

Naučimo srednja škola



2025./2026.

3. kolo

1. Koliko ukupno različitih rješenja ima dana jednačba za sve cijele parametre a za koje je $|a| < 10$?

$$ax^2 - a^2x = a - x$$

A.	B.	C.	D.	E.
34	37	36	35	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

$$ax^2 - a^2x = a - x$$

$$ax(x - a) = a - x$$

$$ax(x - a) - (a - x) = 0$$

$$ax(x - a) + (x - a) = 0$$

$$(x - a)(ax + 1) = 0$$

$$x - a = 0 \quad \text{ili} \quad ax + 1 = 0$$

$$x = a \quad \text{ili} \quad ax = -1$$

$$a = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \\ 0 \cdot x_2 = -1 \text{ pa } x_2 \notin \mathbb{R}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow x_1 = a, \quad x_2 = -\frac{1}{a}$$

$$|a| < 10 \Rightarrow -10 < a < 10$$

a	$x_1 = a,$	$x_2 = -\frac{1}{a}$
-9	-9	$\frac{1}{9}$
-8	-8	$\frac{1}{8}$

-1	-1	1
0	0	

uočimo zajednički faktor s lijeve strane jednačbe

prebacimo sve na lijevu stranu jednakosti

uočimo da se zagrade razlikuju samo u predznaku

izlučimo zajednički faktor

umnožak je jednak nuli ako je bar jedan faktor jednak nuli

izrazimo nepoznanicu

pogledajmo što ćemo dobiti ako je $a = 0$

zaključujemo da kada je $a = 0$, jednačba ima jedno rješenje $x = 0$

zaključujemo da kada je $a \neq 0$, jednačba ima dva rješenja

a	$x_1 = a,$	$x_2 = -\frac{1}{a}$
9	9	$-\frac{1}{9}$
8	8	$-\frac{1}{8}$

1	1	-1

Ukupno je $2 \cdot 17 + 1 = 35$ rješenja.

Točan odgovor je D.

2. Za koliko uređenih trojki prirodnih brojeva $(3, a, b)$ vrijedi dana jednakost?

$$D(3, a, b) + V(3, a, b) = 9$$

A. više od 3	B. 3	C. 2	D. 1	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
------------------------	----------------	----------------	----------------	---

Rješenje.

- $D(3, b, c)$ najveći je zajednički djelitelj brojeva 3, b i c . Ne može biti veći od 3.
- $V(3, b, c)$ najmanji je zajednički višekratnik brojeva 3, b i c . Zaključujemo da je uvijek djeljiv s 3.

Pogledajmo redom sve slučajeve.

$D(3, b, c)$	$V(3, b, c) = 9 - D(3, b, c)$	brojevi a i b za koje je $V(3, b, c)$ jednak toj vrijednosti	svi uređeni parovi $(3, b, c)$
1	$9 - 1 = 8$	8 nije djeljiv s 3	
2	$9 - 2 = 7$	7 nije djeljiv s 3	
3	$9 - 3 = 6$	3, 3, 6 ili 3, 6, 6	$(3, 3, 6)$ $(3, 6, 3)$ $(3, 6, 6)$

Dana jednakost vrijedi za 3 uređena para.

Točan odgovor je B.

3. Kolika je površina lika što ga u koordinatnom sustavu zatvaraju točke (x, y) koje zadovoljavaju dana svojstva?

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \end{cases}$$

A. $4\pi - 8$	B. $16 - 4\pi$	C. $16 - 2\pi$	D. $8 - 2\pi$	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	---

Rješenje.

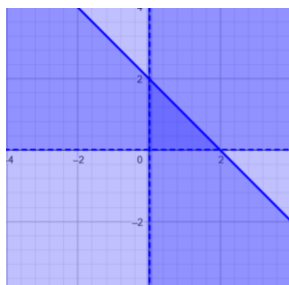
Da bismo u koordinatnom sustavu nacrtali sve točke koje zadovoljavaju prvu nejednakost, promatrat ćemo 4 slučaja.

1. slučaj

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{1. kvadrant}$$

$$x + y \leq 2$$

$$y \leq -x + 2$$

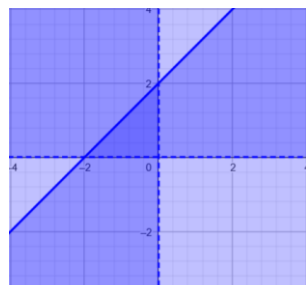


2. slučaj

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{2. kvadrant}$$

$$-x + y \leq 2$$

$$y \leq x + 2$$

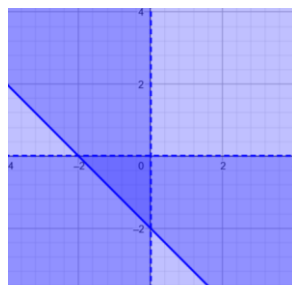


3. slučaj

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{3. kvadrant}$$

$$-x - y \leq 2$$

$$y \geq -x - 2$$

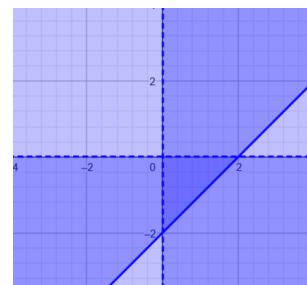


4. slučaj

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{4. kvadrant}$$

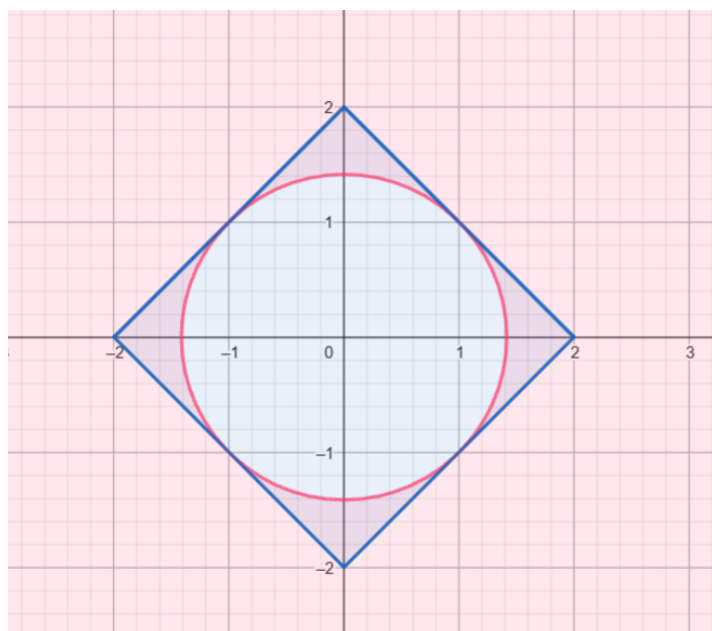
$$x - y \leq 2$$

$$y \geq x - 2$$



Nacrtajmo sve dobivene trokute u istom koordinatnom sustavu i dodajmo drugu nejednakost.

Drugu nejednakost zadovoljavaju sve točke izvan kruga s centrom u ishodištu i polumjerom $\sqrt{2}$.



U presjeku smo dobili kvadrat bez kruga.

$$\text{Površina kvadrata je: } P_{\blacksquare} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

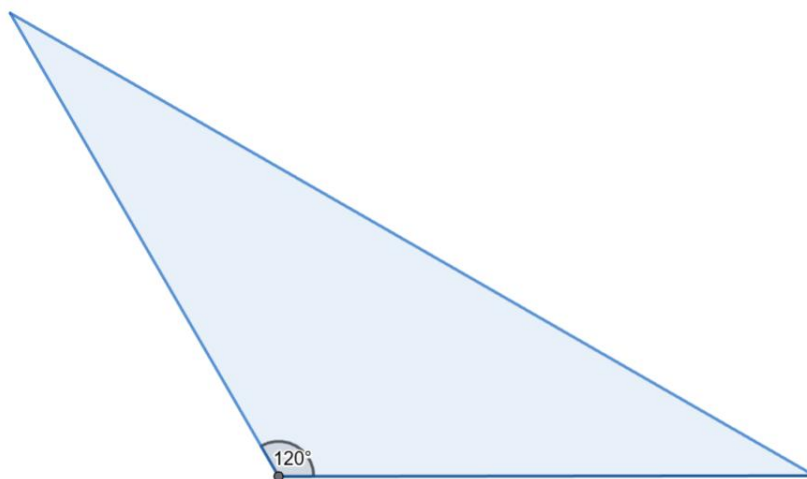
$$\text{Površina kruga je: } P = (\sqrt{2})^2 \pi = 2\pi$$

Tražena površina je:

$$P = 8 - 2\pi$$

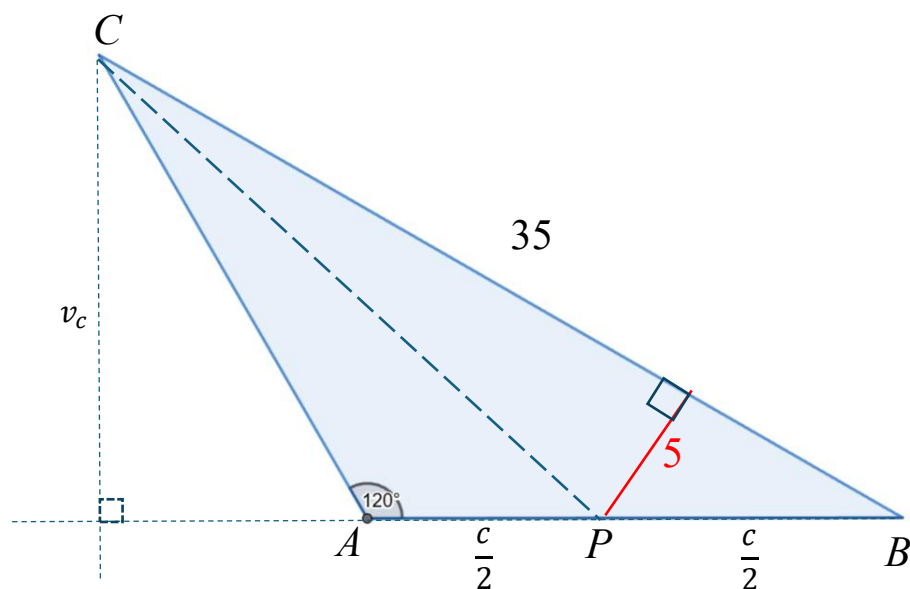
Točan odgovor je D.

4. Duljina stranice \overline{BC} trokuta ABC je 35 cm, a veličina kuta nasuprot toj stranici je 120° . Ako je polovište stranice \overline{AB} udaljeno 5 cm od stranice \overline{BC} , kolika je površina trokuta ABC ?



A. manja od 175 cm^2	B. 175 cm^2	C. veća od 175 cm^2	D. nije moguće odrediti	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-----------------------------------	--------------------------	----------------------------------	----------------------------	---------------------------------------

Rješenje.



Primijetimo da trokuti APC i PBC imaju jednake površine (osnovica duljine $\frac{c}{2}$ i visina na tu osnovicu v_c).

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta APC} + P_{\Delta PBC} = 2P_{\Delta PBC} = 2 \cdot \frac{35 \cdot 5}{2} = 175$$

Točan odgovor je B.

5. Broj z_1 jedno je rješenje jednadžbe $z^5 = w$. Koliki je argument broja w ?

$$z_1 = (1 - i) \left(\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

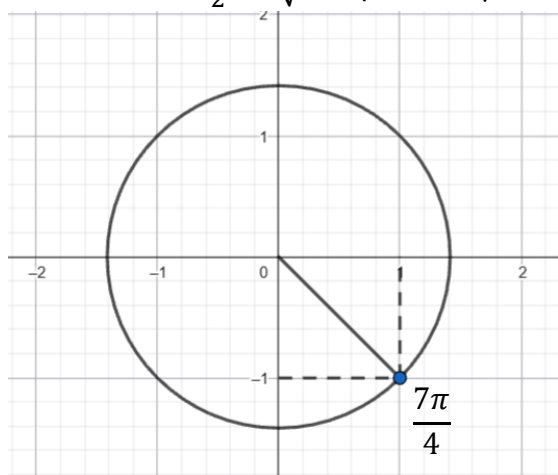
A.	B.	C.	D.	E.
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{4}$	ne želimo odgovoriti na pitanje

Rješenje.

Označimo kompleksne brojeve i prikazimo ih u trigonometrijskom obliku.

$$z_2 = 1 - i$$

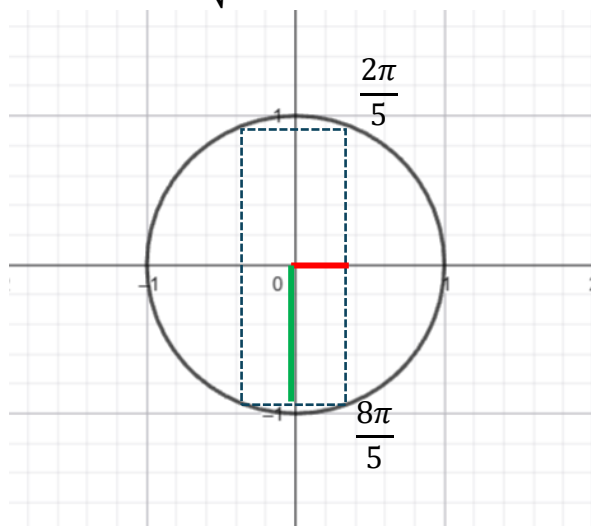
$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$z_3 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \left(-\sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

$$r_3 = \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}} = 1$$



$$z_3 = 1 \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \right)$$

$$r = r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{7\pi}{4} + \frac{8\pi}{5} = \frac{67\pi}{20} = 2\pi + \frac{27\pi}{20} \Rightarrow \varphi = \frac{27\pi}{20}$$

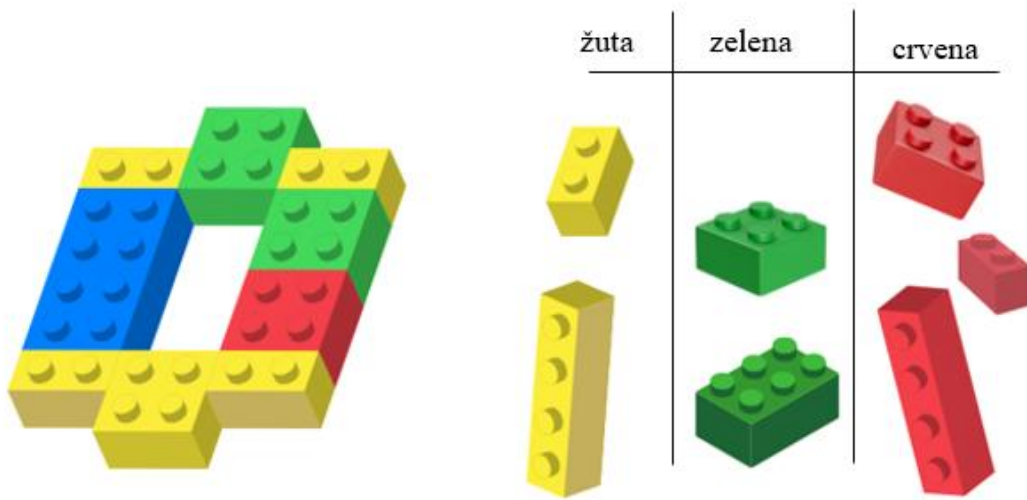
$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{27\pi}{20} + i \sin \frac{27\pi}{20} \right)$$

$$w = z^5 = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{27\pi}{20} + i \sin \frac{27\pi}{20} \right) \right)^5 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{27\pi}{20} \cdot 5 + i \sin \frac{27\pi}{20} \cdot 5 \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{27\pi}{4} + i \sin \frac{27\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + 6\pi \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + 6\pi \right) \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

Točan odgovor je A.

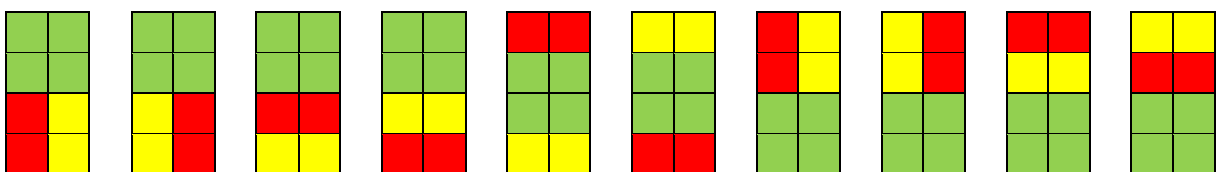
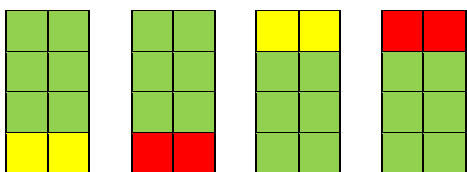
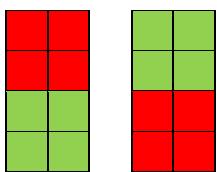
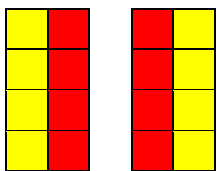
6. Na koliko načina Jurica može popuniti prazninu (na slici) kockama za slaganje različitih boja nacrtanima zdesna?



A. 16	B. 18	C. 24	D. 34	E. ne želimo odgovoriti na pitanje
-------	-------	-------	-------	------------------------------------

Rješenje.

Nacrtajmo sve mogućnosti vodeći računa o tome da ne možemo staviti dvije kockice jednake boje.



Mogućnosti za popunjavanje je $2 + 2 + 4 + 10 = 18$.

Točan odgovor je B.