

Naučimo razredna nastava



1. kolo

1. Jakov je kuglice na kojima su redom pisali brojevi: 1, 2, 3... stavljao u vreću. Na kraju su se u vreći nalazile 23 kuglice s brojem koji je djeljiv s 12. Osim toga, 22 kuglice imaju broj kojem je zbroj znamenaka jednak 12. Koliko je najviše kuglica u vreći?



A.	B.	C.	D.	E.
273	282	287	281	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Jakov je kuglice na kojima su redom pisali brojevi: 1, 2, 3... stavljao u vreću → dakle, u vreći se nalaze svi prirodni brojevi od 1 do najvećeg broja koji želimo otkriti.

Na kraju su se u vreći nalazile 23 kuglice s brojem koji je djeljiv s 12 → najveći broj u vreći djeljiv s 12 je $23 \cdot 12 = 276$. Osim toga, zaključujemo da se u vreći ne nalazi broj $24 \cdot 12 = 288$, nego samo brojevi manji od njega.

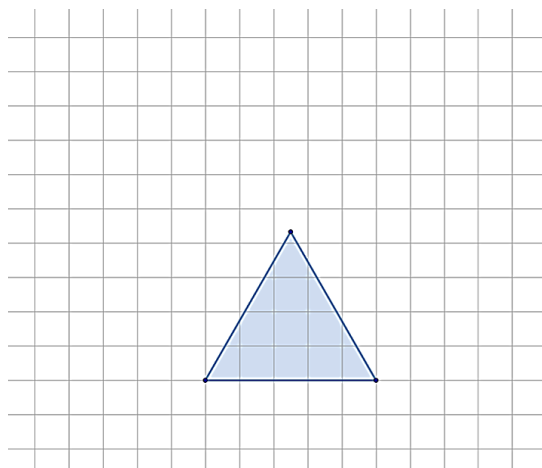
22 kuglice imaju broj kojem je zbroj znamenaka jednak 12 → želimo odrediti sve brojeve manje od 288 kojima je zbroj znamenaka jednak 12. Ispišimo ih redom.

jednoznamenasti	dvoznamenkasti		troznamenkasti		
nema	$9 + 3 = 12$	93	1__ 192	2__ 291 > 288	3__ 390 > 288
	$8 + 4 = 12$	84	183	282	
	$7 + 5 = 12$	75	174	273	
	$6 + 6 = 12$	66	165	264	
	$5 + 7 = 12$	57	156	255	
	$4 + 8 = 12$	48	147	246	
	$3 + 9 = 12$	39	138	237	
			129	228	
				219	
0 brojeva	7 brojeva		8 brojeva	8 brojeva	0 brojeva

Ukupno smo našli $0 + 8 + 7 + 8 + 0 = 23$ broja manja od 288 kojima je zbroj znamenaka jednak 12. Budući da nam je zadano da su u vreći 22 broja s tim svojstvom, zaključujemo da se najveći od njih ne nalazi u vreći. To je broj 282. Svi brojevi manji od njega mogu se nalaziti u vreći, a najveći među njima je 281.

Točan odgovor je D.

2. Trokut ABC jednakokraničan je i opseg mu je 15. Pravac a sadrži točku C i usporedan je s $\overline{AB}$. Točka D simetrična je točki B s obzirom na pravac a , a točka E simetrična je točki D s obzirom na pravac točkama B i C . Koliki je opseg četverokuta $ABDE$?

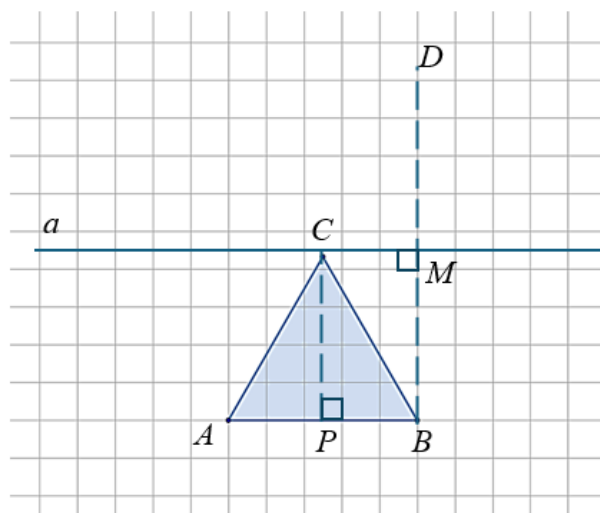


A.	B.	C.	D.	E.
$6\sqrt{3} + 6$	$10\sqrt{3} + 10$	$5 + \frac{25}{2}\sqrt{3}$	$10\sqrt{3} + 5$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Budući da je dani trokut jednakokraničan i opseg mu je 15, zaključujemo da su duljine njegovih stranica 3.

Označimo trokut s ABC i nacrtajmo pravac a koji sadrži točku C i usporedan je s $\overline{AB}$ te točku D simetričnu točki B s obzirom na pravac a .

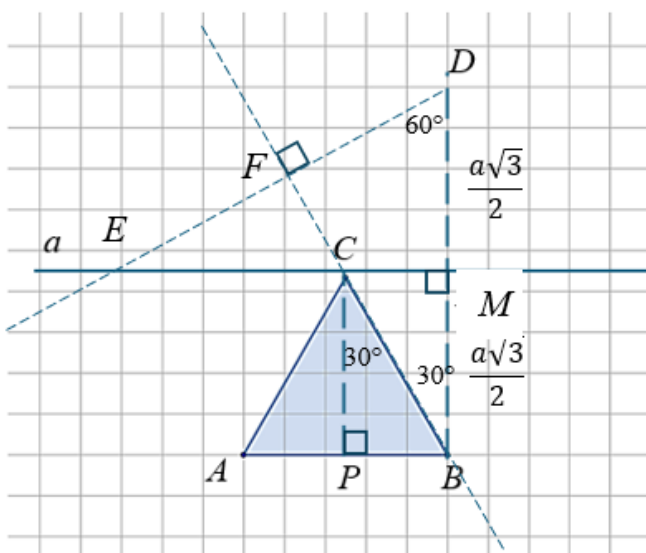


Trokuti PBC i MCB sukladni su (po KSK) pa je udaljenost točke B i točke M jednaka duljini visine trokuta ABC .

$$|BD| = 2 \cdot |BM| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Također, trokuti MCD i MCB su suklni (po SKS).

Nacrtajmo sad točku E koja je simetrična točki D s obzirom na pravac točkama B i C .

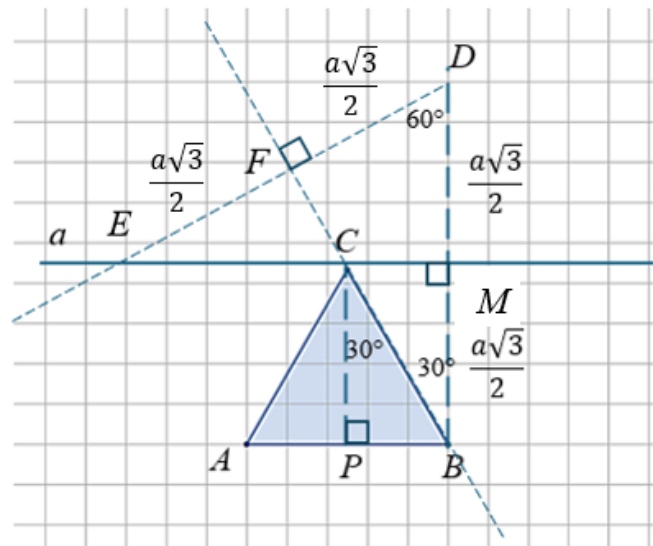


Dužina $\overline{FD}$ kraća je kateta pravokutnog trokuta BDF koji ima kutove 30° - 60° - 90° . To znači da je njezina duljina dvostruko manja od duljine hipotenuze tog trokuta.

$$|FD| = \frac{1}{2} \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

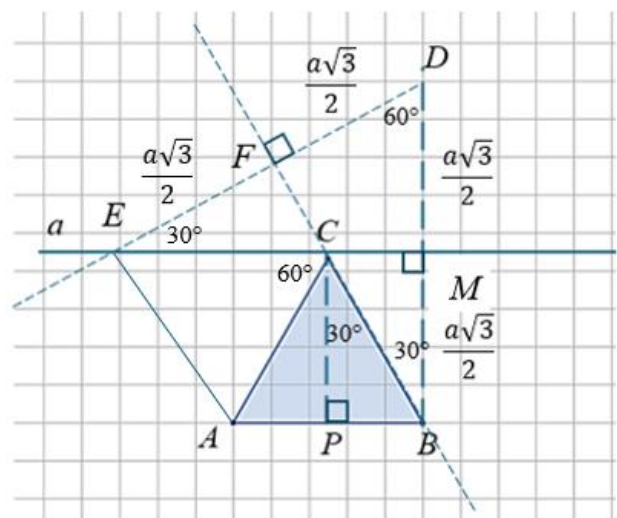
Jer je točka E simetrična točki D s obzirom na pravac BF , vrijedi:

$$|EF| = |FD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Dobili smo da je duljina dužine $\overline{ED}$ dvostruko veća od duljine dužine $\overline{DM}$ pa zaključujemo da točka E pripada pravcu a .

Spojimo točke E i A pa promotrimo četverokut čiji opseg trebamo izračunati.



Primijetimo da je $|EM| = \frac{|ED|\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$, pa je $|EC| = |EM| - |CM| = \frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = a$.

Dakle, trokut ACE je jednakokrakan, a kut između krakova veličine je 60° . Zaključujemo da je jednakostraničan, pa je $|EA| = |EC| = a$.

Sada možemo izračunati opseg četverokuta $ABDE$.

$$o_{ABDE} = |AB| + |BD| + |DE| + |EA| = a + a\sqrt{3} + a\sqrt{3} + a = 2a + 2a\sqrt{3}$$

Budući da je $a = 3$, opseg četverokuta je $6 + 6\sqrt{3}$.

Točan odgovor je A.

3. Rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 + bx + c = 0$ cijeli su brojevi za koje vrijedi $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 200$.
Koliko različitih vrijednosti može imati koeficijent b ?

A. beskonačno	B. 2	C. 3	D. 6	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
------------------	---------	---------	---------	--

Rješenje.

Iz dane jednadžbe vidimo da je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{2}$.

Pojednostavnimo lijevu stranu dane jednakosti.

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\ &= 4x_1x_2\end{aligned}$$

Jer je desna strana jednakosti 200, zaključujemo da je umnožak rješenja dane jednadžbe 50.

$$x_1x_2 = 50, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{2}$$

Budući da su rješenja jednadžbe cijeli brojevi, oni su djelitelji broja 50. Napišimo sve mogućnosti i izračunajmo koliki je b u svakom od tih slučajeva.

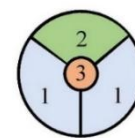
x_1 i x_2	$x_1 + x_2$	$b = 2(x_1 + x_2)$
1 i 50	51	102
2 i 25	27	54
5 i 10	15	30
-5 i -10	-15	-30
-2 i -25	-27	-54
-1 i -50	-51	-102

Ukupno je 6 mogućnosti.

Točan odgovor je D.

4. Dječja alka nadmetanje je *alkarića*, dječaka do 10 godina starosti, u kojem oni trčeći pokušavaju kopljem pogoditi središte alke (na slici). Najmlađi *alkarić* Jure u tri je trke osvojio ukupno 4 boda, a u svakoj je trci bio lošiji od svog brata Stipe. Na koliko je načina moguće popuniti tablicu na slici bodovima koje su Jure i Stipe dobili u trkama ako se u jednoj trci mogu osvojiti 0, 1, 2 ili 3 boda?

	1. trka	2. trka	3. trka	ukupno
Jure	?	?	?	4
Stipe	?	?	?	?



A. manje od 10	B. više od 9 i manje od 15	C. više od 14 i manje od 20	D. bar 20	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------------	-------------------------------	--------------------------------	--------------	---------------------------------------

Rješenje.

Ispišimo sve mogućnosti da je Jure dobio 4 boda u tri trke.

Broj 4 možemo na četiri načina prikazati kao zbroj triju od brojeva 0, 1, 2 i 3.

$$4 = 3 + 1 + 0 \quad \text{ili} \quad 4 = 2 + 2 + 0 \quad \text{ili} \quad 4 = 2 + 1 + 1$$

Jure je u svakoj trci bio lošiji od svog brata Stipe pa zaključujemo da se nisu mogli dogoditi slučajevi u kojima je Jure dobio 3.

Ali, svaki od preostala dva zbroja možemo rasporediti na više načina po trkama. Ispišimo sve mogućnosti.

JURE		
1. trka	2. trka	3. trka
2	2	0
2	0	2
0	2	2
2	1	1
1	2	1
1	1	2

Za svaku navedenih 6 mogućnost trebamo ispisati mogućnosti Stipinih bodova vodeći računa o tome da je Stipe dobio više bodova od Jure u svakoj trci.

JURE			STIPE		
1. trka	2. trka	3. trka	1. trka	2. trka	3. trka
2	2	0	3	3	1
			3	3	2
			3	3	3
2	1	1	3	2	2
			3	3	2
			3	2	3
			3	3	3

Za prva tri navedena načina Jurinih raspodjela bodova moguća su 3 Stipina. Ukupan broj takvih rasporeda je $3 \cdot 3 = 9$.

Za preostala tri navedena načina Jurinih raspodjela bodova moguća su 4 Stipina. Ukupan broj takvih rasporeda je $3 \cdot 4 = 12$.

Ukupan broj rasporeda je $9 + 12 = 21$.

Točan odgovor je D.