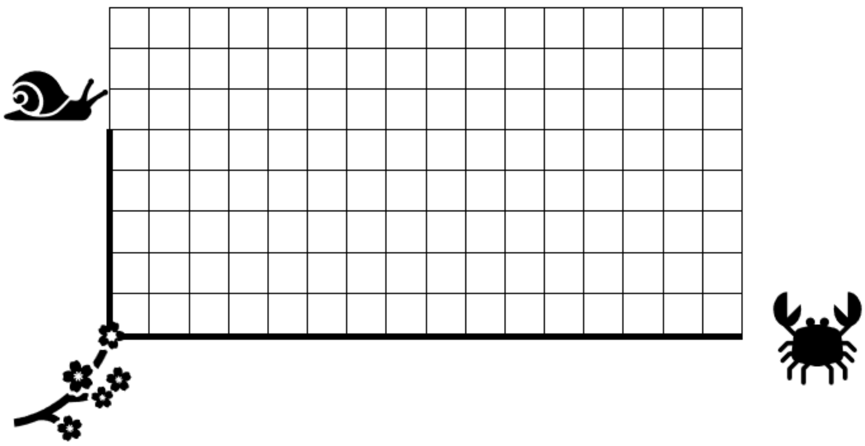
Naučimo srednja škola

MAT liga
2024./2025.

3. kolo 2024./2025.

1. Rak i puž žele što prije proći nacrtanim putovima. Rak hoda tako da, nakon što napravi četiri koraka prema naprijed, napravi jedan unazad i pritom, s tih pet koraka, prijeđe tri stranice kvadratića. Za to vrijeme puž prijeđe jednu stranicu kvadratića. Tko će prije dotaknuti cvijet?



A. istovremeno	**B.** rak	**C.** puž	**D.** nije moguće odrediti	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Prebrojimo duljine puta (u stranicama kvadratića) puža i raka.

Puž $\rightarrow$ 5 Rak $\rightarrow$ 16

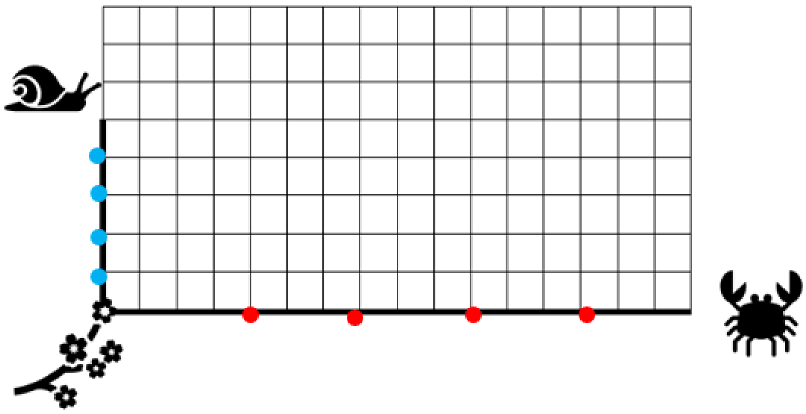
Zapišimo pregledno što nam je zadano.

rak		puž
4 naprijed + 1 nazad = 5 koraka	3 stranice kvadratića	1 stranica kvadratića

Budući da rak s 5 koraka prijeđe 3 stranice kvadratića, zaključujemo da bi za $5 \cdot 5 = 25$ koraka prešao $5 \cdot 3 = 15$ stranica. Za to vrijeme puž prijeđe $5 \cdot 1 = 5$ stranica.

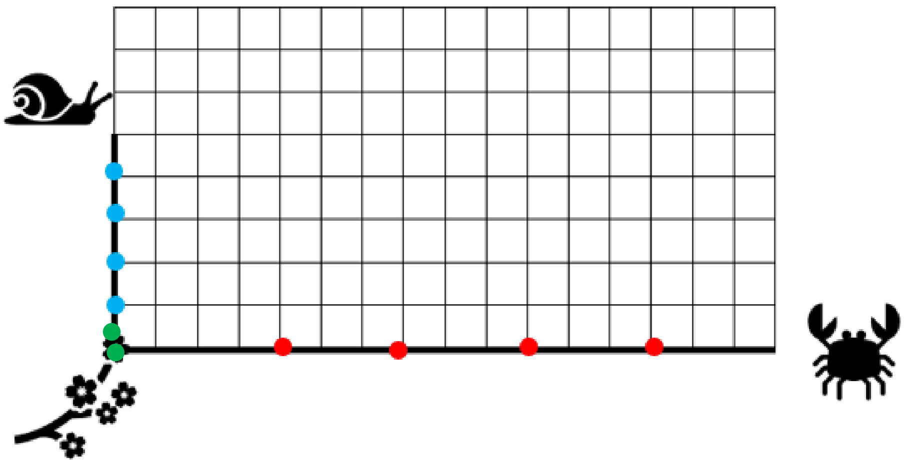
Budući da je duljina puta puža 5 stranica, a raka 16 stranica, mogli bismo brzopleto zaključiti da će, nakon što je rak napravio 25 koraka, puž biti na cilju, a rak još ne.

Ali, pogledajmo gdje su puž i rak bili nakon 4 prijeđen „ture“ tj. nakon $4 \cdot 5 = 20$ rakova koraka.



Pužu nedostaje još 1, a raku 4 kvadratića.

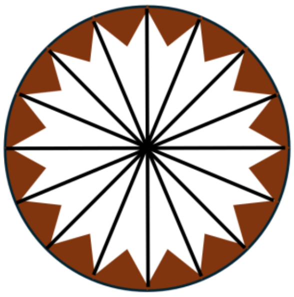
Kada rak napravi još 4 koraka prema naprijed dodirnut će cvijet, a puž još neće doći do njega!



Tek kada rak napravi još jedan korak nazad, puž će dotaknuti cvijet. Ali, pitanje u zadatku je tko će prvi dotaknuti cvijet, a to je rak.

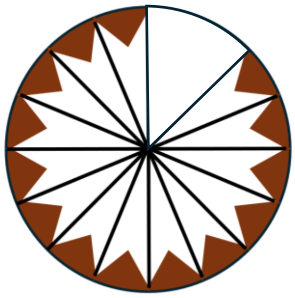
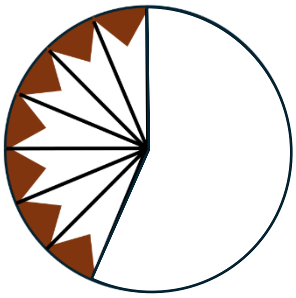
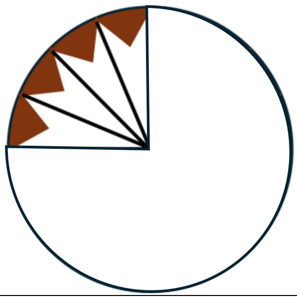
Točan odgovor je B.

2. Mama je razrezala tortu na 16 jednakih dijelova (kao na slici). Prvi dan ukućani su pojeli osminu torte, drugi dan 250 % više nego prvi dan, a treći dan tri komada. Koliki je postotak torte preostao nakon 3 dana?



A. ništa od navedenoga	**B.** 25 %	**C.** 31.25 %	**D.** 37.5 %	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

1.dan	*ukućani su pojeli osminu torte* $\frac{1}{8} \cdot 16 = 2$	
2. dan	*250 % više nego prvi dan* → 250 % više od 2 250 % od broja 2 je $2 \cdot \frac{250}{100} = 5$ Ali, 250 % više od 2 je: 2 + (250 % od 2) = 2 + 5 = 7 Primijetimo da je 250 % više od 2 isto što i 350 % od broja 2. $2 \cdot \frac{350}{100} = 7$	
3. dan	*treći dan tri komada*	

Nakon 3. dana od 16 komada torte preostala su 4.

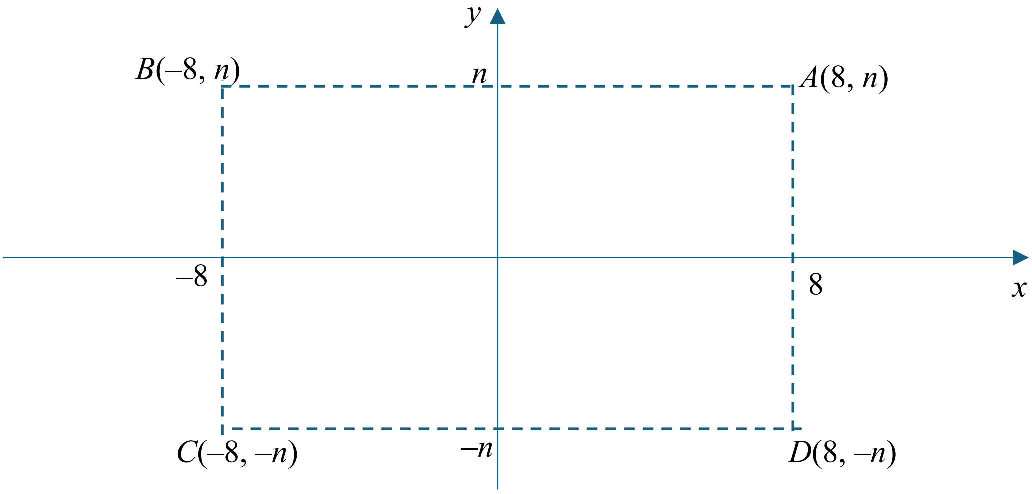
$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Točan odgovor je B.

3. Točka B simetrična je točki $A(8, n)$ s obzirom na os ordinata. Točka C simetrična je točki B s obzirom na os apscisa, a točka D simetrična je točki C s obzirom na os ordinata. Ako se u unutrašnjosti četverokuta s vrhovima $ABCD$ nalazi 2 025 točaka s cjelobrojnim koordinatama i ako je $n \in \mathbb{N}$, koliki je n?

A. 66	**B.** 67	**C.** 69	**D.** 68	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.



Unutar pravokutnika nalazi se 2 025 točaka s cjelobrojnim koordinatama.

Prebrojimo prvo koliko je takvih točaka na koordinatnim osima:

- ishodište → 1 $(0, 0)$
- os apscisa → $2 \cdot 7 = 14$ $(1, 0), (2, 0) \ldots (7, 0)$
- os ordinata → $2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$ $(0, 1), (0, 2) \ldots (0, n - 1)$

Dakle, na koordinatnim osima nalazi se takvih $1 + 14 + 2n - 2 = 13 + 2n$ točaka.

Pogledajmo koordinate točaka unutar prvog kvadranta:

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (2, 1) & \ldots & (7, 1) \\ (1, 2) & (2, 2) & \ldots & (7, 2) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ (1, n-1) & (2, n-1) & \ldots & (7, n-1) \end{array}$$

U svakom kvadrantu takvih je točaka $7 \cdot (n - 1)$, pa je u sva četiri kvadranta $28 \cdot (n - 1)$ takvih točaka.

Zbrojimo broj točaka na koordinatnim osim s brojem točaka u sva četiri kvadranta i izjednačimo zbroj s 2 025.

$$13 + 2n + 28(n - 1) = 2025$$
$$13 + 2n + 28n - 28 = 2025$$
$$30n = 2040$$
$$n = 68$$

Točan odgovor je D.

4. Za koliko realnih parametara a dana jednadžba nema realna rješenja?

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{a}{x-1}$$

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
0	1	2	3	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Primijetimo da je $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

Pomnožimo jednakost s $(x-1)(x+1)$.

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{a}{x-1}$$

$$x(x+1)-(x-1)^2=a(x+1)$$

$$x^2+x-x^2+2x-1=ax+a$$

$$3x-1=ax+a$$

$$3x-ax=a+1$$

$$x(3-a)=a+1$$

Ako je $a = 3$ jednadžba je $x \cdot 0 = 4$ pa je nemoguća.

Za $a \neq 3$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x=\frac{a+1}{3-a}$.

Ne zaboravimo da $x \neq 1$ i $x \neq -1$. Pogledamo za koji parametar a će se x biti jednak 1 ili -1.

$\underline{x=1}$	$\underline{x=-1}$
$\frac{a+1}{3-a}=1$	$\frac{a+1}{3-a}=-1$
$a+1=3-a$	$a+1=-3+a$
$2a=4$	$1=-3$
$a=2$	$a \notin \mathbb{R}$

Zaključimo da za $a = 2$ ili $a = 3$ jednadžba nema realna rješenja.

Točan odgovor je C.

5. Koliko postoji nesukladnih trokuta čije su duljine stranica prirodni brojevi, a najdulja stranica im je duga 10 cm?

A. više od 20	B. 19	C. 20	D. manje od 19	E. ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Poredajmo po duljini stranice trokuta i označimo ih:

$$10 = a > b \geq c.$$

Prisjetimo se da zbroj duljina dviju stranica trokuta treba biti veći od duljine treće stranice trokuta.

$$a < b + c \quad \text{i} \quad b < a + c \quad \text{i} \quad c < a + b$$

$$10 < b + c \quad \text{i} \quad b < 10 + c \quad \text{i} \quad c < 10 + b$$

Budući da je $10 > b$, druga nejednakost $10 + c > b$ je ispunjena uvijek.

Budući da je $10 > c$, treća nejednakost $10 + b > c$ je ispunjena uvijek.

Pogledajmo sve mogućnosti za koje je ispunjena prva nejednakost $b + c > 10$ i $10 > b \geq c$.

$b = 9$	$b = 8$	$b = 7$	$b = 6$
9 + 2 = 11	8 + 3 = 11	7 + 4 = 11	6 + 5 = 11
9 + 3 = 12	8 + 4 = 12	7 + 5 = 12	6 + 6 = 12
9 + 4 = 13	8 + 5 = 13	7 + 6 = 13	
9 + 5 = 14	8 + 6 = 14	7 + 7 = 14	
9 + 6 = 15	8 + 7 = 15		
9 + 7 = 16	8 + 8 = 16		
9 + 8 = 17			
9 + 9 = 18			

Ukupno je 8 + 6 + 4 + 2 = 20 nesukladnih trokuta.

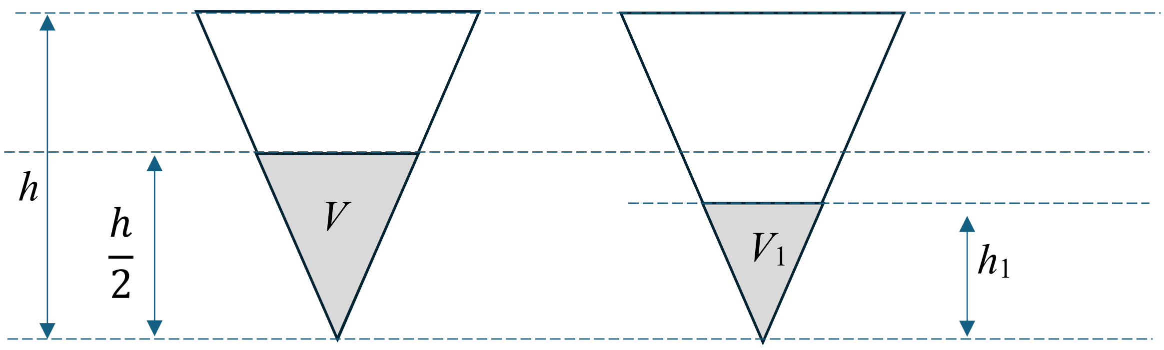
Točan odgovor je C.

6. Na dočeku Nove godine Nena je uzela čašu u obliku stošca visine h napunjenu tekućinom do polovice svoje visine. Kolika je bila visina tekućine u čaši nakon što je Nena otpila trećinu?

A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{h}{2\sqrt[3]{3}}$	$\frac{h\sqrt{3}}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h\sqrt[3]{18}}{6}$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Skicirajmo presjek čase s tekućinom prije i nakon ispijanja te uvedimo oznake kao na slici.



Obujmovi se odnose kao kubovi visina:

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{\frac{h}{2}}{h_1}\right)^3$$

Budući da je Nena otpila trećinu tekućine, vrijedi da je $V_1 = \frac{2}{3}V$ pa je $\frac{V}{V_1} = \frac{3}{2}$.

$$\left(\frac{\frac{h}{2}}{h_1}\right)^3 = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\frac{h}{2}}{h_1} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad h_1 = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}} = \frac{h\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{h\sqrt[3]{18}}{6}$$

Točan odgovor je D.