1. kolo

Naučimo MATEMATIKA

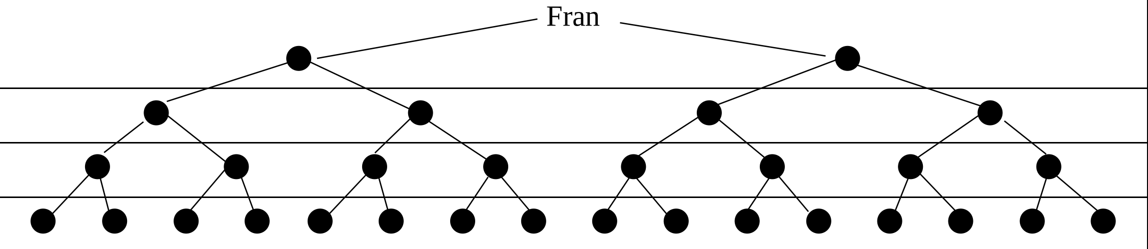
1. Fran je dvojici svojih prijatelja u 16 sati poslao mobitelom poruku da dođu oko 17 sati na školsko igralište. Nakon 3 minute obojica prijatelja proslijedili su tu istu poruku još dvojici svojih prijatelja. Svaki prijatelj će, tri minute nakon što primi poruku, proslijediti poruku još dvojici prijatelja koji je nisu dobili do tada. Ako će na igralište doći samo oni koji su dobili poruku do 16 sati i 10 minuta, koliko će Franovih prijatelja biti na igralištu u dogovoreno vrijeme?

A. 8	**B.** 30	**C.** 15	**D.** 14	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

1. način

Skicirajmo poslane poruke.

vrijeme	poruke	broj poruka
16:00		$1 \cdot 2 = 2$
16:03		$2 \cdot 2 = 4$
16:06		$4 \cdot 2 = 8$
16:09		$8 \cdot 2 = 16$

2. način

Poslane poruke zapišimo pregledno u tablici.

vrijeme	tko šalje poruku	koliko poruka svatko od njih šalje	ukupno poslano poruka
16:00	Fran	2	$1 \cdot 2 = 2$
16:03	2 prijatelja	2	$2 \cdot 2 = 4$
16:06	4 prijatelja	2	$4 \cdot 2 = 8$
16:09	8 prijatelja	2	$8 \cdot 2 = 16$

Do 16:10 poruku će dobiti $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ prijatelja.

Točan odgovor je B.

2. Fran je dvojici svojih prijatelja u 16 sati poslao mobitelom poruku da dođu oko 17 sati na školsko igralište. Nakon 3 minute obojica prijatelja proslijedili su tu istu poruku još dvojici svojih prijatelja. Svaki prijatelj će, tri minute nakon što primi poruku, proslijediti poruku još dvojici prijatelja koji je nisu dobili do tada. Ako će na igralište doći samo oni koji su dobili poruku do 16 sati i 16 minuta, koliko će Franovih prijatelja biti na igralištu u dogovoreno vrijeme?

A. 64	**B.** 124	**C.** 62	**D.** 126	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Poslane poruke možemo skicirati kao u prethodnom zadatku ili samo zapisati u tablici.

vrijeme	tko šalje poruku	koliko poruka svatko od njih šalje	ukupno poslano poruka
16:00	Fran	2	$1 \cdot 2 = 2$
16:03	2 prijatelja	2	$2 \cdot 2 = 4$
16:06	4 prijatelja	2	$4 \cdot 2 = 8$
16:09	8 prijatelja	2	$8 \cdot 2 = 16$
16:12	16 prijatelja	2	$16 \cdot 2 = 32$
16:15	32 prijatelja	2	$32 \cdot 2 = 64$

Do 16:16 poruku će dobiti $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$ prijatelja.

Točan odgovor je D.

3. Trener je dvojici nogometaša mlađih dobnih kategorija u 16 sati poslao mobitelom poruku da dođu oko 17 sati na školsko igralište. Nakon 3 minute njih dvojica proslijedili su tu istu poruku svaki još trojici nogometaša. Nakon tri minute ta trojica nogometaša proslijedila su poruku četvorici nogometaša koji je nisu dobili do tada itd. Koliko će dječaka u 16 sati i 10 minuta znati da trebaju oko 17 sati doći na nogometno igralište?

A. 32	**B.** 152	**C.** 15	**D.** 120	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

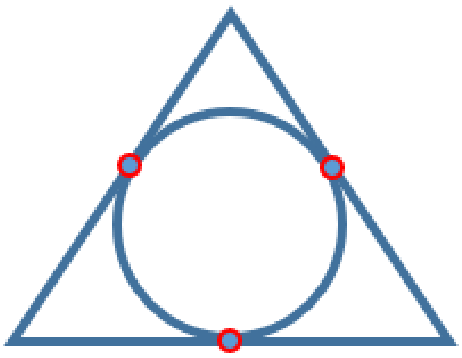
Poslane poruke zapišimo pregledno u tablici.

vrijeme	tko šalje poruku	koliko poruka svatko od njih šalje	ukupno poslano poruka
16:00	1 trener	2	$1 \cdot 2 = 2$
16:03	2 nogometaša	3	$2 \cdot 3 = 6$
16:06	6 nogometaša	4	$6 \cdot 4 = 24$
16:09	24 nogometaša	5	$24 \cdot 5 = 120$

Do 16:10 poruku će dobiti $2 + 6 + 24 + 120 = 152$ nogometaša.

Točan odgovor je B.

4. Milka je od žice napravila kružnicu i rub trokuta. Kada ih je stavila u položaj kao na slici, žice su se preklopile u 3 točke. Milka je isprobavala različite položaje pomičući kružnicu te je svaki put zapisala u koliko se točaka žice preklapaju. Koliko različitih rezultata Milka može dobiti?

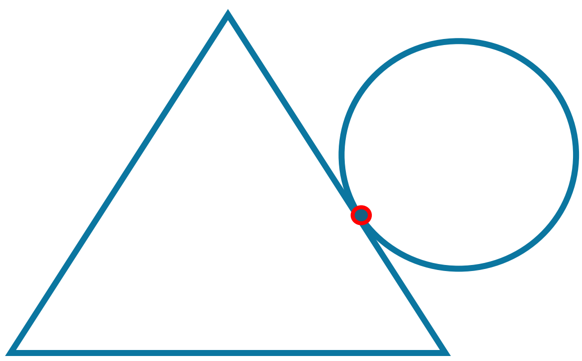


A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
5	4	3	6	ne želimo odgovoriti na pitanje

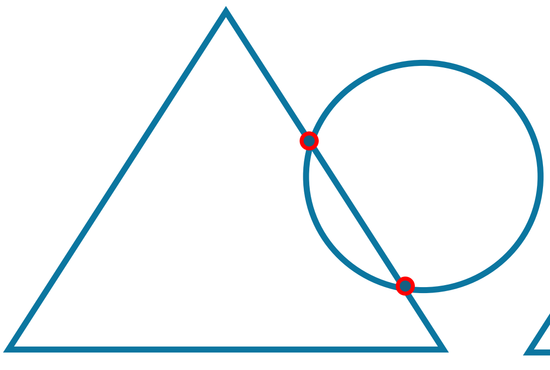
Rješenje.

Prikažimo sve moguće položaje (s obzirom na broj zajedničkih točaka) kružnice i ruba trokuta.

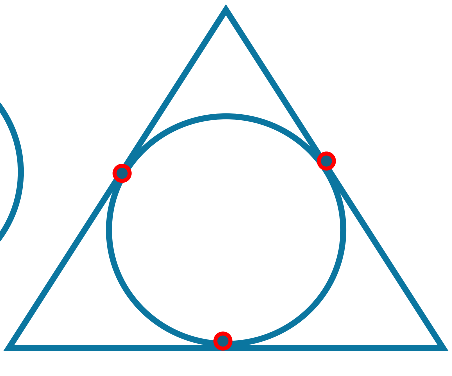
0 točaka



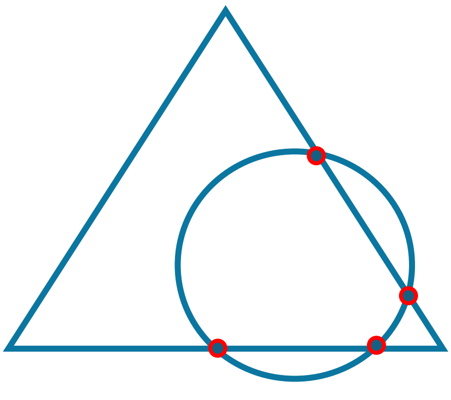
1 točka



2 točke



3 točke

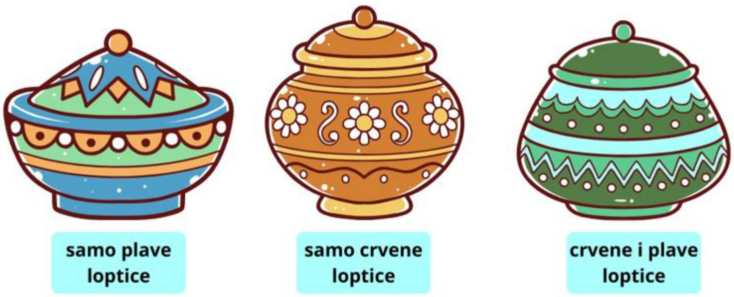


4 točke

Dana kružnica i rub trokuta ne mogu imati više od 4 zajedničke točke. Dakle, postoji 5 različitih položaja.

Točan odgovor je A.

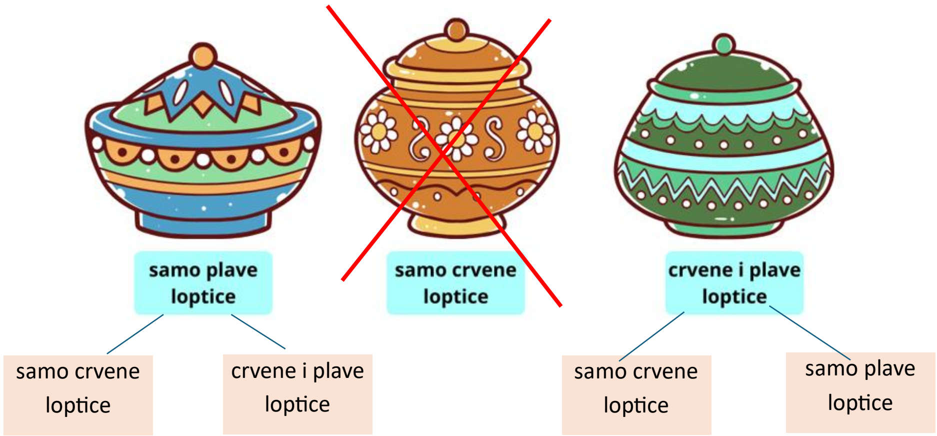
5. Toni je u tri posude stavio loptice: u jednu posudu samo crvene boje, u drugu samo plave boje, a u treću loptice obje boje. Da bi zavarao prijatelja Luku, pored svake posude napisao je lažnu izjavu kao na slici. Luka je trebao, ne gledajući, izvlačiti loptice i odgonetnuti u kojoj su posudi samo crvene loptice. Koliko najmanje loptica treba izvući Luka da bi točno odgovorio na pitanje?



A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
1	2	3	više od 3	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Luka traži posudu u kojoj su samo crvene loptice. Budući da su natpisi ispred svake loptice lažni, jasno je da se samo crvene loptice ne nalaze u srednjoj posudi. Pogledajmo što se može nalaziti u preostale dvije posude.



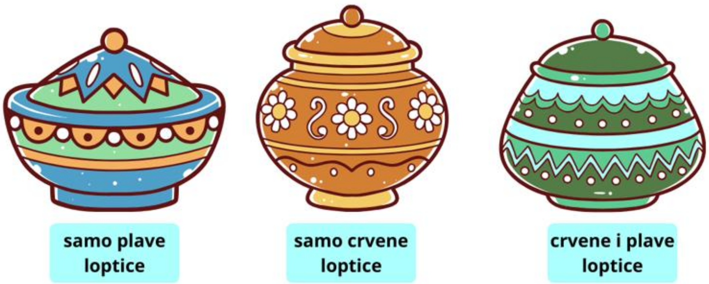
Ako Luka iz prve posude izvuče jednu lopticu, ona može biti crvena ili plava. Ako je plava, jasno je da se u toj posudi nalaze crvene i plave kuglice pa su samo crvene loptice u trećoj posudi. Međutim, ako je izvučena loptica crvena, Luka ne može biti siguran ima li u toj posudi i plavih kuglica ili ne.

Ako Luka iz treće posude izvuče jednu lopticu, ona može biti crvena ili plava. Ako je plava, tada zna da su u toj posudi sve kuglice plave pa su u prvoj posudi sve kuglice crvene. Ako je izvučena loptica crvena, tada su u toj posudi sve kuglice crvene.

Dakle, izvlačeći jednu kuglicu iz treće posude Luka može odmah znati u kojoj su posudi sve loptice crvene boje.

Točan odgovor je A.

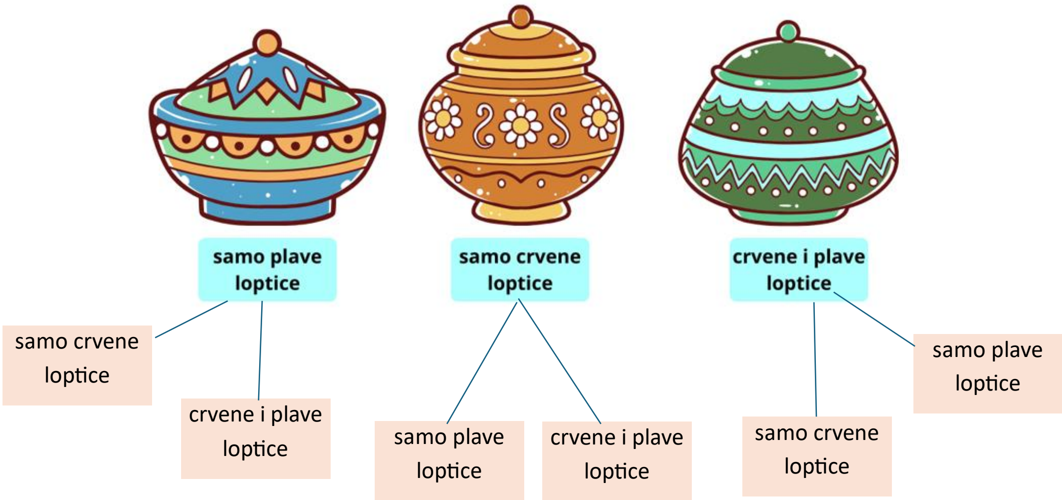
6. Toni je u tri posude stavio loptice: u jednu posudu samo crvene boje, u drugu samo plave boje, a u treću loptice obje boje. Da bi zavarao prijatelja Luku, pored svake posude napisao je lažnu izjavu kao na slici. Luka je trebao, ne gledajući, izvlačiti loptice i odgonetnuti što se nalazi u pojedinoj posudi. Koliko najmanje loptica treba izvući Luka da bi točno odgovorio na pitanje?



A. 1	**B.** 2	**C.** 3	**D.** više od 3	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Budući da su izjave u svim posudama lažne, napišimo što se može nalaziti u pojedinoj posudi.



Ako Luka iz prve posude izvuče jednu kuglice i ona bude crvene boje, on ne može znati postoje li u toj posudi i plave kuglice ili ne.
Ako Luka iz druge posude izvuče jednu kuglice i ona bude plave boje, on ne može znati postoje li u toj posudi i crvene kuglice ili ne.
Ako Luka iz treće posude izvuče jednu kuglicu i ona bude:

- crvene boje, tada će biti siguran da su u trećoj posudi sve kuglice crvene. To znači da su u prvoj posudi crvene i plave kuglice, a samo plave kuglice nalaze se u drugoj posudi
- plave boje, tada će biti siguran da su u trećoj posudi sve kuglice plave. To znači da su u prvoj posudi crvene i plave kuglice, a samo crvene kuglice nalaze se u drugoj posudi

Dakle, Luki je dovoljno samo jedno izvlačenje loptice iz treće posude da zna odrediti gdje se koje kuglice nalaze.

Točan odgovor je A.

7. Mama je svaki dan u Mirinu kasicu ubacila po jednu kovanicu od 1 ili 2 eura ili novčanicu od 5 eura. Na kraju mjeseca u kasici je bilo najviše novčanica pa kovanica od 2 €. Ako je tijekom 30 dana mama uštedjela 96 €, za koliko je ušteđen iznos u novčanicama veći od ušteđenog iznosa u kovanicama?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
nije moguće odrediti	44 €	34 €	54 €	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Označimo nepoznanicama:

- J – broj ubačenih kovanica od 1 €
- D – broj ubačenih kovanica od 2 €
- P – broj ubačenih novčanica od 5 €

u kasici je bilo najviše novčanica pa kovanica od 2 € $\Longrightarrow$ $P > D > J$

tijekom 30 dana mama je uštedjela 96 € $\Longrightarrow$ $\underbrace{J + D + P = 30}_{\text{dani}}$ i $\underbrace{J + 2D + 5P = 96}_{\text{euri}}$

$$J + 2D + 5P = 96$$

$$J + D + D + P + 4P = 96$$

$$(J + D + P) + D + 4P = 96$$

$$30 + D + 4P = 96$$

$$D + 4P = 66$$

$$D = 66 - 4P$$

P	D = 66 – 4P	P > D	J = 30 – (P + D)	D > J
1	66 – 4 = 40	1 < 40 → ne		
…				
12	66 – 48 = 18	12 < 18 → ne		
13	66 – 52 = 14	13 < 14 → ne		
14	66 – 56 = 10	14 > 10 → da	30 – (14 + 10) = 30 – 24 = 6	10 > 6 → da
15	66 – 60 = 6	15 > 6 → da	30 – (15 + 6) = 30 – 21 = 9	6 < 9 → ne

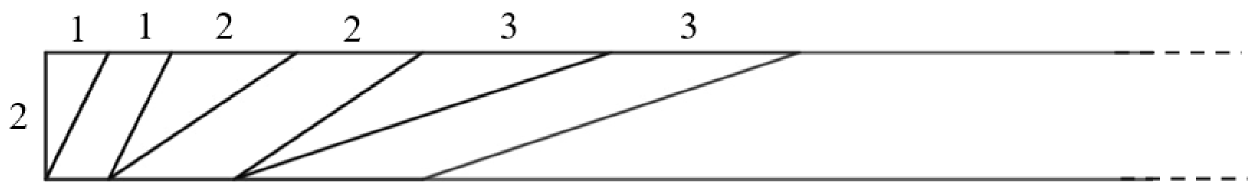
Samo u jednom slučaju je P > D > J.

za koliko je ušteđen iznos u novčanicama veći od ušteđenog iznosa u kovanicama $\Longrightarrow$ $5P - (J + 2D) = ?$

$$5P - (J + 2D) = 5 \cdot 14 - (6 + 2 \cdot 10) = 70 - 26 = 44$$

Točan odgovor je B.

8. Sanja je od papirnate trake širine 2 cm i duljine 100 cm izrezivala trokute i paralelograme kao na slici. Koliki je zbroj površina svih izrezanih paralelograma?



A. 90 cm²	**B.** 100 cm²	**C.** 110 cm²	**D.** ništa od navedenoga	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Budući da se prilikom rezanja gornji rub trake brže troši, promatrajmo redom trokute i paralelograme da bismo izračunali koliko paralelograma je Sanja izrezala.

broj izrezanih trokuta	broj izrezanih paralelograma	izrezana duljina trake u cm
1	1	1 + 1 = 2
2	2	2 + (2 + 2) = 2 + 4 = 6
3	3	6 + (3 + 3) = 6 + 6 = 12
4	4	12 + (4 + 4) = 12 + 8 = 20
5	5	20 + (5 + 5) = 20 + 10 = 30
6	6	30 + (6 + 6) = 30 + 12 = 42
7	7	42 + (7 + 7) = 42 + 14 = 56
8	8	56 + (8 + 8) = 56 + 16 = 72
9	9	72 + (9 + 9) = 72 + 18 = 90
10		90 + 10 = 100

Od trake duljine 100 cm Sanja je mogla izrezati 9 paralelograma.

Površina paralelograma jednaka je umnošku osnovice i duljine visine na tu osnovicu.

$$P = a \cdot v_a$$

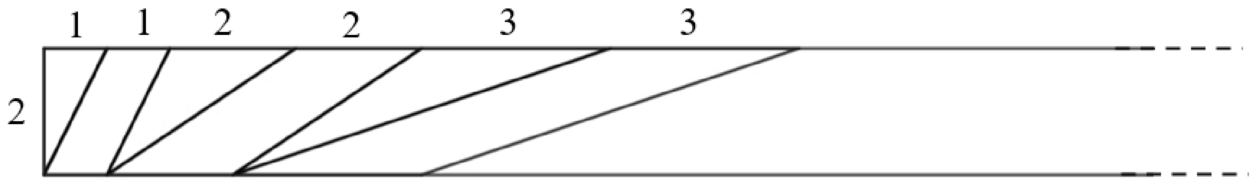
Visine svih 9 paralelograma jednake su širini trake i iznose 2 cm, a baze su im redom prirodni brojevi (u cm) od 1 do 9.

Zbrojimo površine (u cm^2) svih izrezanih paralelograma.

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + \cdots + P_9 &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + 9 \cdot 2 \\ &= (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 2 \\ &= 45 \cdot 2 \\ &= 90 \end{aligned}$$

Točan odgovor je A.

9. Sanja je od papirnate trake širine 2 cm i duljine 100 cm izrezivala trokute i paralelograme kao na slici. Koliki je zbroj površina svih izrezanih trokuta?



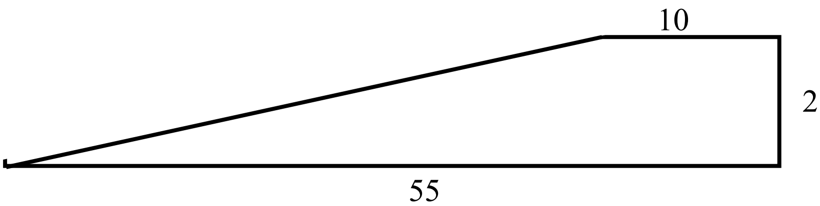
A. 100 cm^2	**B.** 110 cm^2	**C.** 90 cm^2	**D.** 55 cm^2	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

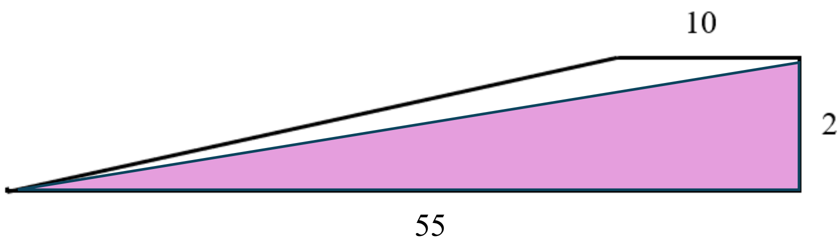
Prilikom rezanja gornji se rub trake brže troši pa njega promatramo da bismo odredili broj izrezanih trokuta i paralelograma.

$$1+1+2+2+3+3+\cdots+n+n \le 100$$
$$1+2+3+\cdots+n \le 50$$
$$\frac{n(n+1)}{2} \le 50$$
$$n(n+1) \le 100$$

Jer je $9 \cdot 10 = 90$, a $10 \cdot 11 = 110$, zaključujemo da je Sanja izrezala 9 trokuta i 9 paralelograma. Nakon toga preostao joj je ovakav komad trake. Donji rub duljine je 100 – (1 + 2 +…+ 9) = 100 – 45 = 55 cm.



Sanja može izrezati i deseti trokut.



Kada izreže deseti trokut, preostat će joj još jedan, jedanaesti trokut, u donjem desnom rubu trake čije su katete duljine 55 cm i 2 cm. Zbrojimo površine svih izrezanih trokuta. Primijetimo da je svim trokutima duljina visine na osnovicu jednaka širini trake, tj. 2 cm.

$$\begin{aligned} P_1+P_2+\cdots+P_9+P_{10}+P_{11} &= \frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 2}{2}+\cdots+\frac{9\cdot 2}{2}+\frac{10\cdot 2}{2}+\frac{55\cdot 2}{2} \\ &= (1+2+\cdots+10)+55 \\ &= 55+55 \\ &= 110 \end{aligned}$$

Točan odgovor je B.

10. Koliko djelitelja ima umnožak prvih šest prirodnih brojeva?

A. 27	**B.** 25	**C.** 40	**D.** 30	**E.** ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenja.

1. način

Izračunajmo umnožak prvih šest prirodnih brojeva.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Ispišimo u parovima sve djelitelje broja 720.

1	720
2	360
3	240
4	180
5	144
6	120
8	90
9	80
10	72
12	60
15	48
16	45
18	40
20	36
24	30

Broj 240 ima 30 djelitelja.

2. način

Rastavimo umnožak prvih šest prirodnih brojeva na proste faktore.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Svaki djelitelj promatranog broja može biti umnožak:

- 0, 1, 2, 3 ili 4 dvojke
- 0, 1 ili 2 trojke
- 0 ili 1 peticu.

To znači da broj dvojki možemo izabrati na 5 načina, broj trojki na 3 načina i broj petica na 2 načina. Ukupno je to $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ načina. Svaki od tih izbora jedak je jednom djelitelju promatranog broja.

Točan odgovor je C.