}$$

$$x = -3y \text{ i } y = x - 3 \Rightarrow y = -3y - 3 \Rightarrow 4y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \Rightarrow A\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

Točka A nalazi se u IV. kvadrantu.

Točan odgovor je A.

6. Jure je pred sebe stavio dvije boce jednakog oblika. U plavoj je boci bio sok, a u zelenoj voda. Obje su bile napunjene do polovice svoje visine. Jure je iz zelene boce jednu trećinu vode prelio u plavu bocu. Nakon toga je iz plave boce jednu trećinu tekućine prelio u zelenu bocu. U kojem su omjeru voda i sok u zelenoj boci nakon obaju prelijevanja?



A.	B.	C.	D.	E.
7 : 3	5 : 2	2 : 1	4 : 1	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Iako je količina tekućine u obje boce jednaka (soka je jednako kao i vode), da bismo jednostavnije mogli pratiti što se događa prilikom prelijevanja, početnu količinu soka označimo sa S , a vode sa V .

	plava boca			zeleno boca		
	sok	voda	ukupna količina tekućine	sok	voda	ukupna količina tekućine
početak	S	0	S	0	V	V
iz zelene boce jednu trećinu vode prelio u plavu bocu	S	$0 + \frac{1}{3}V$	$S + \frac{1}{3}V$	0	$V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$	$0 + \frac{2}{3}V$
iz plave boce jednu trećinu tekućine prelio u zelenu bocu	$S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$	$\frac{1}{3}V - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{1}{3}V - \frac{1}{9}V = \frac{2}{9}V$	$\frac{2}{3}S + \frac{2}{9}V$	$0 + \frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}V + \frac{1}{9}V = \frac{7}{9}V$	$\frac{1}{3}S + \frac{7}{9}V$

Nakon dva prelijevanja u zelenoj boci nalazila se $\frac{1}{3}S$ i $\frac{7}{9}V$, tj. $\frac{3}{9}S$ i $\frac{7}{9}V$.

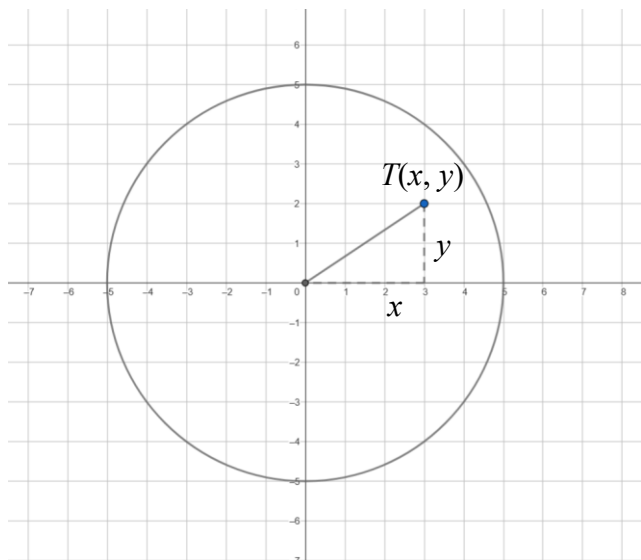
Dakle, omjer vode i soke u zelenoj boci nakon obaju prelijevanja je $\frac{7}{9} : \frac{3}{9} = 7 : 3$.

Točan odgovor je A.

7. Nikola je u koordinatnom sustavu nacrtao kružnicu sa središtem u ishodištu duljine polumjera 5. Koliko se točaka (x, y) s cjelobrojnim koordinatama nalazi unutar te kružnice?

A.	73	B.	69	C.	77	D.	68	E.	ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	---------------------------------

Rješenje.



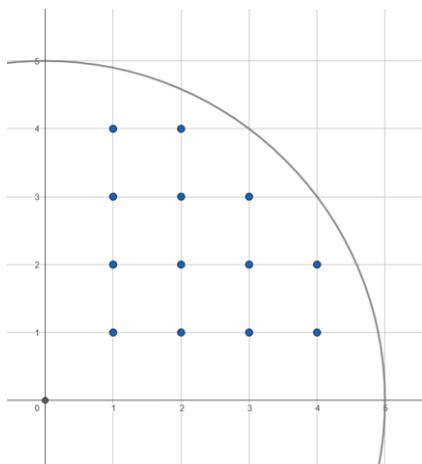
Da bi se točka (x, y) nalazila unutar kružnice, njena udaljenost od ishodišta treba biti manja od duljine polumjera kružnice.

Primjenom Pitagorinog teorema slijedi:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 5$$

$$x^2 + y^2 < 25$$

Prebrojimo točke s cjelobrojnim koordinatama unutar prvog kvadranta koje zadovoljavaju dano svojstvo



$$1^2 + 4^2 = 17 < 25$$

$(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ i $(1, 4)$

$$1^2 + 5^2 = 26 > 25$$

$$2^2 + 4^2 = 20 < 25$$

$(2, 1), (2, 2), (2, 3)$ i $(2, 4)$

$$2^2 + 5^2 = 29 > 25$$

$$3^2 + 3^2 = 18 < 25$$

$(3, 1), (3, 2)$ i $(3, 3)$

$$3^2 + 4^2 = 25 = 25$$

$$4^2 + 2^2 = 20 < 25$$

$(4, 1)$ i $(4, 2)$

$$4^2 + 3^2 = 25 = 25$$

- u prvom kvadrantu $4 + 4 + 3 + 2 = 13$ točaka zadovoljava dano svojstvo
- unutar sva 4 kvadranta je $4 \cdot 13 = 52$ točaka
- na koordinanim osima je $4 \cdot 4 + 1 = 17$ točaka
- ukupno je $52 + 17 = 69$ točaka.

Točan odgovor je B.

8. Nađite najmanji prirodan broj koji ima točno 40 djelitelja. Koliki mu je zbroj znamenaka?

A. 7	B. 15	C. 9	D. 6	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
---------	----------	---------	---------	------------------------------------

Rješenje.

Svaki prirodni broj n ima jedinstven rastav na proste faktore:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

pri čemu su $p_1, p_2 \dots p_k$ prosti brojevi.

Tada je broj djelitelja broja n jednak:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Npr. za $n = 100 \Rightarrow n = 2^2 \cdot 5^2$, pa je broj djelitelja broja 100 jednak $(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9$.

Budući da je nama zadan broj djelitelja 40, rastavimo ga na proste faktore.

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Zaključujemo da je:

$$\underbrace{(\alpha_1 + 1)}_2 \underbrace{(\alpha_2 + 1)}_2 \underbrace{(\alpha_3 + 1)}_2 \underbrace{(\alpha_4 + 1)}_5$$

Dakle, eksponenti prostih brojeva u rastavu broja n jednaki su 1, 1, 1 i 4.

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 4$$

Najmanji broj n ćemo dobiti ako uzmemo 4 najmanja prosta faktora (2, 3, 5 i 7). Tada je n jednak:

$$n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$n = 1\,680$$

Pogledajmo što bismo dobili da smo n rastavili kao umnožak 3 broja.

$$40 = 2 \cdot 4 \cdot 5$$

U tom bi slučaju eksponenti prostih brojeva u rastavu broja n bili jednaki 1, 3 i 4.

Najmanji broj n ćemo dobiti ako uzmemo 3 najmanja prosta faktora, pa je n jednak:

$$n = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2\,168$$

Dobiveni broj veći je od 1 680, pa zaključujemo da je 1 680 najmanji traženi broj.

Zbroj znamenaka broja 1 680 je $1 + 6 + 8 + 0 = 15$.

Točan odgovor je B.

9. Ako je z_1 ono rješenje jednadžbe $z^5 = 32$ koje se nalazi u prvom kvadrantu, koliko je z_1 udaljen od njemu suprotnog i konjugiranog broja $-\bar{z}_1$?

A. $4 \cos 72^\circ$	B. $4 \sin 72^\circ$	C. 4	D. ništa od navedenoga	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
--------------------------------	--------------------------------	----------------	----------------------------------	---

Rješenje.

Ako je $z = x + yi$, tada mu je konjugirano kompleksan $\bar{z} = x - yi$, a njemu suprotan:

$$-\bar{z} = -(x - yi) = -x + yi.$$

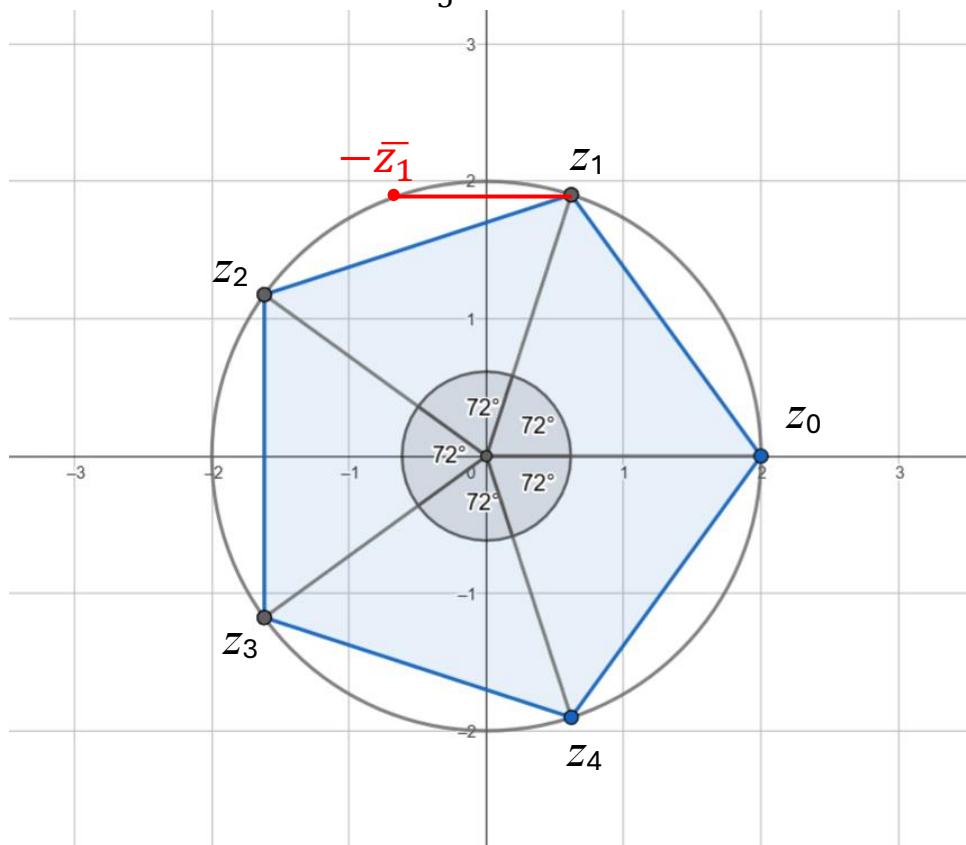
Dakle, broj koji je suprotan i konjugiran broju z bit će u koordinatnom sustavu simetričan broju z s obzirom na os y (razlikovat će se u predznaku realnog dijela).

Jedno rješenje jednadžbe $z^5 = 32$ je očito broj $z_0 = 2$.

$$z_0 = 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

Preostala 4 rješenja ekvidistantno su raspoređena na centralnoj kružnici duljine polumjera 2 pa je kut između svaka dva susjedna jednak:

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$



$$z_1 = 2(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$$

Koordinate točke pridružene broju z_1 su $(2 \cos 72^\circ, 2 \sin 72^\circ)$.

Koordinate suprotnog i konjugiranog broja $-\bar{z}_1$ su $(-2 \cos 72^\circ, 2 \sin 72^\circ)$

Njihovu udaljenost istaknuli smo crvenom bojom na slici i jednaka je dvostrukoj duljini apscise točaka:

$$d = 2 \cdot 2 \cos 72^\circ = 4 \cos 72^\circ$$

Točan odgovor je B.

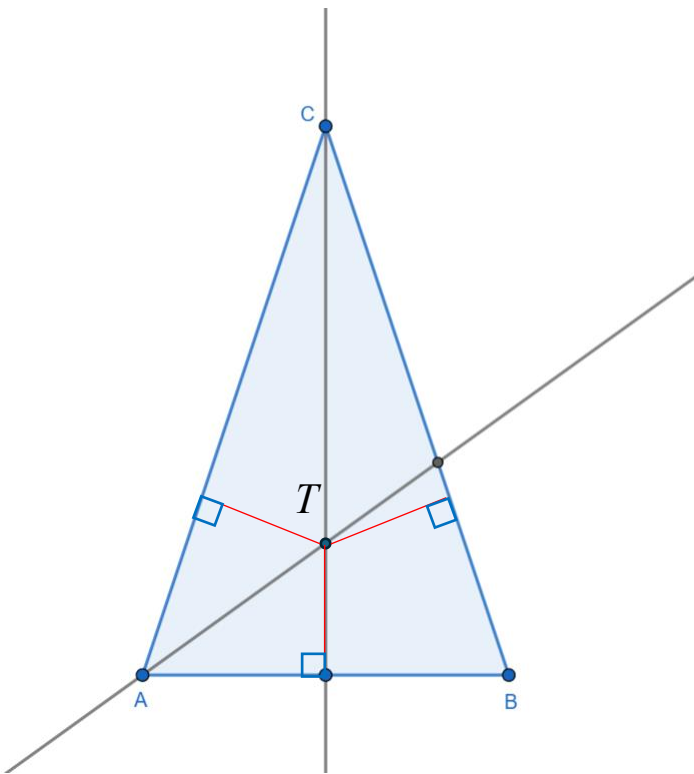
10. Točka T presjek je simetrale kuta $\angle BAC$ i simetrale osnovice \overline{AB} jednakokračnog trokuta ABC . Koliko navedenih tvrdnji je sigurno točno?

- točka T jednako je udaljena od točaka A i C
- točka T jednako je udaljena od pravca AB i pravca BC
- sjecište simetrale kuta $\angle BAC$ i stranice \overline{BC} polovište je te stranice
- sjecište osnovice \overline{AB} i njene simetrale polovište je te stranice
- simetrala stranice \overline{BC} sadrži točku T

A.	B.	C.	D.	E.
5	4	3	2	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Nacrtajmo jednakokračan trokut ABC s osnovicom \overline{AB} te točku T koja je presjek simetrale kuta $\angle BAC$ i simetrale osnovice.



Svojstva koja ima točka T :

- T je na simetrali stranice \overline{AB}
→ jednako je udaljena od točaka A i B
- T je na simetrali kuta $\angle BAC$
→ jednako je udaljena od krakova tog kuta (osnovice \overline{AB} i kraka \overline{AC})

Prijetimo da, budući da je trokut jednakokračan, simetrala osnovice ujedno je i simetrala nasuprotnog kuta.

- T je na simetrali kuta $\angle ACB$
→ jednako je udaljena od krakova tog kuta (kraka \overline{BC} i kraka \overline{AC})

Dakle, točka T središte je trokutu upisane kružnice (jednako je udaljena od sve tri stranice trokuta).

Provjerimo sada dane tvrdnje:

- točka T jednako je udaljena od točaka A i C
NE → očito je i s naše skice (to bi bilo točno da je trokut jednakostraničan)
- točka T jednako je udaljena od pravca AB i pravca BC
DA → dokazali smo
- sjecište simetrale kuta $\angle BAC$ i stranice \overline{BC} polovište je te stranice
NE → očito je i s naše skice (to bi bilo točno da je trokut jednakostraničan)
- sjecište osnovice \overline{AB} i njene simetrale polovište je te stranice
DA → po definiciji simetrale stranice
- simetrala stranice \overline{BC} sadrži točku T
NE → očito je i s naše skice (to bi bilo točno da je trokut jednakostraničan)

Točan odgovor je D.

11. Ako je R duljina polumjera jednakokračnom pravokutnom trokutu opisane kružnice, r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice i v duljina visine na hipotenuzu, koliko je $\frac{R+r}{v}$?

A.	B.	C.	D.	E.
1	$\sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

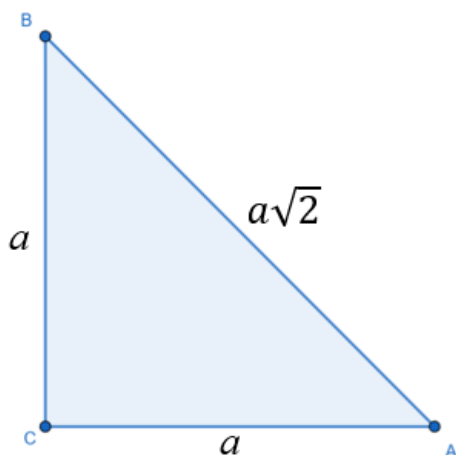
Želimo izraziti:

- R duljinu polumjera opisane kružnice
- r duljinu polumjera upisane kružnice
- v duljinu visine na hipotenuzu

Za svaki pravokutan trokut (u standardnim oznakama) vrijedi:

- $R = \frac{c}{2}$ (jer je središte opisane kružnice polovište hipotenuze)
- $r = \frac{a+b-c}{2}$ (jer je $c = (a - r) + (b - r)$ što slijedi iz sukladnosti trokuta)
- $v = \frac{ab}{c}$ (jer je $P_{\Delta} = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2}$)

Skicirajmo jednakokračan pravokutan trokut i izrazimo duljine stranica.



$$R = \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+a-a\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

$$v = \frac{ab}{c} = \frac{a \cdot a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Izračunajmo vrijednost traženog izraza.

$$\frac{R+r}{v} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{2-\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Točan odgovor je B.

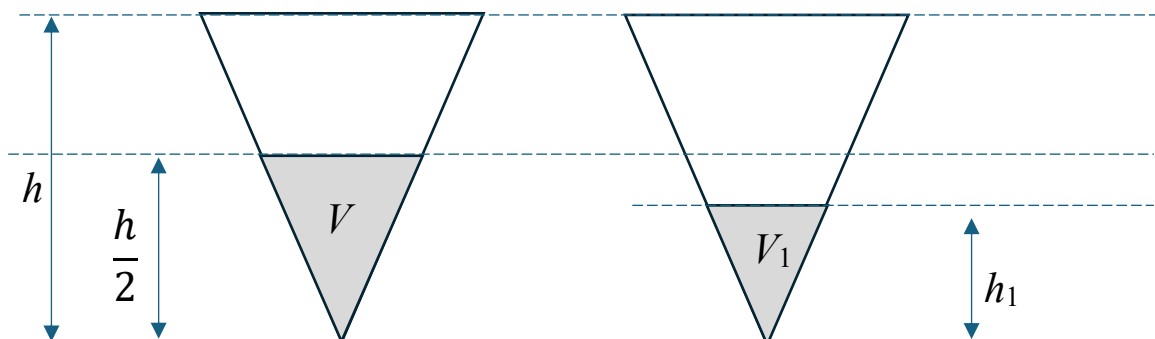
12. Na dočeku Nove godine Nena je uzela čašu u obliku stošca visine h napunjenu tekućinom do polovice svoje visine. Kolika je bila visina tekućine u čaši nakon što je Nena otpila polovicu?



A. $\frac{h}{2\sqrt[3]{2}}$	B. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$	C. $\frac{h}{4}$	D. $\frac{h\sqrt[3]{2}}{2}$	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------------------	--------------------------	------------------	-----------------------------	------------------------------------

Rješenje.

Skicirajmo presjek čase s tekućinom prije i nakon ispijanja te uvedimo oznake kao na slici.



Obujmovi se odnose kao kubovi visina:

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^3$$

Budući da je Nena otpila polovicu tekućine, vrijedi da je $V_1 = \frac{V}{2}$ pa je $\frac{V}{V_1} = 2$.

$$\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{h_1} = \sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow \quad h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} = \frac{h}{2\sqrt[3]{2}}$$

Točan odgovor je A.