Zimsko kolo 2024./2025.

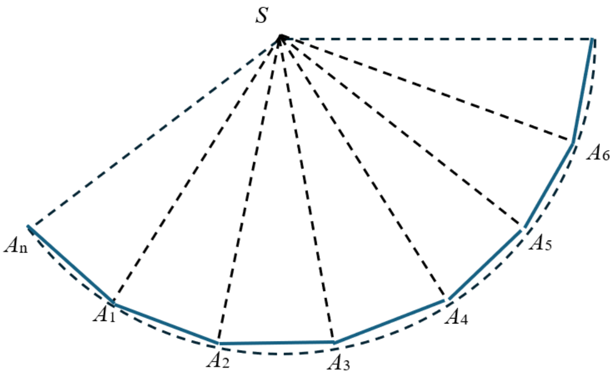
MATEMATIKA

M.5. Kolika je veličina kuta između dijagonala $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_4A_6}$ pravilnog 18-terokuta $A_1A_2 \ldots A_{18}$?

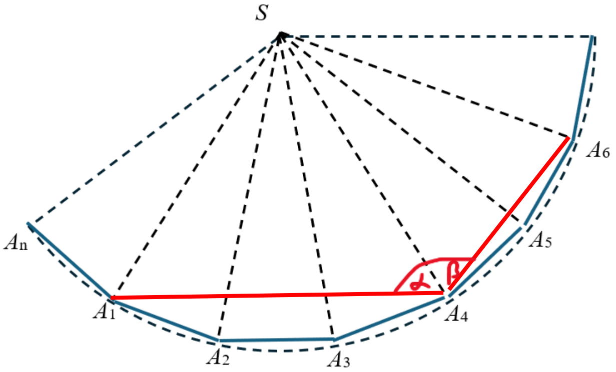
A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
$105°$	$120°$	$110°$	$130°$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Budući da promatramo 18-terokut, središnji kut u karakterističnom trokutu mu je $\varphi = \frac{360°}{18} = 20°$.
Skicirajmo jedan dio *n*-terokuta u kojem ćemo vidjeti dane dijagonale. Pritom je važno istaknuti da se pravilnom *n*-terokutu može opisati kružnica pa ćemo njeno središte označiti sa *S*.

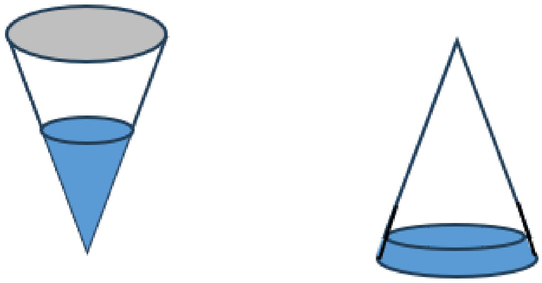


Promotrimo sada dane dijagonale $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_4A_6}$ i uočimo kut između njih..



Podijelili smo kut na dva dijela α i β.
Trokuti A_1A_4S i A_4A_6S jednakokračni su. Izračunajmo veličine kutova uz osnovicu.
$\Delta A_1A_4S \quad \Rightarrow \quad 3\varphi + 2\alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad 60° + 2\alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$
$\Delta A_4A_6S \quad \Rightarrow \quad 2\varphi + 2\beta = 180° \quad \Rightarrow \quad 40° + 2\beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta = 70°$
$\alpha + \beta = 130°$
Točan odgovor je D.

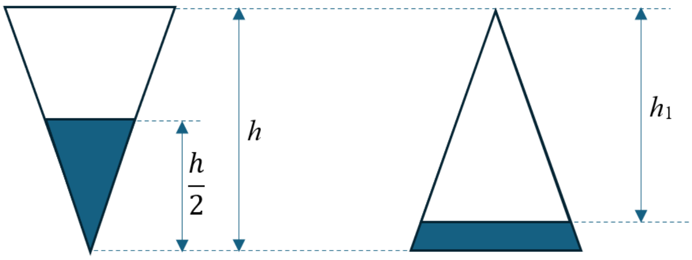
M.4. Zatvorena posuda u obliku stošca visine h napunjena je do polovice svoje visine tekućinom. Kolika će biti visina tekućine kada preokrenemo posudu?



A. $0.125h$	**B.** $0.044h$	**C.** $0.025h$	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

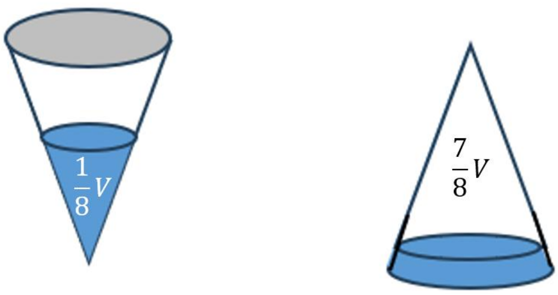
Rješenje.

Nacrtajmo osne presjeke danih tijela i označimo visine.



Promotrimo prvi stožac. Primijetimo da je tekućina smještena u dopunjak stošca.

Budući da se visine stošca i dopunjka odnose kao 2 : 1, njihovi obujmovi odnose se kao $2^3 : 1^3$ tj. 8 : 1. To znači da je obujam tekućine jednak $\frac{1}{8}$ obujma stošca, pa je $\frac{7}{8}$ obujma stošca prazno.



Pogledajmo sada drugu sliku. Budući da je obujam dopunjka $\frac{7}{8}$ obujma stošca, zaključujemo da je visina dopunjka $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$ visine stošca.

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot h = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} h$$

Tražena visina tekućine jednaka je razlici visine stošca i dopunjka.

$$h - h_1 = h - \frac{\sqrt[3]{7}}{2} h = \left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) h = 0.044\, h$$

Točan odgovor je B.

M.7. Koliko postoji podskupova skupa $\{1,2,3 \ldots 9,10\}$ koji sadrže točno jedan prost broj?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
128	160	256	ništa od navedenoga	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Prosti brojevi u danom skupu su 2, 3, 5 i 7. Njih je četiri.

Kada iz danog skupa izbacimo proste brojeve, preostat će skup $\{1,4,6,8,9,10\}$ koji ima 6 elemenata. Broj podskupova toga skupa je $2^6 = 64$ (svaki element toga skupa može i ne mora biti element podskupa pa ga možemo izabrati na dva načina. Budući da je elemenata 6, uzastopnim prebrojavanjem dobivamo umnožak 6 dvojki).

Svakom od tih 64 podskupova možemo dodati jedan od 4 prosta broja pa je ukupan broj podskupova $64 \cdot 4 = 256$.

Točan odgovor je C.