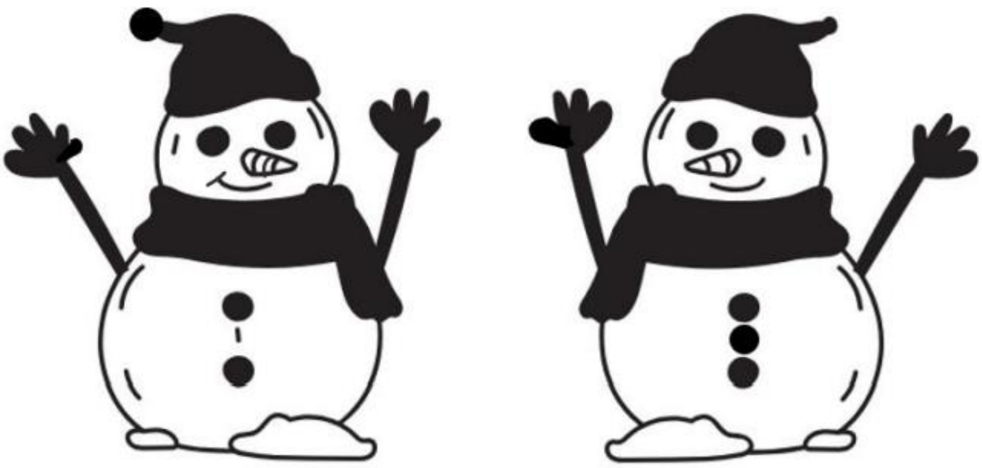
Naučimo predmetna nastava

MAT liga 2024./2025.

2. kolo 2024./2025.

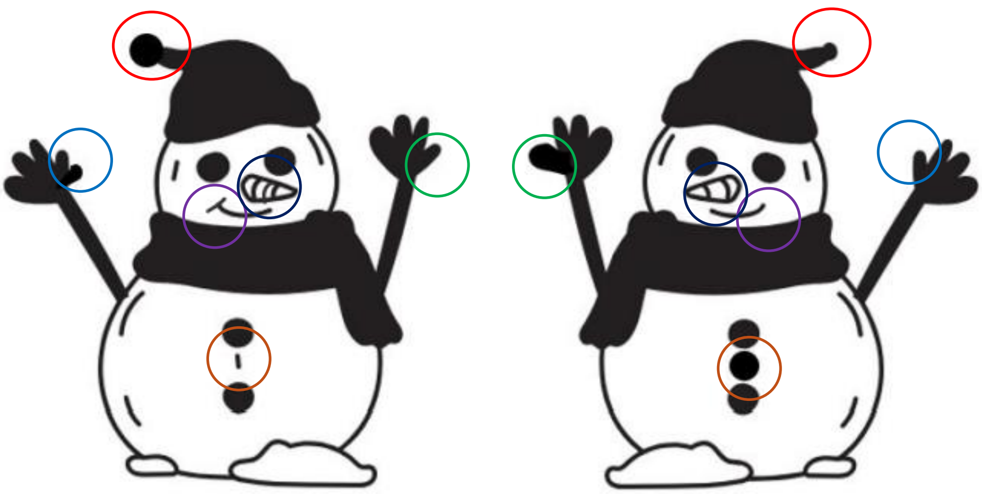
5.2., 6.2. Ivona je nacrtala dva snjegovića. Osim što im je zamijenila lijeve i desne strane, koliko je još razlika napravila?



A. 3	**B.** 6	**C.** 5	**D.** 4	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

- nos, usta, prsti na jednoj ruci, prsti na drugoj ruci, dugme, kapa



Točan odgovor je B.

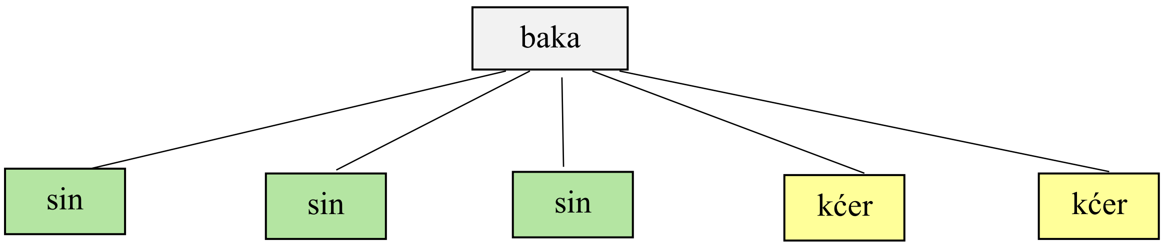
5.3., 6.3. Anina baka ima tri sina i dvije kćeri. Svaki od njih trojice ima dva sina i nemaju žensku djecu. Ako Ana ima brata i sestru, koliko Anina baka ima muških unuka?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
8	7	6	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

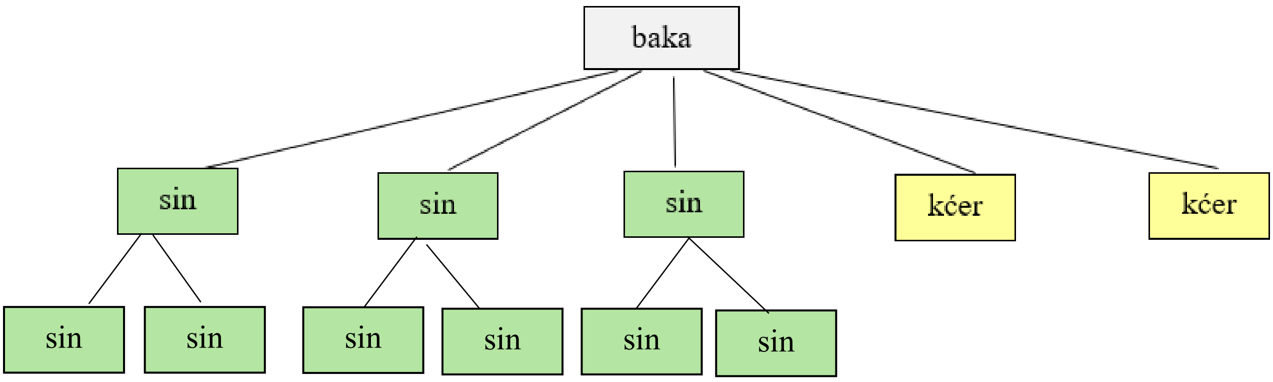
Rješenje.

Skicirajmo što nam je zadano.

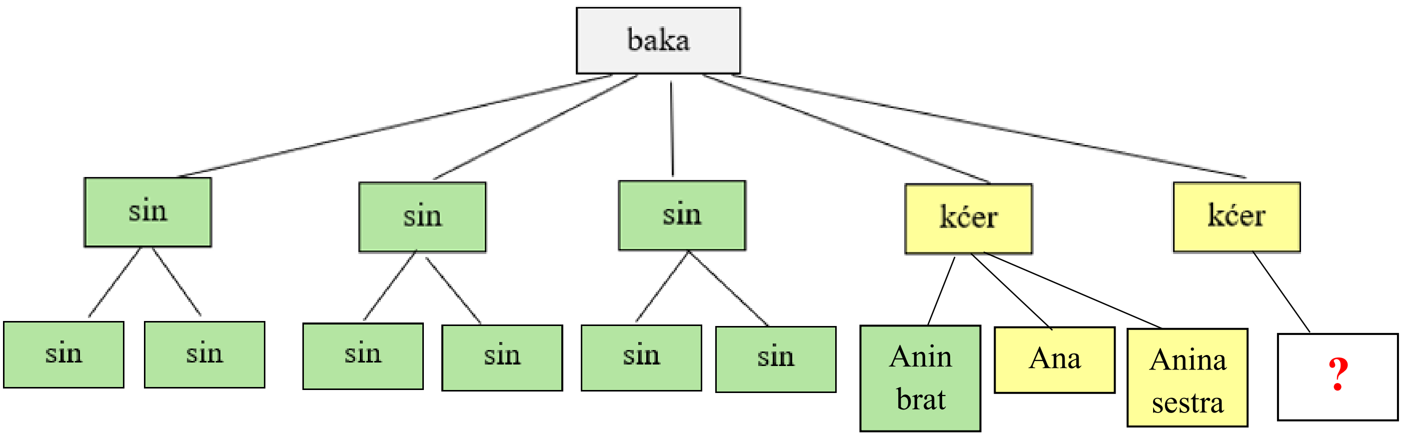
Anina baka ima tri sina i dvije kćeri



Svaki od njih trojice ima dva sina i nemaju žensku djecu



Ana ima brata i sestru → budući da Ana ima sestru, njena mama je bakina kćer (jer bakini sinovi nemaju ženske djece)



Primijetimo da nam u zadatku nije zadano ima li druga bakina kćer djece, pa ne možemo znati koliko baka ima muških unuka.

Točan odgovor je D.

5.10. Prije 3 godine Jure je imao onoliko godina koliko sada ima Bepo. Ako će za 7 godina Jure imati onoliko godina koliko su prije 3 godine imali Ante i Bepo zajedno, koliko godina sada ima Ante?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
ništa od navedenoga	16	20	13	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

U zadatku se spominju troje ljudi (Ante, Jure i Bepo) i tri vremenska razdoblja (prije 3 godine, sada, za 7 godina). Pripremimo tablicu u koju ćemo upisati što nam je zadano.

	Ante	Jure	Bepo
prije 3 godine			
sada			
za 7 godina			

Prije 3 godine Jure je imao onoliko godina koliko sada ima Bepo → označimo taj broj s x.

	Ante	Jure	Bepo
prije 3 godine		x	
sada			x
za 7 godina			

Popunimo ostala polja u tablici za Juru i Bepa.

	Ante	Jure	Bepo	
prije 3 godine	**?**	x	x - 3	+ 3
sada		$x + 3$	x	+ 7
za 7 godina		$x + 10$	$x + 7$	

$$\underbrace{\textit{za 7 godina Jure će imati onoliko godina}}_{x + 10} = \underbrace{\textit{koliko su prije 3 godine imali Ante i Bepo zajedno}}_{? + x - 3}$$

$x + 10 = ? + x - 3 \quad \Rightarrow \quad 10 = ? - 3$

$? = 10 + 3$

$? = 13$

Ante je prije 3 godine imao 13 godina, što znači danas ima 13 + 3 = 16 godina.

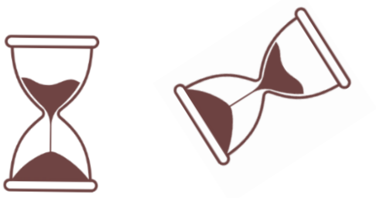
Točan odgovor je B.

5.11. Ana i Mirna igrale su se pješčanim satovima. Ana i Mirna stavile su satove jedan pored drugog i u istom trenutku okrenule su ih da pijesak počne curiti. Nakon što bi pijesak u satu iscurio, svaka djevojka okrenula bi svoj sat da ponovno curi. Mirnin sat veći je od Anina, pa za okretanje sata Mirni trebaju 2 minute, a Ani 1 minuta. Nakon 20 minuta Mirnin sat iscurio je drugi put, a Anin sat treći put. Koliko će minuta, od tog trenutka, trebati Mirninu satu da pijesak treći put iscuri do kraja?

A. 11 minuta	**B.** 12 minuta	**C.** 10 minuta	**D.** 8 minuta	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.
Primijetimo da ne znamo vremena potrebna satovima da bi jednom iscurili.

Nakon 20 minuta Mirnin sat iscurio je drugi put



U 20 minuta dogodila su se dva curenja sata, ali i jedno preokretanje između.
Budući da za okretanje sata Mirni trebaju 2 minute, za dva curenja je preostalo 20 – 2 = 18 minuta.
To znači da jedno curenje Mirnina sata traje 18 : 2 = 9 minuta.

Nakon 20 minuta Anin sat iscurio je treći put

U 20 minuta dogodila su se tri curenja sata, ali i dva preokretanje između.
Budući da za okretanje sata Ani treba 1 minuta, za dva preokretanja trebaju joj 2 minute, pa je za curenja preostalo 20 – 2 = 18 minuta.
To znači da jedno curenje Anina sata traje 18 : 3 = 6 minuta.

Nakon što znamo vremena curenja obaju satova, napravimo tablice u kojima ćemo pregledno zapisati nakon koliko je minuta svaki od njih započeo, a nakon koliko završio curenje.

Mirnin sat		
započeo s curenjem	završio s curenjem	završio s preokretanjem
0	0 + 9 = 9	9 + 2 = 11
11	11 + 9 = 20	

Anin sat		
započeo s curenjem	završio s curenjem	završio s preokretanjem
0	0 + 6 = 6	6 + 1 = 7
7	7 + 6 = 13	13 + 1 = 14
14	14 + 6 = 20	

Da bi Mirnin sat iscurio treći put, Mirna ga treba jednom preokrenuti (za što joj trebaju 2 minute) i jednom pustiti da iscuri (što traje 9 minuta). Dakle, od 20. minute treba proći još 2 + 9 = 11 minuta da Mirnin sat iscuri treći put. Zanimljivo je primijetiti da do odgovora na pitanje možemo doći promatrajući samo Mirnin sat, dok nam informacije o Aninom satu nisu trebale.

Točan odgovor je A.

6.11. Koliki je zbroj prvih 1 000 decimala u decimalnom zapisu broja $\frac{13}{111}$?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
2 997	2 991	2 998	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Pretvorimo dani razlomak u decimalni broj dijeljenjem broja 13 sa 111.

```
 13  : 111 = 0.1171…
 130
-111
    190
   -111
      790
     -777
       130
        …
```

Ostatak 13 se ponovio pa zaključujemo da je dani razlomak periodičan decimalan broj.

$$\frac{13}{100} = 0.117117117\ldots = 0.\dot{1}1\dot{7}$$

Želimo odrediti prvih 1 000 decimala toga periodičnog broja. Duljina perioda koji se ponavlja (117) je 3 pa 1 000 dijelimo s 3.

$$1000 = 333 \cdot 3 + 1$$

To znači da će se period (znamenke 117) u prvih 1 000 decimala ponoviti 333 puta, a tisućita znamenka bit će prva znamenka perioda (znamenka 1).

$$\frac{13}{100} = 0.\underbrace{\boxed{117}}_{1.}\underbrace{\boxed{117}}_{2.}\underbrace{\boxed{117}}_{3.}\ldots\underbrace{\boxed{117}}_{332.}\underbrace{\boxed{117}}_{333.}{\color{red}1}$$

Zbroj znamenaka perioda 117 je 1 + 1 + 7 = 9.

Kada zbrojimo znamenke 333 ponavljanja toga perioda dobivamo 333 · 9 = 2 997.

Na kraju ne smijemo zaboraviti dodati i tisućitu decimalu (znamenku 1).

$$2\,997 + {\color{red}1} = 2\,998$$

Točan odgovor je C.

6.12., 7.11. Luka, Mario i Antun smislili su igru s prostim brojevima. Napisali su na papir sve proste brojeve manje od 15. Potom su papir razrezali na dijelove tako da na svakom papiriću piše jedan broj, stavili su papiriće u kutiju i dogovorili se da će ne gledajući izvlačiti po dva listića. Za izvučene brojeve trebaju odrediti njihov zbroj i njegov broj djelitelja. Pobjednik je igre onaj tko dobije najveći zbroj s najmanjim brojem djelitelja. Luka je izvlačio prvi i nakon toga što je izvukao dva papirića, vrisnuo je od sreće jer je znao da je pobjednik igre. Mario i Antun u čudu su ga gledali. Koji je broj Luka sigurno izvukao?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
11	13	7	5	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Prosti brojevi manji od 15 su:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Zbroj izvučenih brojeva će imati najmanji broj djelitelja ako je prost (prosti brojevi imaju točno dva djelitelja, a složeni više od 2).

Iz toga zaključujemo da zbroj mora biti neparan.

Zbroj dva broja je neparan kada je jedan paran, a jedan neparan. Budući da je 2 jedini paran prost broj, Luka je sigurno izvukao broj 2 i još jedan neparan prost broj.

Pogledajmo sve mogućnosti za to i provjerimo kada će zbroj biti prost.

$2 + 3 = 5$ → prost

$2 + 5 = 7$ → prost

$2 + 7 = 9$

$2 + 11 = 13$ → prost

$2 + 13 = 15$

Zbroj će biti prost u tri slučaja (5, 7 ili 13).

Budući da tražimo najveći zbroj s najmanjim brojem djelitelja, Luka je izvukao brojeve 2 i 11 (i dobio zbroj 13).

Točan odgovor je A.

7.9. Ivan je dobio zadatak da uredno složi razbacane stvari u 10 ladica svog ormara. Odlučio je svaki dan složiti najmanje dvije, a najviše četiri ladice. Danas je utorak i Ivan će započeti sa slaganjem. Budući da u subotu ide baki, treba završiti slaganje najkasnije u petak. Na koliko načina Ivan može rasporediti slaganje po danima vodeći računa o svemu navedenome?

A. 16	**B.** 10	**C.** 14	**D.** 12	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Ivan slaganje započinje u utorak, a treba ga završiti najkasnije u petak. Pogledajmo koliko dana ima na raspolaganju.

utorak	srijeda	četvrtak	petak
1	2	3	4

U najviše 4 dana Ivan treba složiti 10 ladica. Pritom trebamo paziti na to da će svaki dan složiti najmanje 2 i najviše 4 ladice.

Dakle, broj 10 trebamo prikazati kao zbroj najviše 4 pribrojnika (jer imamo najviše 4 dana) pri čemu su ti pribrojnici 2, 3 ili 4. Ispišimo redom sve mogućnosti za to.

$10 = 4 + 4 + 2$
$10 = 4 + 3 + 3$
$10 = 4 + 2 + 2 + 2$
$10 = 3 + 3 + 2 + 2$

Broj 10 možemo na 4 načina prikazati kao traženi zbroj.

Pogledajmo sada za svaki zbroj njegov moguć raspored po danima.

raspored po danima U S Č P	broj rasporeda	ukupno rasporeda
$10 = 4 + 4 + 2$ $10 = 4 + 2 + 4$ $10 = 2 + 4 + 4$	3	$3 + 3 + 4 + 6 = 16$
$10 = 4 + 3 + 3$ $10 = 3 + 4 + 3$ $10 = 3 + 3 + 4$	3	
$10 = 4 + 2 + 2 + 2$ $10 = 2 + 4 + 2 + 2$ $10 = 2 + 2 + 4 + 2$ $10 = 2 + 2 + 2 + 4$	4	
$10 = 3 + 3 + 2 + 2$ $10 = 3 + 2 + 3 + 2$ $10 = 3 + 2 + 2 + 3$ $10 = 2 + 3 + 3 + 2$ $10 = 2 + 3 + 2 + 3$ $10 = 2 + 2 + 3 + 3$	6	

Točan odgovor je A.

7.10. Neka su a, b i c znamenke za koje vrijedi da je $a > b > c > 0$. Kada napišemo i zbrojimo sve troznamenkaste brojeve koji imaju te tri znamenke, dobit ćemo zbroj 2 220. Koliko postoji takvih trojki (a, b, c)?

A. 4	**B.** 3	**C.** 5	**D.** 2	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama a, b i c je 6.

Zapišimo dani zbroj.

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 2220$$

Rastavimo sve brojeve po mjesnim vrijednostima.

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 2220$$

Pojednostavnimo lijevu stranu jednakosti.

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 2220$$

$$222a + 222b + 222c = 2220$$

$$a + b + c = 10$$

Dobili smo da je zbroj triju znamenaka jednak 10.

Ne smijemo zaboraviti da su a, b i c različite znamenke (jer je $a > b > c > 0$).

Napišimo sve mogućnosti za to.

$10 = 7 + 2 + 1$

$10 = 6 + 3 + 1$

$10 = 5 + 4 + 1$

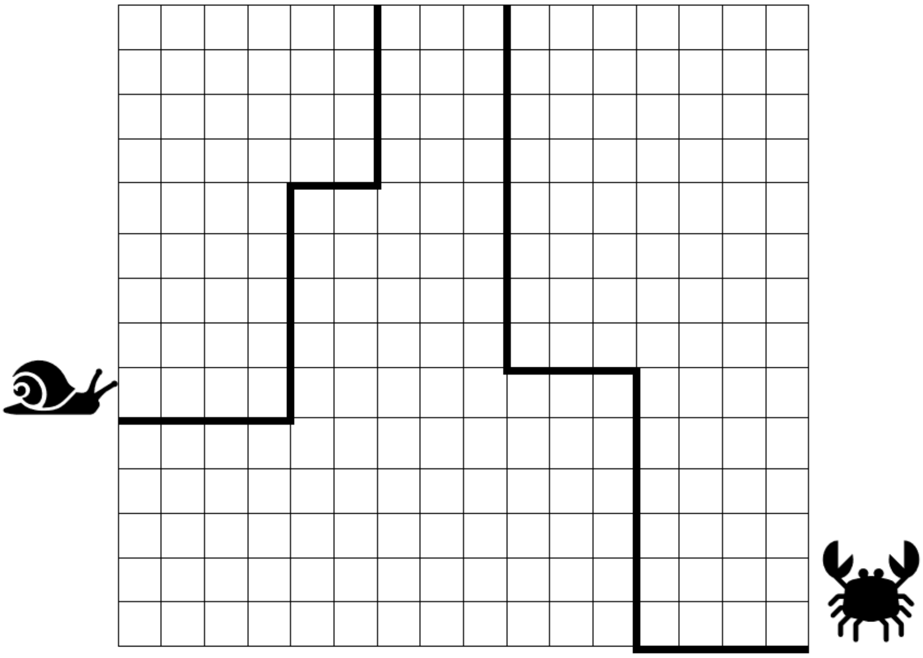
$10 = 5 + 3 + 2$

Postoje 4 trojke brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju uvjete zadatka.

$$(7, 2, 1), (6, 3, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 2)$$

Točan odgovor je A.

7.13., 8.11. Rak i puž žele što prije proći nacrtanim putovima. Rak hoda tako da, nakon što napravi tri koraka prema naprijed, napravi jedan unazad i pritom, s ta četiri koraka, prijeđe dvije stranice kvadratića. Za to vrijeme puž prijeđe 1.5 stranicu kvadratića. Tko će prije stati na kraj puta?



A.	B.	C.	D.	E.
istovremeno	rak	puž	nije moguće odrediti	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Prebrojimo duljine puta (u stranicama kvadratića) puža i raka.

Puž $\rightarrow$ $4+5+2+4=15$ Rak $\rightarrow$ $4+6+3+8=21$

Zapišimo pregledno što nam je zadano.

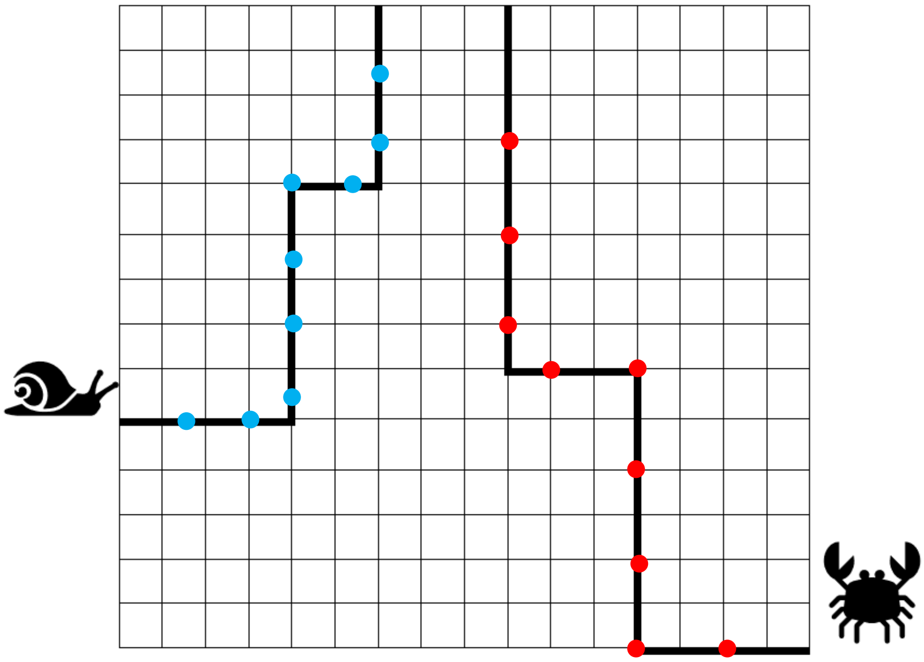
rak		puž
3 naprijed + 1 nazad = 4 koraka	2 stranice kvadratića	1.5 stranica kvadratića

Broj koraka koje rak napravi dvostruko je veći od broja stranica kvadratića. To znači da rak, da bi prošao 20 kvadratića, treba napraviti $20 \cdot 2 = 40$ koraka.

Jer je 20 desetorostruko veće od 2, pritom će i puž prijeći 10 puta dulji put, tj. $10 \cdot 1.5 = 15$ stranica kvadratića.

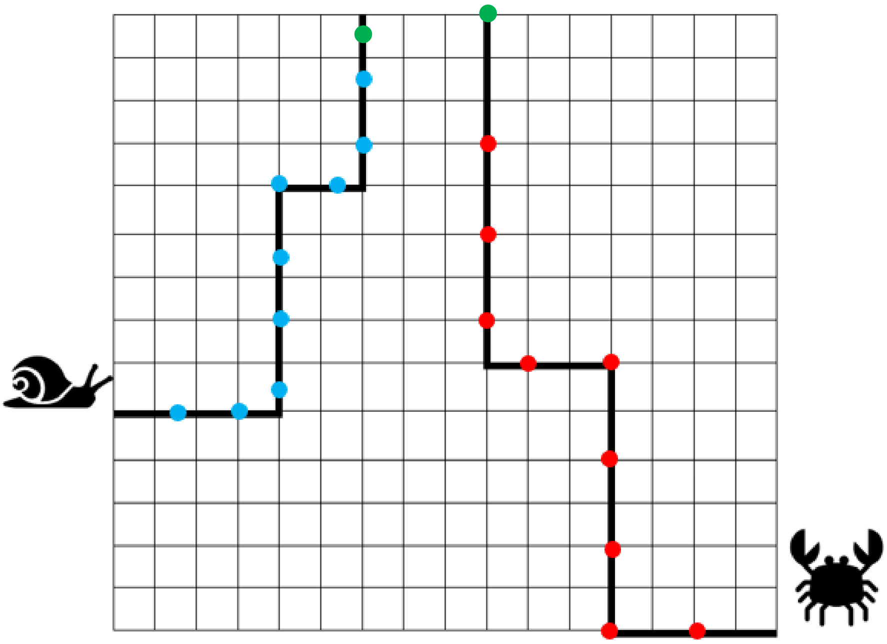
Budući da je duljina puta puža 15 stranica, a raka 21 stranica, mogli bismo brzopleto zaključiti da će, nakon što je rak napravio 40 koraka, puž biti na cilju, a rak još ne.

Ali, pogledajmo gdje su puž i rak bili nakon 9 prijeđenih „tura“ tj. nakon 36 rakova koraka.



Pužu nedostaje još 1.5 kvadratić, a raku 3.

Pogledajmo gdje će biti u trenutku kad rak napravi još 3 koraka.



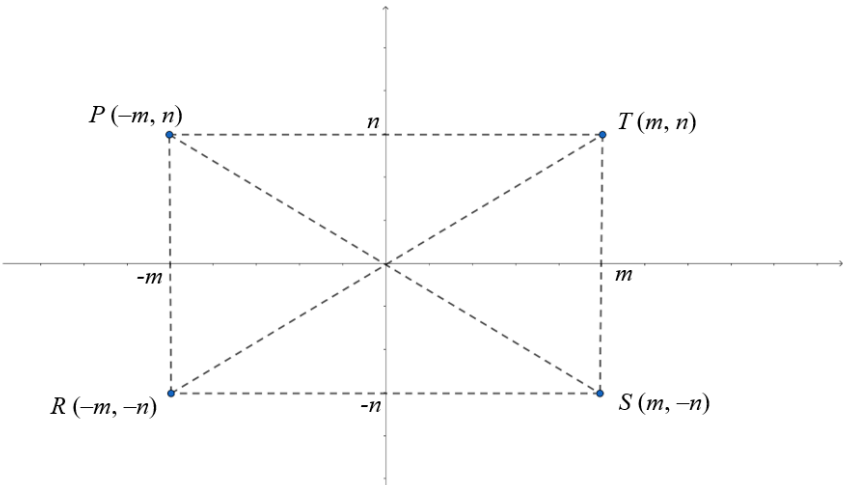
Rak će stati na kraj puta, a pužu će nedostajati još malo (jer 1.5 kvadrat prijeđe za vrijeme koje treba raku za 4 koraka).

Točan odgovor na pitanje je B.

8.9. Apscisa točke A trokratnik je ordinate točke A_1 koja je točki A simetrična s obzirom na ishodište. Osim toga, ordinata točke A za 3 je manja od apscise točke A_2 koja je točki A_1 simetrična s obzirom os ordinata. U kojem se kvadrantu nalazi točka A?

A. IV.	**B.** III.	**C.** II.	**D.** I.	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.
Pogledajmo što vrijedi za točke koje su simetrične s obzirom na jednu os ili ishodište koordinatnog sustava.



Zaključimo:

- točke simetrične s obzirom na os apscisa imaju jednake apscise i suprotne ordinate (npr. S i T)
- točke simetrične s obzirom na os ordinata imaju suprotne apscise i jednake ordinate (npr. P i T)
- točke simetrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava imaju suprotne apscise i ordinate (npr. S i P)

Označimo nepoznate koordinate točke s $A\ (x, y)$.

$$\underbrace{\textit{Apscisa točke } A \textit{ trokratnik je ordinate točke } A_1 \underbrace{\textit{koja je točki } A \textit{ simetrična s obzirom na ishodište}}_{A_1\ (-x,\,-y)}}_{x=-3y}$$

$$\underbrace{\text{ordinata točke } A \text{ za 3 je manja od apscise točke } A_2 \underbrace{\text{koja je točki } A_1 \text{ simetrična s obzirom os ordinata}}_{A_2\ (x,\,-y)}}_{y=x-3}$$

$x=-3y$ i $y=x-3 \quad \Rightarrow \quad y=-3y-3 \quad \Rightarrow \quad 4y=-3 \Rightarrow y=-\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9}{4} \Rightarrow A\left(\frac{9}{4},-\frac{3}{4}\right)$

Točka A nalazi se u IV. kvadrantu.

Točan odgovor je A.

8.13. Jure je pred sebe stavio dvije boce jednakog oblika. U plavoj je boci bio sok, a u zelenoj voda. Obje su bile napunjene do polovice svoje visine. Jure je iz zelene boce jednu trećinu vode prelio u plavu bocu. Nakon toga je iz plave boce jednu trećinu tekućine prelio u zelenu bocu. U kojem su omjeru voda i sok u zelenoj boci nakon obaju prelijevanja?

A.	B.	C.	D.	E.
7 : 3	5 : 2	2 : 1	4 : 1	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Iako je količina tekućine u obje boce jednaka (soka je jednako kao i vode), da bismo jednostavnije mogli pratiti što se događa prilikom prelijevanja, početnu količinu soka označimo sa S, a vode s V.

	plava boca			zelena boca		
	sok	voda	ukupna količina tekućine	sok	voda	ukupna količina tekućine
početak	S	0	S	0	V	V
iz zelene boce jednu trećinu vode prelio u plavu bocu	S	$0+\frac{1}{3}V$	$S+\frac{1}{3}V$	0	$V-\frac{1}{3}V$ $=\frac{2}{3}V$	$0+\frac{2}{3}V$
iz plave boce jednu trećinu tekućine prelio u zelenu bocu	$S-\frac{1}{3}S$ $=\frac{2}{3}S$	$\frac{1}{3}V-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}V$ $=\frac{1}{3}V-\frac{1}{9}V$ $=\frac{2}{9}V$	$\frac{2}{3}S+\frac{2}{9}V$	$0+\frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}V+\frac{1}{9}V$ $=\frac{7}{9}V$	$\frac{1}{3}S+\frac{7}{9}V$

Nakon dva prelijevanja u zelenoj boci nalazila se $\frac{1}{3}S$ i $\frac{7}{9}V$, tj. $\frac{3}{9}S$ i $\frac{7}{9}V$.

Dakle, omjer vode i soke u zelenoj boci nakon obaju prelijevanja je $\frac{7}{9}:\frac{3}{9}=7:3$.

Točan odgovor je A.